
Exercices des vacances

Exercice facultatif. Résoudre $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x + 1 \rfloor$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Corrigé. *Analyse.* Soit $x \in \mathbf{R}$ une solution de l'équation. On a $2x - 1 - 1 < \lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor \leq x - 4$, d'où $x < -2$. De plus, $x - 4 - 1 < \lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor \leq 2x - 1$, d'où $x > -4$. Ainsi $x \in]-4; -2[$.

Synthèse. Soit $x \in]-4; -2[$. On cherche à distinguer des cas suivant les valeurs que peuvent prendre les parties entières. Par exemple, $-9 < x - 5 < \lfloor x - 4 \rfloor \leq x - 4 < -6$, d'où $\lfloor x - 4 \rfloor \in \{-8, -7\}$.

- Résolvons $\lfloor x - 4 \rfloor = -8$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -8$.
On a $\lfloor x - 4 \rfloor = -8 \iff -8 \leq x - 4 < -8 + 1 \iff -4 \leq x < -3$. De plus, $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -8 \iff -8 \leq 2x - 1 < -7 \iff -\frac{7}{2} \leq x < -3$. Ainsi les valeurs de $[-\frac{3}{2}; -3[$ sont solutions de l'équation initiale.
- Résolvons $\lfloor x - 4 \rfloor = -7$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -7$.
On a $\lfloor x - 4 \rfloor = -7 \iff -7 \leq x - 4 < -6 \iff -3 \leq x < -2$. De même, $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -7 \iff -7 \leq 2x - 1 < -6 \iff -3 \leq 2x - 1 < -\frac{5}{2}$. Ainsi les valeurs de $[-3; -\frac{5}{2}[$ sont solutions de l'équation initiale.

Finalement, l'ensemble des solutions est $[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}[$.

.....

Exercice 114. 1. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Notons g la primitive de f nulle en 0, et h la primitive de g nulle en 0. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^x (2x - 3t)f(t) dt = 3h(x) - xh'(x).$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \int_0^x (2x - 3t)f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

Corrigé 114. 1. Posons $F : x \mapsto 2x \int_0^x f(t) dt - 3 \int_0^x tf(t) dt$. Puisque $t \mapsto tf(t)$ et f sont continues, le théorème fondamental de l'analyse assure que F est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F'(x) = 2 \int_0^x f(t) dt + 2xf(x) - 3xf(x) = 2g(x) - xg'(x).$$

Ainsi, en intégrant entre 0 et $x \in \mathbf{R}$, on obtient,

$$F(x) = 2h(x) - 2h(0) - [xg(x)]_0^x + \int_0^x g(t) dt = 2h(x) - xh'(x) + h(x) = 3h(x) - xh'(x).$$

2. • *Analyse.* Soit f une solution. On reprend les notations de la question précédente, et on s'intéresse à

$$(E) : \quad -xh' + 3h = \frac{x^2}{2}$$

Les solutions homogènes de (E) sont définies par $h(x) = Cx^3$, où $C \in \mathbf{R}$.

Posons $h : x \mapsto C(x)x^3$, où $C \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est dérivable.

$$h \text{ vérifie } (E) \iff \forall x \in \mathbf{R}, -C'(x)x^4 = \frac{x^2}{2} \iff \forall x \in \mathbf{R}, C'(x) = \frac{-1}{2x^2}$$

donc une solution de (E) est définie par $y : x \mapsto \frac{x^2}{2}$. Ainsi les solutions de (E) sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto Cx^3 + \frac{x^2}{2} \end{array} : C \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ainsi il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $h : x \mapsto Cx^3 + \frac{x^2}{2}$. Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = h''(x) = 6Cx + 1$. Finalement, il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto Cx + 1$ (avec $D = 6C$).

- *Synthèse.* Soit $D \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto Dx + 1$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\int_0^x (2x - 3t)f(t) dt = \int_0^x (2Dtx + 2x - 3Dt^2 - 3t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto Dx + 1 \end{array} : D \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice 201. 1. Soit $m \in \mathbf{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$.

2. Soit $n \geq 0$. Calculer, en fonction de n ,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Corrigé 201. 1. On a $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$ si et seulement si $m \leq \sqrt{k} < m+1$, i.e. $m^2 \leq k < (m+1)^2$.

2. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} m \\ &= \sum_{m=1}^n m(2m+1) \\ &= 2 \sum_{m=1}^n m^2 + \sum_{m=1}^n m \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 203. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbf{R}$. On pose

$$B = \{|x - y| : (x, y) \in A^2\}.$$

Montrer que B admet une borne supérieure et prouver que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Corrigé 203. Notons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$. Soit $(x, y) \in A^2$. On a $m \leq x \leq M$, $m \leq y \leq M$, donc $m - M \leq x - y \leq M - m$, soit

$$|x - y| \leq M - m.$$

On déduit de cette inégalité que B est non vide (car $A \neq \emptyset$) et bornée par $M - m$, donc elle admet une borne supérieure. Avec l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sup(B) \leq M - m$$

Soit M_1 un majorant de B . Pour tout $(x, y) \in A^2$, $x - y \leq |x - y| \leq M_1$, d'où $x \leq M_1 + y$ ce qui signifie que $M_1 + y$ majore A . Ainsi,

$$\forall y \in A, M \leq M_1 + y \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in A, M - M_1 \leq y$$

ce qui signifie que $M - M_1$ minore A . Ainsi $M - M_1 \leq m$, puis $M - m \leq M_1$. Donc $M - m$ est bien le plus petit des majorants de B , d'où $\sup(B) = M - m$.