

Variables aléatoires

Exercice 399. 1. Sur l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on définit deux variables aléatoires X et Y par :

a	1	2	3	4	5	6
$X(a)$	1	0	1	-1	0	1
$Y(a)$	2	2	0	1	1	0

Expliciter les événements suivants : $\{X = 0\}$, $\{X = 2\}$, $\{X \leq 0\}$, $\{X = Y\}$, $\{X \leq Y\}$, $\{0 < Y < 1\}$, $\{X + Y = 3\}$.

2. On suppose que Ω est muni de la probabilité uniforme (équiprobabilité). Calculer la probabilité de l'événement $XY = 0$ et celle de l'événement $|X - Y| \leq 1$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

Corrigé 399. 1. $\{X = 0\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\} = \{2, 5\}$.

$$\{X = 2\} = \emptyset.$$

$$\{X \leq 0\} = \{2, 4, 5\}.$$

$$\{X = 4\} = \emptyset.$$

$$\{X \leq Y\} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

$$\{0 < Y < 1\} = \emptyset.$$

$$\{X + Y = 3\} = \{1\}.$$

2. $\{XY = 0\} = \{2, 3, 5, 6\}$, donc $\mathbb{P}(XY = 0) = \mathbb{P}(\{2, 3, 5, 6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$$\{|X - Y| \leq 1\} = \{1, 3, 5, 6\}, \text{ donc } \mathbb{P}(|X - Y| \leq 1) = \frac{2}{3}.$$

On en a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 400. On lance trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de "faces" obtenues.

Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance. Pouvait-on obtenir $\mathbb{E}(X)$ sans chercher la loi de X ?

Corrigé 400. On imagine que les lancers sont successifs ou que les pièces sont discernables, afin que l'univers Ω soit muni de l'équiprobabilité.

$$\text{Card}(\Omega) = \underbrace{2}_{\text{choix pile ou face pour la première pièce}} \times \underbrace{2}_{\text{pour la 2e pièce}} \times \underbrace{2}_{\text{pour la 3e pièce}} = 8.$$

- *Méthode 1.* On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. De plus, $\{X = 0\}$ est l'événement « n'obtenir que des "pile" », donc $\text{Card}\{X = 0\} = 1$ et donc $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}$.

$\text{Card}(X = 1) = \binom{3}{1} = 3$ (choix de la pièce tombant sur face ; on peut aussi dénombrer les issues à la main : PPF, PFP, FPP). Donc $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}$.

De même, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$. On en déduit

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

- *Méthode 2.* Notons X_i la variable aléatoire valant 1 si la i -ième pièce donne "face" et 0 sinon. On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3$. Or $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, donc en utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

- *Méthode 3.* X compte le nombre de succès lors de 3 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli (lancer d'une pièce) dont la probabilité de succès (« obtenir "face" ») est $\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$, puis $\mathbb{E}(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercice 401. On joue au jeu suivant : après avoir parié sur un nombre compris entre 1 et 6, on lance trois dés non pipés : si le nombre choisi n'est pas sorti, on perd un euro, s'il sort une, deux ou trois fois, on gagne respectivement un, deux, ou trois euros. Notons X la variable aléatoire représentant le gain après une partie.

Déterminer la loi de X , puis son espérance.

Corrigé 401. Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le nombre choisi est sorti. Y compte le nombre de succès lors de trois répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli (lancer d'un dé) dont la probabilité de succès (« obtenir le chiffre choisi ») est $\frac{1}{6}$. Par conséquent, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$ et

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = x)$	$(\frac{5}{6})^3$	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^2$	$3 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot \frac{5}{6}$	$(\frac{1}{6})^3$

On a $X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $\{X = -1\} = \{Y = 0\}$, $\{X = 1\} = \{Y = 1\}$, $\{X = 2\} = \{Y = 2\}$ et $\{X = 3\} = \{Y = 3\}$. Finalement, la loi de X est donnée par :

x	-1	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$(\frac{5}{6})^3$	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^2$	$3 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot \frac{5}{6}$	$(\frac{1}{6})^3$

On obtient alors aisément $\mathbb{E}(X) = \frac{-1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 6 \times 5 + 3}{6^3} = -\frac{17}{6^3}$.

Exercice 403. On tire 5 fois de suite 1 carte d'un jeu de 32 cartes, avec remise. Quelle est la probabilité de tirer au moins 2 as ?

Corrigé 403. Notons X le nombre d'as obtenu lors de cette expérience aléatoire. X compte le nombre de succès obtenus lors de cinq répétitions de manière indépendantes les unes des autres d'une même épreuve de Bernoulli (« tirer une carte ») dont la probabilité de succès (« obtenir un as ») est $\frac{4}{32}$, i.e. $\frac{1}{8}$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{1}{8})$.

