
Variables aléatoires

.....

Exercice 405. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, telle qu'il existe un nombre réel strictement positif a pour lequel :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a \binom{n}{k}}{k+1}.$$

1. Calculer a .
2. Calculer l'espérance et la variance de X . On pourra commencer par calculer $\mathbb{E}(X+1)$ et $\mathbb{E}(X(X+1))$.

Corrigé 405. 1. $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \dots, \{X = n\}$ forment un système complet d'événements, donc $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^n \frac{a \binom{n}{k}}{k+1} \\ &= a \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= \frac{a}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \frac{a}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{a}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} && \text{en posant } \ell = k+1 \\ &= \frac{a}{n+1} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} \right) - \binom{n+1}{0} \right) \\ &= \frac{a}{n+1} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} 1^\ell 1^{n+1-\ell} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{a}{n+1} ((1+1)^{n+1} - 1) \\ &= \frac{a}{n+1} (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

Donc $a = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

2. D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{k=0}^n (k+1) \mathbb{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = a 2^n.$$

Donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X + 1 - 1) = \mathbb{E}(X + 1) - 1 = a2^n - 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X(X+1)) &= \sum_{k=0}^n k(k+1)\mathbb{P}(X=k) \\
 &= a \sum_{k=0}^n \frac{kn!}{k!(n-k)!} \\
 &= a \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{k!(n-k)!} && \text{car le premier terme de la somme précédente est nul} \\
 &= a \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= an \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= an \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= an \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^\ell 1^{n-1-\ell} && \text{en posant } \ell = k-1 \\
 &= an2^{n-1}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X+1) - X) = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) = an2^{n-1} - a2^n + 1,$$

puis

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= an2^{n-1} - a2^n + 1 - a^22^{2n} + a2^{n+1} - 1 \\
 &= a2^{n-1}(n-2-a2^{n+1}+4) = a2^{n-1}(n+2-a2^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Exercice 406. Un joueur prélève n boules successivement et avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On considère la variable aléatoire X égale au plus grand des numéros des boules tirées. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$. En déduire la loi de X .

Corrigé 406. $\text{Card}(\Omega) = \underbrace{N}_{\text{choix 1re boule}} \times \cdots \times \underbrace{N}_{\text{choix } n\text{ième boule}} = N^n$ et chaque issue est équiprobable.

Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$\text{Card}(\{X \leq k\}) = \underbrace{k}_{\text{choix de la 1re boule entre 1 et } k} \times \cdots \times k = k^n,$$

donc

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \frac{k^n}{N^n} = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Notons que cette formule reste valable pour $k = 0$ puisque $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On a la réunion disjointe suivante :

$$\{X = k\} \cup \{X \leq k-1\} = \{X \leq k\}$$

donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

Finalement, $X(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

Exercice 407. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k).$$

2. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents), la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X , et calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X \geq k)$.
 (b) En déduire que $\mathbb{E}(X) = 2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Corrigé 407. 1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a la réunion disjointe $\{X \geq k\} = \{X = k\} \cup \{X \geq k+1\}$, d'où

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k (\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X \geq k+1) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{\ell=1}^n (\ell-1) \mathbb{P}(X \geq \ell) \quad \text{en posant dans la 2e somme } \ell = k+1 \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^n (k-1) \mathbb{P}(X \geq k) \quad \text{car } \begin{cases} k \mathbb{P}(X \geq k) = 0 \text{ pour } k = 0 \\ (k-1) \mathbb{P}(X \geq k) = 0 \text{ pour } k = n+1 \\ \text{(puisque } \mathbb{P}(X \geq n+1) = 0) \end{cases} \\ &= \sum_{k=1}^n (k - (k-1)) \mathbb{P}(X \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k). \end{aligned}$$

2. (a) $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après l'énoncé, en notant A_i l'événement « le joueur réussit le niveau i » pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{2}{3}, \dots, \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{2}{3}$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k)$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-2}}(A_{k-1}) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

- (b) Puisque X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$