
Polynômes

..... Nom du fichier : exo028.tex

Exercice 396. 1. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels tel que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer que α^2 est une racine de P et en déduire que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
- (b) Montrer que 0 n'est pas racine de P .
- (c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer que $|\alpha + 1| = 1$.
- (d) En déduire les racines de P ainsi que la forme du polynôme P .

2. Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

Corrigé 396. 1. (a) On a $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0 \times P(\alpha-1) = 0$, donc α^2 est racine de P .

Supposons $\alpha \neq 0$. On peut montrer par récurrence que α^{2^n} est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $P \neq 0$, donc il possède un nombre fini de racines, ce qui entraîne que $n \mapsto \alpha^{2^n}$ non injective, donc il existe $m > n$ tels que $\alpha^{2^m} = \alpha^{2^n}$, puis $\alpha^{2^m - 2^n} = 1$ avec $2^m - 2^n \in \mathbb{N}^*$, d'où $\alpha \in \mathbb{U}_{2^m - 2^n}$.

- (b) Supposons que 0 est racine de P . Alors $P(1^2) = P(1)P(0) = 0$, donc 1 est racine de P . De même, $P(2^2) = P(2)P(1) = 0$, donc 4 est racine de P . Or 4 est non nul et n'est pas de module 1, donc la question précédente montre que l'on a obtenu une absurdité. Il s'ensuit que 0 n'est pas racine de P .
- (c) Si α est une racine de P , alors $(\alpha + 1)^2$ est aussi une racine de P . D'après les questions précédentes, $|(\alpha + 1)^2| = 1$, d'où le résultat.
- (d) Soit α une racine de P . On a $|\alpha| = 1 = |\alpha + 1|$, donc le point d'affixe α est sur le cercle unité et sur le cercle de centre le point d'affixe -1 et de rayon 1. On en déduit que $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$ (on peut aussi le trouver algébriquement). Ainsi il existe $(\lambda, n, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^2$ tel que

$$P = \lambda(X - j)^n(X - j^2)^p.$$

Ainsi,

$$P(X^2) = \lambda(X^2 - j)^n(X^2 - j^2)^p = \lambda(X^2 - j^4)^n(X^2 - j^2)^p = \lambda(X - j^2)^n(X - j)^p(X + j)^p$$

et

$$P(X)P(X-1) = \lambda^2(X - j)^n(X - j^2)^p(X - 1 - j)^n(X - 1 - j^2)^p = \lambda^2(X - j)^n(X - j^2)^p(X + j^2)^n(X + j)^p$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on obtient $\lambda = \lambda^2$, i.e. $\lambda = 1$ et $n = p$. Ainsi P est de la forme $P = (X - j)^n(X - j^2)^n = (X^2 + X + 1)^n$.

2. Réciproquement, il reste à vérifier que les polynômes de la forme $(X^2 + X + 1)^n$ satisfont la relation de l'énoncé (c'est le cas). De plus, le polynôme nul vérifie aussi la relation. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\{(X^2 + X + 1)^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$