Chapitre 1

Raisonnements et logique

Un étudiant en philosophie demanda à Russell quelques éclaircissements : "Prétendez-vous que de "2+2 = 5", il s'ensuit que vous êtes le Pape ? " "Oui", fit Russell. L'étudiant étant sceptique Russell[1] *proposa la démonstration suivante :*

(1) Supposons que $2 + 2 = 5$.
(2) Soustrayons 2 de chaque membre de l'identité, nous obtenons $2 = 3$.
(3) Par symétrie, $3 = 2$.
(4) Soustrayons 1 de chaque côté, il vient $2 = 1$.

Maintenant le Pape et moi sommes deux.
Puisque $2 = 1$, le Pape et moi sommes un.
Par suite je suis le Pape.

Trois logiciens entrent dans un bar. Le patron leur demande s'ils prennent tous une bière.

- *Le premier répond qu'il ne sait pas.*
- *Le deuxième répond qu'il ne sait pas.*
- *Le troisième répond oui !*

1. Notion d'assertion

1.1. Connecteurs logiques

Définition 1.

Une **assertion** est une phrase qui peut être soie vraie (V dans la suite), soit fausse (F dans la suite).

1. Bertrand RUSSELL - mathématicien britannique, philosophe (1872-1970)

Exemple 2. « 4 est pair » est une assertion (vraie).
« $1 + 1 = 3$ » est une assertion (fausse). « Comment allez-vous ? » n'est pas une assertion.

On appelle négation d'une assertion P l'assertion qui est vraie quand P est fausse, et qui est fausse quand P est vraie. La formalisation mathématique est donnée dans la définition suivante :

Définition 3.

Soit P une assertion. On appelle **négation** de P, et on note (non P), ou encore $\neg P$, l'assertion définie par la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

On peut aussi combiner des assertions à l'aide de **connecteurs logiques** binaires.

Définition 4.

La table de vérité ci-dessous définit les connecteurs logiques suivants :

- la **conjonction**, notée « et » ou « $\wedge$ » ;
- la **disjonction**, notée « ou » ou « $\vee$ » ;
- l'**implication**, notée « implique » ou « $\Longrightarrow$ » ;
- l'**équivalence**, notée « équivaut à » ou « $\Longleftrightarrow$ ».

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Exemple 5.

- (« Aurélien est un garçon » et « Elsa est un garçon ») est fausse ;
- (« Aurélien est un garçon » ou « Elsa est une fille ») est vraie ;
- (« 6 est pair » implique « 7 est impair ») est vraie ;
- (« 5 est pair » implique « 7 est impair ») est vraie ;
- (« 5 est impair » implique « 7 est pair ») est fausse ;
- (« 5 est pair » implique « le capitaine a 77 ans ») est vraie.

Si P et Q sont deux assertions ayant la même valeur de vérité, on dit qu'elles sont **synonymes**. On note alors $P \equiv Q$.

Proposition 6.

Soient P et Q deux assertions.

(a) $\neg(\neg P) \equiv P$;

(b) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$, $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ (formules de Morgan).

Démonstration.
Ces résultats sont faciles à démontrer à l'aide de tables de vérité.

(a) On a :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

donc $\neg(\neg P) \equiv P$.

(b) On a :

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

donc $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
La dernière assertion est laissée en exercice.

□

Proposition 7.

Soient P et Q des assertions. On a la synonymie :

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)\,.$$

Corollaire 8.

Soient P et Q des assertions. On a la synonymie :

$$(\neg(P \Longrightarrow Q)) \equiv (P \wedge (\neg Q))\,.$$

Démonstration.
Il faut faire une table de vérité pour démontrer la Proposition 7. Le Corollaire 8 découle directement de la proposition et des lois de Morgan. □

1.2. Quantificateurs

Définition 9.

On appelle **prédicat** un énoncé $P(x)$ qui dépend d'une variable x à l'intérieur d'un certain ensemble. Pour une valeur fixée de la variable x, $P(x)$ est une assertion et prend donc une unique valeur de vérité : Vrai ou Faux.