Notons A l'événement « tirer au moins deux as ». Alors $\bar{A} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$ et cette réunion est disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{7^4}{8^5} \cdot (5 + 7) = \left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \frac{3}{2}.$$

Finalement, $\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \frac{3}{2}$.

Exercice 404. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire au hasard successivement cinq boules de l'urne. On note B le nombre de boules blanches tirées et N le nombre de boules noires tirées.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires B et N , dans le cas où les tirages s'effectuent sans remise, puis dans le cas où les tirages s'effectuent avec remise.

Corrigé 404. 1. Cas de tirages sans remise.

On a $B(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On suppose que les boules sont numérotées afin que toutes les issues soient équiprobables. On a

$$\text{Card}(\Omega) = \underbrace{10}_{\text{choix de la 1re boule}} \times \underbrace{9}_{\text{choix de la 2e boule}} \times \cdots \times 6 = \frac{10!}{5!}.$$

De plus,

$$\text{Card}(\{B = 0\}) = \underbrace{8}_{\text{choix de la 1re boule}} \times \underbrace{7}_{\text{choix de la 2e boule}} \times \cdots \times 4 = \frac{8!}{3!}.$$

Donc $\mathbb{P}(B = 0) = \frac{8!5!}{10!3!} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$. Par ailleurs,

$$\text{Card}(\{B = 1\}) = \underbrace{5}_{\text{place de la boule blanche}} \times \underbrace{8}_{\text{choix de la 1re boule noire}} \times \underbrace{7}_{\text{2e boule noire}} \times \underbrace{6}_{\text{3e boule noire}} \times \underbrace{5}_{\text{4e boule noire}} \times \underbrace{2}_{\text{boule blanche}}.$$

Donc $\mathbb{P}(B = 1) = 10 \times \frac{8!}{4!} \times \frac{5!}{10!} = \frac{5}{9}$.

Puisque $\{B = 0\}$, $\{B = 1\}$, $\{B = 2\}$ forment un système complet d'événements, $1 = \mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(B = 2)$, donc $\mathbb{P}(B = 2) = \frac{2}{9}$. En résumé,

x	0	1	2
$\mathbb{P}(B = x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Donc $\mathbb{E}(B) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = 1$ et $\mathbb{E}(B^2) = 0^2 \times \frac{2}{9} + 1^2 \times \frac{5}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} = \frac{13}{9}$. Par conséquent, $\mathbb{V}(B) = \frac{13}{9} - 1 = \frac{4}{9}$.
On remarque que $B + N = 5$, donc $N(\Omega) = \{3, 4, 5\}$ et

x	3	4	5
$\mathbb{P}(B = x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

De plus, $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(5 - B) = 5 - \mathbb{E}(B) = 4$ et $\mathbb{V}(N) = \mathbb{V}(5 - B) = (-1)^2 \mathbb{V}(B) = \frac{4}{9}$.

2. Cas de tirages avec remise. Dans ce cas, $B \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{1}{5})$ car B compte le nombre de succès (« obtenir une boule blanche ») lors de cinq répétitions de manière indépendante d'une même épreuve de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) dont la probabilité de succès est $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Donc $B(\Omega) = \llbracket 1, 5 \rrbracket$ et $\mathbb{P}(B = k) = \binom{5}{k} (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{5-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

Alors $\mathbb{E}(B) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $\mathbb{V}(B) = 5 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$.

De même, $N \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{4}{5})$, $\mathbb{E}(B) = 4$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{4}{5}$.

Exercice 405. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, telle qu'il existe un nombre réel strictement positif a pour lequel :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a \binom{n}{k}}{k + 1}.$$

1. Calculer a .
2. Calculer l'espérance et la variance de X . On pourra commencer par calculer $\mathbb{E}(X + 1)$ et $\mathbb{E}(X(X + 1))$.

Corrigé 405. 1. $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \dots, \{X = n\}$ forment un système complet d'événements, donc $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{k=0}^n \frac{a \binom{n}{k}}{k + 1} \\
 &= a \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n - k)!(k + 1)} \\
 &= \frac{a}{n + 1} \sum_{k=0}^n \frac{(n + 1)!}{(k + 1)!((n + 1) - (k + 1))!} \\
 &= \frac{a}{n + 1} \sum_{k=0}^n \binom{n + 1}{k + 1} \\
 &= \frac{a}{n + 1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n + 1}{\ell} && \text{en posant } \ell = k + 1 \\
 &= \frac{a}{n + 1} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n + 1}{\ell} \right) - \binom{n + 1}{0} \right) \\
 &= \frac{a}{n + 1} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n + 1}{\ell} 1^{\ell} 1^{n+1-\ell} \right) - 1 \right) \\
 &= \frac{a}{n + 1} ((1 + 1)^{n+1} - 1) \\
 &= \frac{a}{n + 1} (2^{n+1} - 1)
 \end{aligned}$$

Donc $a = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}$.