
Développements limités

.....

Exercice 442. Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Prouver que la fonction H est définie sur $I =]0, 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in I$, déterminer le signe de $H(x)$.
3. Etudier les limites de H en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \frac{H(x)}{x}.$$

5. Calculer pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}.$$

6. En déduire que H admet une limite en 1^+ et la déterminer.
7. Adapter le raisonnement précédent pour prouver que H admet une limite en 1^- et la déterminer.
8. En déduire que H est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}_+$. On note encore H ce prolongement.
9. En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.
10. Dresser le tableau des variations de la fonction H .

Corrigé 442. 1. La fonction H est définie sur $I = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}^0([\min(x, x^2); \max(x, x^2)]) \right\}$.

Or $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $D = \{ t \in \mathbf{R} \mid t > 0 \text{ et } \ln(t) \neq 0 \} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

- Donc $I \subset]0; 1[\cup]1; +\infty[$ car si $x \in I$, alors $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ doit être définie en x .
- Réciproquement, soit $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Supposons dans un premier temps que $x \in]0; 1[$. Alors $x^2 \in]0; 1[$ et

$$[\min(x, x^2); \max(x, x^2)] = [x^2; x] \subset]0; 1[\subset D.$$

Donc $x \in I$.

Supposons à présent que $x \notin]0; 1[$. Alors $x \in]1; +\infty[$. Donc $x^2 \in]1; +\infty[$ et

$$[\min(x, x^2); \max(x, x^2)] = [x; x^2] \subset]1; +\infty[\subset D.$$

Donc $x \in I$.

Ainsi on a montré que pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $x \in I$. Donc $]0; 1[\cup]1; +\infty[\subset I$.

Finalement, de la double inclusion on déduit l'égalité des ensembles :

$$]0; 1[\cup]1; +\infty[= I.$$

2. Soit $x \in I$.

- Supposons $x \in]0; 1[$. Alors

$$[\min(x^2, x); \max(x^2, x)] = [x^2; x] \subset]0; 1[,$$

et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est négative sur $]0; 1[$, donc pour tout $t \in [x^2; x]$, $\frac{1}{\ln t} \leq 0$. Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit que

$$\int_{[x^2; x]} \frac{dt}{\ln t} \leq 0.$$

Or

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = - \int_{[x^2; x]} \frac{dt}{\ln t}.$$

Donc $H(x) \geq 0$.

- Supposons maintenant que $x \notin]0; 1[$. Alors $x \in]1; +\infty[$. Donc

$$[\min(x, x^2); \max(x, x^2)] = [x; x^2] \subset]1; +\infty[.$$

Or $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est positive sur $]1; +\infty[$ donc pour tout $t \in [x; x^2]$, $\frac{1}{\ln t} \geq 0$. Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[x; x^2]} \frac{dt}{\ln t} \geq 0.$$

Or

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{\ln t}.$$

Donc $H(x) \geq 0$.

Finalement, on a montré que $H(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

3. • Soit $x \in]0; 1[$. $x^2 < x$ et pour tout $t \in [x^2; x]$,

$$\ln(x^2) \leq \ln t \leq \ln x < 0.$$

Or la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ donc pour tout $t \in [x^2; x]$,

$$\frac{1}{2 \ln x} = \frac{1}{\ln(x^2)} \geq \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln x}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[x^2; x]} \frac{1}{2 \ln x} dt \geq \int_{[x^2; x]} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_{[x^2; x]} \frac{dt}{\ln x}$$

donc

$$\frac{(x - x^2)}{2 \ln x} \geq -H(x) \geq \frac{(x - x^2)}{\ln x}$$

donc

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq H(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Or $\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\frac{x^2 - x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc on obtient avec le théorème d'encadrement $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

- Soit $x \in]1; +\infty[$. Alors $x < x^2$ et pour tout $t \in [x; x^2]$,

$$0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2).$$

Or la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc pour tout $t \in [x; x^2]$,

$$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2 \ln x}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$\int_{[x; x^2]} \frac{1}{\ln x} dt \geq \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{2 \ln x},$$

i.e.

$$\frac{(x^2 - x)}{\ln x} \geq H(x) \geq \frac{(x^2 - x)}{2 \ln x}.$$

Or $x^2 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ d'après le théorème des croissances comparées. Donc $\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Le théorème de minoration assure alors que $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

4. Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [x; x^2]$, $0x < t \leq x^2$, donc $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x^2}$, et d'autre part $\frac{1}{\ln t} \geq 0$, donc

$$\frac{1}{x \ln(t)} \geq \frac{1}{t \ln(t)} \geq \frac{1}{x^2 \ln(t)}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on obtient alors :

$$\int_{[x; x^2]} \frac{dt}{x \ln t} \geq \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{t \ln t} \geq \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{x^2 \ln t}.$$

Or,

$$\int_{[x; x^2]} \frac{dt}{x \ln t} = \frac{1}{x} \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{\ln t} = \frac{H(x)}{x} \quad \text{et} \quad \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{x^2 \ln t} = \frac{1}{x^2} \int_{[x; x^2]} \frac{dt}{\ln t} = \frac{H(x)}{x^2}.$$

donc

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{H(x)}{x}.$$

5. Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} &= \left[\ln(|\ln t|) \right]_x^{x^2} \\ &= \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) \quad \text{en utilisant } \ln(x^2) > 0 \text{ et } \ln(x) > 0 \text{ car } x > 1 \\ &= \ln(2 \ln x) - \ln(\ln x) \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$

6. Soit $x \in]1; +\infty[$. Avec les questions 4. et 5., on a montré que

$$\frac{H(x)}{x^2} \leq \ln 2 \leq \frac{H(x)}{x}$$

et puisque $x \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, on en déduit que $H(x) \leq x^2 \ln(2)$ et que $x \ln(2) \leq H(x)$, donc

$$x \ln(2) \leq H(x) \leq x^2 \ln(2).$$

Or $x \ln(2) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln(2)$ et $x^2 \ln(2) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln(2)$, donc avec le théorème d'encadrement, $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln(2)$.

7. Soit $x \in]0; 1[$. Pour tout $t \in [x^2; x]$, $0 < x^2 \leq t \leq x$, donc $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}$. D'autre part, $\frac{1}{\ln t} \leq 0$, donc

$$\frac{1}{x^2 \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{x \ln t}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment, on obtient

$$\int_{[x^2; x]} \frac{dt}{x^2 \ln t} \leq \int_{[x^2; x]} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_{[x^2; x]} \frac{dt}{x \ln(t)},$$

donc

$$\frac{-H(x)}{x^2} \leq \left[\ln(|\ln t|) \right]_{x^2}^x \leq \frac{-H(x)}{x}$$

puis

$$\frac{-H(x)}{x^2} \leq \ln(-\ln(x)) - \ln(-2 \ln(x)) \leq \frac{-H(x)}{x}$$

et ensuite

$$\frac{-H(x)}{x^2} \leq -\ln(2) \leq \frac{-H(x)}{x}.$$

Ainsi,

$$\frac{H(x)}{x^2} \geq \ln 2 \geq \frac{H(x)}{x}.$$

Or $x \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $H(x) \geq x^2 \ln(2)$ et $H(x) \leq x \ln(2)$. Ainsi, $x^2 \ln(2) \leq H(x) \leq x \ln(2)$ pour tout $x \in]0; 1[$. Le théorème d'encadrement fournit alors $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ln(2)$.

8. On a $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2)$, donc on peut prolonger H par continuité en 0 et en 1 en posant $H(0) = 0$ et $H(1) = \ln(2)$.

9. $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur ce domaine. Notons g l'une d'entre elles.

Alors $g \in D^1(]0; 1[\cup]1; +\infty[)$ et $g' : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$. g' est continue sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, donc $g \in \mathcal{C}^1(]0; 1[\cup]1; +\infty[)$.

Au voisinage de tout point de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $H(x) = g(x^2) - g(x)$, donc H s'exprime à l'aide de somme et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi $H \in \mathcal{C}^1(]0; 1[\cup]1; +\infty[)$.

Soit $x \in I$.

$$H'(x) = 2xg'(x^2) - g'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

On a $H \in \mathcal{C}^0(]0; 1[) \cap D^1(]0; 1[)$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, donc $H'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Le théorème de la limite de la dérivée assure alors que $\frac{H(x)-H(0)}{x-0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et donc H est dérivable en 0, $H'(0) = 0$ et H' est continue en 0.

De même, $H \in \mathcal{C}^0(]0; +\infty[) \cap D^1(]0; 1[\cup]1; +\infty[)$ et pour tout $x \in I$, $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Or $\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1$ car $\ln$ est dérivable en 1. Donc $H'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$. Le théorème de la limite de la dérivée assure alors que $\frac{H(x)-H(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$.

