
Entiers, ensembles finis, dénombrement

.....

Exercice 159. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, l'entier $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

Corrigé 159. Soit $n \geq 1$. On a

$$5^n - 3^n = (5 - 3) \sum_{k=0}^{n-1} 5^k 3^{n-1-k} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} 5^k 3^{n-1-k},$$

donc $5^n - 3^n$ n'est pas premier.

.....

Exercice 160. Soient a et b deux entiers naturels de même parité. Montrer que $\frac{a^3 + b^3}{2}$ est un entier naturel non premier.

Corrigé 160. Si $b = 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2p$ et on a $\frac{a^3 + b^3}{2} = \frac{8p^3}{2} = 4p^3$, donc le nombre cherché n'est pas premier.

Le cas $a = 0$ est similaire à avant.

Si $a = b = 1$, l'entier cherché est égal à 1, donc non premier.

Supposons que $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \setminus \{(1, 1)\}$. On a $\frac{a^3 + b^3}{2} = \frac{a+b}{2}(a^2 - ab + b^2)$. Or $a + b$ est un nombre pair strictement supérieur à 2, donc $\frac{a+b}{2}$ est un entier différent de 1. Par ailleurs, $a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab \geq ab > 1$. Ainsi le nombre proposé n'est pas premier.

.....

Exercice 161. Soit n un entier naturel. Montrer que le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Corrigé 161. Dans une première solution, nous allons utiliser que pour tous entiers naturels a, b, p et n , si $a \equiv b [p]$, alors $a^n \equiv b^n [p]$. En effet, soit $(a, b, p, n) \in \mathbb{N}^4$ tel que $a \equiv b [p]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kp$. En particulier,

$$a^n = (b + kp)^n = b^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (kp)^j b^{n-j} = b^n + kp \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (kp)^{j-1} b^{n-j}, \text{ puis } a^n \equiv b^n [p].$$

Ici, on a $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \times 9^n + 4 \times 2^n$. Avec le résultat qui vient d'être démontré, puisque $9 \equiv 2 [7]$, on a $9^n \equiv 2^n [7]$. Donc $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n [7]$, puis $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \times 2^n [7]$ et enfin $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 [7]$.

Autre solution (par récurrence) : Posons u_n l'entier choisi. L'idée de l'hérédité est la suivante :

$$u_{n+1} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 9(3^{2n+1} + 2^{n+2}) - 9 \times 2^{n+2} + 2 \times 2^{n+2} = 9u_n - 7 \times 2^{n+2},$$

qui est divisible par 7.

Autre solution (avec une suite récurrente du second ordre, on étudiera cela plus tard !). On reprend u_n comme avant. On reconnaît le terme général d'une suite récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique a pour solutions 3^2 et 2, donc c'est, avec une inconnue notée r , l'équation $r^2 - (3^2 + 2)r + 3^2 \times 2 = 0$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (3^2 + 2)u_{n+1} - 3^2 \times 2u_n$$

On conclut ensuite avec une récurrence à deux pas.

.....

Exercice 162. Soit n un entier naturel non nul et q un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si q divise n , alors q ne divise pas $n + 1$. En utilisant ce résultat, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Corrigé 162. On suppose que $q|n$ et par l'absurde que $q|n+1$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ tel que $n = aq$ et $n+1 = bq$. Ainsi $(b-a)q = 1$, ce qui est impossible puisque $b-a \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}$ avec $q \neq 1$.

On suppose par l'absurde qu'il existe un nombre fini m de nombres premiers $p_1, \dots, p_m$. Considérons $N = \prod_{k=1}^m p_k$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $p_k|N$ et donc p_k ne divise pas $N+1$. Comme aucun nombre premier ne divise $N+1$, $N+1$ est un "nouveau" nombre premier, ce qui est contradictoire.

Remarque : en général, le produit des m premiers nombres premiers augmenté de 1 n'est pas un nombre premier (considérer $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 59 \times 509 \dots$)

.....
Exercice 163. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'aucun des entiers

$$n! + 2, \quad n! + 3, \quad \dots \quad n! + n$$

n'est premier. Que peut-on en déduire ?

Corrigé 163. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

$$n! + k = 1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times k \times (k+1) \times \dots \times n + k = k \times (1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times 1 \times (k+1) \times \dots \times n + 1),$$

donc $n! + k$ n'est pas premier, puisqu'il s'écrit comme un produit d'entiers différents de 1.

On obtient qu'il existe des intervalles de $\mathbf{N}$ de longueur arbitrairement grande ne contenant aucun nombre premier.