

Espaces vectoriels

Exercice 473. Soit $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 5))$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, 1))$.

1. A quelle condition le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient-il à F ? à G ?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbf{R}^3$ tel que $F \cap G = \text{Vect}(a)$.
3. Montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$. Cette somme est-elle directe?

Corrigé 473. 1. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & y \\ 1 & 3 & 5 & z \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & y \\ 0 & 2 & 4 & z-x \end{array} \right)$$

donc $(x, y, z) \in F \iff y = z - x \iff x + y - z = 0$. De même,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 1 & z \end{array} \right).$$

Donc $(x, y, z) \in E \iff y - 2x = -z \iff -2x + y + z = 0$.

2. Soit $a = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$a \in F \cap G \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = \frac{2t}{3} \\ y = \frac{t}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Donc on peut choisir $a = (2, 1, 3)$.

3. Déjà la question précédente assure que la somme ne sera pas directe.
On a immédiatement $F + G \subset \mathbf{R}^3$. Réciproquement, soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On veut montrer qu'il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5$ tel que $a(1, 0, 0) + b(1, 2, 3) + \dots + e(1, 1, 1) = (x, y, z)$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & z \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \boxed{1} & y \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & z-x \end{array} \right) \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & -3 & -1 & 0 & x-y \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \boxed{1} & y \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & z-x \end{array} \right) \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -3 & -7 & 0 & 0 & x-y+x-z \\ 0 & 6 & 12 & 0 & \boxed{1} & y-2x+2z \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & z-x \end{array} \right) \end{aligned}$$

En particulier, $(x, y, z) = (2x - y - z) \cdot (1, 0, 1) + (-2x + y + 2z) \cdot (1, 1, 1) + (x - z) \cdot (1, 2, 0) \in F + G$.

Autre méthode. On peut aussi procéder avec les équations cartésiennes. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. $(x, y, z) \in F + H \iff \exists (a, b, c) \in F, (d, e, f) \in G, x + y + z = (a, b, c) + (d, e, f)$. On peut donc démontrer que le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -2d + e + f = 0 \\ a + d = x \\ b + e = y \\ c + f = z \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right)$$

Exercice 474. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

1. Donner une description de F et G comme sous-espaces vectoriels engendrés.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Montrer qu'il est possible de trouver a de sorte que $(a, -a, 0) \in F$ et $(x - a, y + a, z) \in G$.
Que vaut $F + G$ (on pourra remarquer que $u = (a, -a, 0) + (x - a, y + a, z)$).
3. F et G sont-ils en somme directe ?

Corrigé 474. 1. On a $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ ($(x, y, z) \in F \iff x = -y - z$) et $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

2. Soit $a \in \mathbf{R}$. $(a, -a, 0) = -a(-1, 1, 0) \in F$ d'après la question 1. Par ailleurs,

$$(x - a, y + a, z) \in G \iff (x - a) - (y + a) + z = 0 \iff a = \frac{x - y + z}{2}.$$

Ainsi, $\mathbf{R}^3 \subset F + G$. L'autre inclusion étant évidente, on a $F + G = \mathbf{R}^3$.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $(-1, 0, 1) \in F \cap G$ et ainsi F et G ne sont pas en somme directe.

Exercice 475. On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid AM = 0\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid BM = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

Corrigé 475. 1. Soit $(M, N, \lambda) \in F^2 \times \mathbf{R}$. On a $A(M + N) = AM + AN = 0$, donc $M + N \in F$ et $(\lambda M)A = \lambda MA = 0$, donc $\lambda M \in F$. Donc F est un sous-espace vectoriel. De même, on montre que G est un sous-espace vectoriel.

2. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, et $1 \times (-4) - 5 \times 1 \neq 0$, donc $A + B$ est inversible.

Soit $M \in F \cap G$. On a $(A + B)M = AM + BM = 0$. Puisque $A + B$ est inversible, l'égalité $(A + B)M = 0$ entraîne que $M = 0$. Ainsi la somme $F + G$ est directe.

Complément : On a $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. En effet, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On a

$$AM = 0 \iff \begin{pmatrix} 2a + 4b & -a - 2b \\ 2c + 4d & -c - 2d \end{pmatrix} = 0 \iff \exists (t, u) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} a = 2t \\ b = 2u \\ c = t \\ d = u \end{cases}$$

Ainsi $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. De même, on trouve $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

On a $\frac{1}{-3} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Et en procédant de même, on constate que les matrices élémentaires sont toutes dans $F + G$, ce qui entraîne que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \subset F + G$. L'autre inclusion est immédiate, d'où $F + G = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Ainsi $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 478. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ $F = \text{Vect}(\cos)$ et $G = \text{Vect}(\sin)$ sont-ils en somme directe ?

Corrigé 478. Soit $f \in F \cap G$. Il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$. En évaluant cette relation pour $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $(a, b) = 0$. Ainsi F et G sont en somme directe.