Donc H est dérivable en 1, $H'(1) = 1$ et H' est continue en 1.

Finalement, $H \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+)$.

10. Pour tout $x \in I$, $H'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. On en déduit immédiatement que la fonction H est croissante sur $\mathbf{R}_+$:

x	0	1	$+\infty$
$H'(x)$	0	+	1
H	0	$\ln 2$	$+\infty$

Exercice 449. Déterminer, s'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions définies au voisinage de 0 par les expressions suivantes :

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------|---|-----------|
| (a) $\cos(2x)$ | (ordre 3) | (b) $\sin(x) - x + x^7$ | (ordre 3) |
| (c) $x - \ln(1+x)$ | (ordre 3) | (d) $(e^x)^2$ | (ordre 4) |
| (e) $\sin(x+x^2)$ | (ordre 3) | (f) $\sqrt{1+x+x^2}$ | (ordre 3) |
| (g) $\sin^2(x)$ | (ordre 5) | (h) $e^x(1+x+x^2)$ | (ordre 2) |
| (i) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ | (ordre 3) | (j) $\ln(\cos x + \sin x)$ | (ordre 3) |
| (k) $\exp(1+2x)$ | (ordre 4) | (l) $\frac{\cos x}{1+x}$ | (ordre 4) |
| (m) $\frac{e^x}{1-2x}$ | (ordre 3) | (n) $\frac{\sin(2x)}{x+x^2}$ | (ordre 3) |
| (o) $\sqrt{1+x^2}e^x$ | (ordre 2) | (p) $\exp\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ | (ordre 4) |
| (q) $\tan(x)$ | (ordre 6) | (r) $\tan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$ | (ordre 4) |
| (s) $\frac{1}{1+\cos(x)}$ | (ordre 2) | (t) $\sqrt{\frac{x-4}{x-1}}$ | (ordre 2) |
| (u) $\text{Arctan}(x)$ | (ordre 4) | (v) $\text{Arcsin}(x)$ | (ordre 4) |
| (w) $\frac{x}{e^x-1}$ | (ordre 3) | (x) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ | (ordre 4) |
| (y) $\text{Arccos}(\sqrt{1-x^2})$ | (ordre 5) | (z) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t} dt$ | (ordre 5) |

Corrigé 449. (a) Puisque $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et en utilisant le $\text{DL}_3(0)$ de $\cos$, on obtient $\cos(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x^2 + o(x^3)$.

(b) On a directement à partir du $\text{DL}_3(0)$ de $\sin$ l'égalité $\sin(x) - x + x^7 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

(c) On a directement à partir du $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ l'égalité $x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

(d) Puisque $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et en utilisant le $DL_3(0)$ de $\exp$, on obtient $e^{2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x + x^2 = 0, \text{ on a : } \sin(x + x^2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (x + x^2) - \frac{(x + x^2)^3}{3!} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 - \frac{1}{6}(x^3 + \dots) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \text{De même, on a : } \sqrt{1 + x + x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}(x + x^2)^2 + \frac{1}{16}(x + x^2)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\text{(g)} \quad \text{On a } \sin(x) \times \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

$$\text{Autre méthode. } \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)\right) + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

$$\begin{aligned} \text{(h)} \quad e^x(1 + x + x^2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 + x + x^2) + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \ln(1 + x) \times \frac{1}{1 + x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)(1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\text{(j)} \quad \text{On a } \cos(x) + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = 0, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x) + \sin(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(k)} \quad \exp(1 + 2x) &= e \cdot e^{2x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(l)} \quad \cos(x) \times \frac{1}{1 + x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{13x^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(m)} \quad e^x \times \frac{1}{1 - 2x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x + \frac{13x^2}{2} + \frac{79x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(n)} \quad \frac{1}{x} \times \sin(2x) \times \frac{1}{1 + x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(2x - \frac{4x^3}{3}\right)(1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - 2x + \frac{2x^2}{3} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(o)} \quad \sqrt{1 + x^2} \times e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

(p) On a $\frac{\sin(x)}{x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$, d'où

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= e \cdot \exp\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2\right) + o(x^4) \\ &= e \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{45}\right) + o(x^4) \end{aligned}$$

(w) Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il faut donc considérer les développements limités normalisés :

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3) \end{aligned}$$