
Dérivabilité

.....

Exercice 333. On approche $(10\,001)^{\frac{1}{4}}$ par 10. Donner un majorant de l'erreur commise.

Corrigé 333. Posons $f : [10\,000; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$. On a f continue sur $[10\,000; +\infty[$, dérivable sur $]10\,000; +\infty[$ et, pour tout $x \in [10\,000; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{4} \cdot 10\,000^{-\frac{3}{4}} = 0,000\,25.$$

Finalement, l'inégalité des accroissements finis assure que

$$10\,001^{\frac{1}{4}} - 10\,000^{\frac{1}{4}} \leq 0,000\,25 \times 1$$

Remarque : $10\,001^{\frac{1}{4}} - 10 \approx 0,000\,249\,991$.

.....

Exercice 337. 1. Montrer que la fonction f définie sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0. On désigne encore par f ce prolongement par continuité.

2. Montrer que la fonction f ainsi définie sur $] -1; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On admettra que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Corrigé 337. 1. On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x}$, donc en posant $f(0) = 1$, on peut prolonger f par continuité en 0.

2. Pour tout $x \neq 1$, on a $f'(x) = \frac{x - \ln(1+x) - x \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$. Or, avec l'indication, $x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x(1+x)}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} = 1$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi le théorème de la limite de la dérivée assure que f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$, avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

.....

Exercice 339. On cherche à résoudre de manière approchée l'équation :

$$x = 1 + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (\text{E})$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 + \operatorname{Arctan}(\frac{x}{2})$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution, que nous notons a , et déterminer la partie entière de a .
3. Prouver que si u est une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n , alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|.$$

En déduire qu'une telle suite converge vers a .

4. En considérant une telle suite pour une valeur appropriée de u_0 , déterminer un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Corrigé 339. 1. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| = \frac{2}{4+x^2} \leq \frac{1}{2}$ (car $4+x^2 \geq 4$), d'où le résultat demandé.

2. Posons $g = f - \text{Id}$. On a g dérivable et $g' : x \mapsto \frac{2}{4+x^2} - 1$, d'où avec les calculs de la question précédente, $g' < 0$. Ainsi g est strictement décroissante, continue, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Donc g établit une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, et en particulier l'équation (E) admet une unique solution.

Par ailleurs, $g(1) = \text{Arctan}(\frac{1}{2}) > 0$ car $\frac{1}{2} > 0$. De plus, $g(2) = -1 + \text{Arctan}(1) = -1 + \frac{\pi}{4} < 0$. Donc $a \in]1; 2[$, puis $[a] = 1$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. $|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$ puisque f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $H_n : « |u_n - a| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - a| »$. H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a :

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}|u_0 - a| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - a|.$$

Donc H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

On en déduit, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $u_0 = a$ on a, puisque $[a] = 1$, $|u_0 - a| < 1$. La question précédente fournit alors $|u_n - a| < \frac{1}{2^n}$. Or,

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-3} \iff 2^n \geq 10^3 \iff n \geq \frac{3 \ln(10)}{\ln(2)}$$

Finalement, pour $n \geq \left\lceil \frac{3 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$, u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 342. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$xf'(x) - 2f(x) = x^4.$$

Corrigé 342. *Analyse.* Soit f une telle fonction. L'équation différentielle est en particulier vérifiée sur $\mathbf{R}_+^*$. On a alors

$$xy' - 2y = x^4 \iff y' - \frac{2}{x}y = x^3$$

Or les solutions homogènes sont de la forme $x \mapsto Cx^2$, où $C \in \mathbf{R}$. Avec la méthode de variation de la constante, on obtient qu'il existe $C_1 \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = C_1x^2 + \frac{x^4}{2}$.

De même, f vérifie l'équation différentielle sur $\mathbf{R}_-^*$, donc il existe $C_2 \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x < 0$, $f(x) = C_2x^2 + \frac{x^4}{2}$. Or f est continue en 0, et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, donc on a $f(0) = 0$.

Synthèse. Soit C_1, C_2 deux réels. Posons $f : x \mapsto \begin{cases} C_1x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C_2x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. f est dérivable sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$. Par

ailleurs, si $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = C_1x + \frac{x^3}{2} \rightarrow 0$$

donc f est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 0$. De même, on montre que $f'_g(0) = 0$. Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Enfin, on montre facilement que f vérifie l'équation différentielle.

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} C_1x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C_2x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} : (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$