
Intégration

.....

Exercice 443. Étudier la limite éventuelle des suites de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2}$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3}$$

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

$$z_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Corrigé 443. • Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$. Or

$$\int_0^1 f = \left[\sqrt{1+2x} \right]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

Finalement (u_n) converge vers $\sqrt{3} - 1$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2} \frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left[\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8k^2}{n^3 + 8k^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^3} \frac{8\frac{k^2}{n^2}}{1 + \frac{8k^3}{n^3}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{8x^2}{1+8x^3}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{24x^2}{1+8x^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln|1+8x^3| \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 9.$$

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto x e^{-x}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$ donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$.

Or les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1.$$

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -2e^{-1} + 1$.

.....

Exercice 445. Déterminer des équivalents des suites :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Corrigé 445. • Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Or f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

De plus,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent, $\frac{u_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$ et ainsi $u_n \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = n\sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}} \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+x} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{2}^3 - 1) - 2(\sqrt{2} - 1) \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1 - 3\sqrt{2} + 3) \\ &= \frac{2}{3} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc $\frac{u_n}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} (2 - \sqrt{2})$ et donc $u_n \sim \frac{2}{3} (2 - \sqrt{2}) n\sqrt{n}$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \sin(\pi x)$. $f \in \mathcal{C}^0([0; 1])$, donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

Or

$$\int_0^1 f = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi, $u_n \sim \frac{2n}{\pi}$.

.....

Exercice 446. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Corrigé 446. Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$. $f \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}_+)$, donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt.$$

Or $f(0) = 0$. De plus, $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. On obtient ensuite $f'' : x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$. Enfin, $f^{(3)} : x \mapsto \frac{2}{(1+x)^3}$.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On obtient donc

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \times \frac{2}{(1+t)^3} dt.$$

Pour tout $t \in [0; x]$, $(1+t)^3 \geq 1 > 0$, donc $0 \leq \frac{1}{(1+t)^3} \leq 1$ et $(x-t)^2 \geq 0$, donc

$$0 \leq \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \leq (x-t)^2.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[0; x]} 0 dt \leq \int_{[0; x]} \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt \leq \int_{[0; x]} (x-t)^2 dt$$

donc

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt \leq \int_0^x (x-t)^2 dt = \left[-\frac{(x-t)^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{3}.$$

Or

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt = f(x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$$

donc

$$0 \leq f(x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \leq \frac{x^3}{3}.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$