
Exercices à distance

.....

Exercice 438. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction F ainsi définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est dérivable et déterminer F' . En déduire une expression plus simple de F .
2. Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Corrigé 438. 1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc y admet des primitives. Notons g l'une d'elles. Alors, pour $x > 0$, on a puisque $\frac{1}{x} > 0$,

$$F(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) - g(x).$$

Construite comme composée et somme de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, F l'est aussi, avec, pour $x > 0$:

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right) - g'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{\ln x}{1+x^2} = -\frac{-\ln x}{x^2+1} - \frac{\ln x}{1+x^2} = 0.$$

La fonction F est donc constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Or $F(1) = 0$, donc F est la fonction nulle.

2. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'extrémités x et $\frac{1}{x}$ et $u \mapsto \frac{-\ln(u)}{1+u^2}$ est continue sur ce même segment. Quand $t = x$, $u = \frac{1}{x}$ et quand $t = \frac{1}{x}$, $u = x$. De plus, $dt = -\frac{1}{u^2} du$. Ainsi, le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-1}{u^2} du = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln(u)}{u^2+1} du = -F(x)$$

ce qui montre que $F(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

.....

Exercice 448. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Montrer que si f est une fonction paire (resp. impaire), son développement limite ne contient que des termes de degré pair (resp. impair).

Corrigé 448. Par hypothèse, il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

En particulier,

$$f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k + o(x^n).$$

1. Supposons f paire. On obtient des égalités précédentes, et par unicité du développement limité, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = (-1)^k a_k$, ce qui montre que les coefficients des puissances impaires sont nuls.
2. Supposons f impaire. On obtient que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = -(-1)^k a_k$, ce qui montre que les coefficients des puissances paires sont nuls.