

Intégration

Exercice 436. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbf{R}_+$
2. Montrer que f est dérivable et exprimer f' .
3. En étudiant les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction

$$\varphi : x \longmapsto 2xe^{x^2-x^4} - 1,$$

dresser le tableau des variations de f . On placera en particulier le point d'abscisse 1 dans ce tableau.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Corrigé 436. 1. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Si $x \geq 1$, alors $x^2 \geq x$ et puisque $e^{-t^2} \geq 0$ pour tout $t \in [x; x^2]$, par positivité de l'intégrale, on obtient que $f(x) \geq 0$.

Si $x \in [0; 1]$, alors $x^2 \leq x$. Ainsi $f(x) = - \int_{x^2}^x e^{-t^2} dt \leq 0$, par positivité de l'intégrale.

2. La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc y admet des primitives. Notons g l'une d'elles. Alors pour $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = g(x^2) - g(x)$. Construite comme composée et somme de fonctions dérivables, f est donc dérivable sur $\mathbf{R}_+$ avec pour $x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = 2xg'(x^2) - g'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$.
3. la fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ avec, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi'(x) = (2 + 2x(2x - 4x^3))e^{x^2-x^4} = (2 + 4x^2 - 8x^4)e^{x^2-x^4}.$$

Le polynôme $2 + 4X - 8X^2$ a pour racines $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Donc, pour $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi'(x) \leq 0 \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{4} \iff x \geq \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$$

Notons $\alpha = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$ pour la suite. On a obtenu que φ est strictement croissante sur $[0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. De plus, $\varphi(0) = -1 < 0$, $\varphi(1) = 1 > 0$ et on sait que $\alpha < 1$. De plus, pour $x \in \mathbf{R}_+$, $\varphi(x) = 2xe^{-x}e^{x^2-x^4} - 1$ avec, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et $x + x^2 - x^4 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^4$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x^2 - x^4) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2-x^4} = 0$. Ainsi par produit et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1$.

Finalement, φ est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $[0; \alpha]$ et $[\alpha; +\infty[$, donc réalise une bijection de $[0; \alpha]$ sur $[-1; \varphi(\alpha)]$, ainsi qu'une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur $]-1; \varphi(\alpha)]$. Puisque $\varphi(\alpha) > \varphi(1) > 0$, alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions β et γ , avec $\beta < 1 < \gamma$ et, pour $x \in \mathbf{R}_+$, $\varphi(x) \geq 0 \iff \beta \leq x \leq \gamma$. Par ailleurs, pour $x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = e^{x^2}\varphi(x)$, ainsi f est décroissante sur $[0; \beta]$ et sur $[\gamma; +\infty[$ et croissante sur $[\beta; \gamma]$.

4. $t \longmapsto e^{-t^2}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Soit $x \in [1; +\infty[$. Pour $t \in [x; x^2]$, on a donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^4}$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq f(x) \leq (x^2 - x)e^{-x^4}.$$

D'après la croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)e^{-x^4} = 0$, donc le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 439. Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t) dt.$$

1. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer g' . On pourra utiliser la formule d'addition du sinus.
2. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, puis vérifier que

$$g'' + g = f.$$

3. En déduire l'ensemble des fonctions numériques solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = f.$$

Corrigé 439. 1. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}$. Alors $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$g(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt.$$

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel, les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t) \cos(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) dt$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$ donc, par produit, g est dérivable sur $\mathbf{R}$ avec pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + \sin(x) f(x) \cos(x) + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt - \cos(x) f(x) \sin(x) \\ &= \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt. \end{aligned}$$

2. Construite comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, g' est elle-même dérivable sur $\mathbf{R}$, ce qui montre que g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + f(x) \cos^2(x) + \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + f(x) \sin^2(x) \\ &= -\sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + f(x) \\ &= -g(x) + f(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que g est solution de l'équation différentielle $y'' + y = f$.

3. L'équation homogène associée $y'' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$ où A et B sont deux constantes réelles. Puisque g est une solution de l'équation, alors l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y = f$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto g(x) + A \cos(x) + B \sin(x) \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Exercice 440. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Calculer J_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1},$$

et en déduire la limite de la suite (J_n) .

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5. Donner un équivalent de (I_n) .

Corrigé 440. 1. $J_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln[1+t^2] \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $t \in [0; 1]$, $1 + t^2 \geq 1 > 0$ donc $0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et $0 \leq t^n$ donc, par produit d'inégalités de nombres positifs,

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n.$$

Par croissance de l'intégration sur un segment, on en déduit

$$\int_{[0;1]} 0 \, dt \leq \int_{[0;1]} \frac{t^n}{1+t^2} \, dt \leq \int_{[0;1]} t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1,$$

donc

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $J_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Par intégration par parties, on en déduit

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(1+t^2) \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2} \, dt = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. $J_{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car c'est une sous-suite de (J_n) . Donc $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

5. $J_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\frac{2}{n+1} J_{n+2} = o\left(\frac{2}{n+1}\right)$ ou encore $J_{n+2} \frac{2}{n+1} = o\left(\frac{\ln 2}{n+1}\right)$. Par conséquent, $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} + o\left(\frac{\ln 2}{n+1}\right)$, donc $I_n \sim \frac{\ln 2}{n+1}$. Finalement,

$$I_n \sim \frac{\ln 2}{n}.$$

Exercice 443. Étudier la limite éventuelle des suites de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2}$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3}$$

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

$$z_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Corrigé 443. • Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$ donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f$. Or

$$\int_0^1 f = \left[\sqrt{1+2x} \right]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

Finalement (u_n) converge vers $\sqrt{3} - 1$.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2} \frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left[\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^3} \frac{8 \frac{k^2}{n^2}}{1 + \frac{8k^3}{n^3}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{8x^2}{1+8x^3}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{24x^2}{1+8x^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln|1+8x^3| \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 9.$$

Exercice 444. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$w_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Corrigé 444. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $w_n > 0$ et

$$\begin{aligned} \ln(w_n) &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln((2n)(2n-1) \cdots (n+1)) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Or f est continue sur $[0; 1]$, donc $\ln(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$. Or

$$\int_0^1 f = \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x) dx$$

et les fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, donc par intégration par parties,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x) dx = \left[(1+x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 1 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Finalement, $\ln(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln 2 - 1$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(w_n)} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

Exercice 445. Déterminer des équivalents des suites :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Corrigé 445. • Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Or f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

De plus,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent, $\frac{u_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$ et ainsi $u_n \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$.