
Développements limités

.....

Exercice 449. Déterminer, s'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de 0 par les expressions suivantes :

- | | | | |
|---|-----------|---|-----------|
| (a) $\cos(2x)$ | (ordre 3) | (b) $\sin(x) - x + x^7$ | (ordre 3) |
| (c) $x - \ln(1+x)$ | (ordre 3) | (d) $(e^x)^2$ | (ordre 4) |
| (e) $\sin(x+x^2)$ | (ordre 3) | (f) $\sqrt{1+x+x^2}$ | (ordre 3) |
| (g) $\sin^2(x)$ | (ordre 5) | (h) $e^x(1+x+x^2)$ | (ordre 2) |
| (i) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ | (ordre 3) | (j) $\ln(\cos x + \sin x)$ | (ordre 3) |
| (k) $\exp(1+2x)$ | (ordre 4) | (l) $\frac{\cos x}{1+x}$ | (ordre 4) |
| (m) $\frac{e^x}{1-2x}$ | (ordre 3) | (n) $\frac{\sin(2x)}{x+x^2}$ | (ordre 3) |
| (o) $\sqrt{1+x^2}e^x$ | (ordre 2) | (p) $\exp\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ | (ordre 4) |
| (q) $\tan(x)$ | (ordre 6) | (r) $\tan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$ | (ordre 4) |
| (s) $\frac{1}{1+\cos(x)}$ | (ordre 2) | (t) $\sqrt{\frac{x-4}{x-1}}$ | (ordre 2) |
| (u) $\operatorname{Arctan}(x)$ | (ordre 4) | (v) $\operatorname{Arcsin}(x)$ | (ordre 4) |
| (w) $\frac{x}{e^x-1}$ | (ordre 3) | (x) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ | (ordre 4) |
| (y) $\operatorname{Arccos}(\sqrt{1-x^2})$ | (ordre 5) | (z) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t} dt$ | (ordre 5) |

Corrigé 449. (a) Puisque $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et en utilisant le $\text{DL}_3(0)$ de $\cos$, on obtient $\cos(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x^2 + o(x^3)$.

(b) On a directement à partir du $\text{DL}_3(0)$ de $\sin$ l'égalité $\sin(x) - x + x^7 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

(c) On a directement à partir du $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ l'égalité $x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

(d) Puisque $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et en utilisant le $\text{DL}_3(0)$ de $\exp$, on obtient $e^{2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.