Soit E un ensemble. L'assertion « pour tout élément x de E, l'assertion $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\forall x \in E,\ P(x).$$

L'assertion « il existe un élément x de E telle que l'assertion $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\exists x \in E,\ P(x).$$

Dans cette assertion, il faut comprendre « il existe un élément » comme « il existe (au moins) un élément ». L'assertion « il existe un unique élément x de E telle que $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\exists! x \in E,\ P(x).$$

Si une assertion dépend de plusieurs variables, on peut être amené à utiliser plusieurs quantificateurs. Soit F un ensemble. On a les synonymies :

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ (\forall y \in F,\ P(x,y)) &\quad\equiv\quad \forall y \in F,\ (\forall x \in E,\ P(x,y)) \\ \exists x \in E,\ (\exists y \in F,\ P(x,y)) &\quad\equiv\quad \exists y \in F,\ (\exists x \in E,\ P(x,y)) \end{aligned}$$

En revanche, les assertions (A) et (B) suivantes :

$$(A) \quad \exists x \in E,\ (\forall y \in F,\ P(x,y)) \qquad (B) \quad \forall y \in F,\ (\exists x \in E,\ P(x,y))$$

ne sont pas synonymes.

Exemple 10. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Dire que la fonction est constante sur $\mathbf{R}$ s'écrit :

$$\exists c \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = c.$$

Par contre, toutes les fonctions réelles à valeurs réelles satisfont :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists c \in \mathbf{R},\ f(x) = c,$$

puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(x)$.

Proposition 11.

Soit E un ensemble et P un prédicat défini sur E. On a les synonymies :

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in E,\ P(x)) &\quad\equiv\quad \exists x \in E,\ \neg P(x) \\ \neg(\exists x \in E,\ P(x)) &\quad\equiv\quad \forall x \in E,\ \neg P(x) \end{aligned}$$

Exemple 12. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'assertion « f n'est pas constante sur $\mathbf{R}$ » s'écrit :

$$\forall c \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq c.$$

2. Quelques types de raisonnement

2.1. Raisonnement par implications

En mathématiques, les théorèmes s'écrivent souvent comme des implications : **si** certaines hypothèses sont satisfaites **alors** un certain résultat est obtenu.

Proposition 13 - Modus ponens.

Soient P et Q deux assertions.
Si $(P \Longrightarrow Q)$ et P sont vraies, alors Q est vraie

Si P est fausse alors $P \Longrightarrow Q$ sera vraie, quelle que soit la valeur de vérité de Q. Ainsi, pour démontrer $P \Longrightarrow Q$, il suffit de vérifier que lorsque P est vraie, Q l'est aussi. C'est pourquoi on lit souvent $P \Longrightarrow Q$ comme : « si P, alors Q ».

⚠ **Attention** ⚠**.** Si A et B sont deux assertions, démontrer $A \Longrightarrow B$ ne revient pas à dire que B est vraie. En particulier, le raisonnement

$$A \Longrightarrow ... \Longrightarrow B$$

ne permet pas de conclure que B est vraie. On préférera écrire à la place en français « A donc... donc B », car « A donc B » est une contraction pour : « puisque A est vraie A implique B, on a B vraie ». Pour éviter les erreurs, il est plus sage de <u>proscrire</u> l'utilisation du symbole $\Longrightarrow$.

Dans l'assertion $P \Longrightarrow Q$, Q est dite **condition nécessaire**, et P est dite **condition suffisante**. En effet, supposons que l'implication soit vraie. Alors Q est nécessairement vraie si P l'est, et il suffit que P soit vraie pour que Q le soit.

Proposition 14 - Transitivité de l'implication.

Soient P, Q et R des assertions.

$$\text{Si } P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow R \text{ sont vraies,} \quad \text{alors } P \Longrightarrow R \text{ est vraie.}$$

Remarque technique 15. Pour montrer une implication on peut utiliser une preuve directe :

1. on suppose P (et on l'écrit) ;
2. puis on démontre Q.

Exercice d'application 16. Soit n un entier. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

$\hookrightarrow$ Supposons que n est pair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. Ainsi $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Puisque $(2k^2)$ est un entier, on a bien que n^2 est pair.

2.2. Raisonnement par contraposition

Définition 17.

Soient P et Q deux assertions. On appelle **contraposée** de l'implication $P \Longrightarrow Q$, l'implication :

$$(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P).$$

Théorème 18 - Raisonnement par contraposition.

Soient P et Q deux assertions. On a la synonymie :

$$P \Longrightarrow Q \equiv (\neg Q) \Longrightarrow (\neg P).$$

Démonstration.
Il suffit de faire une table de vérité. □

◇◇
Remarque technique 19. Au lieu de montrer directement qu'une implication est vraie, il est parfois plus facile de montrer sa contraposée.

Exercice d'application 20. Soit n un entier. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

$\hookrightarrow$ La contraposée de l'implication à montrer est :

$$\text{« si } n \text{ est impair, alors } n^2 \text{ est impair ».}$$

Supposons que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Ainsi $n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$. Or $2k^2+2k \in \mathbf{Z}$, donc n^2 est impair.
Finalement, si n^2 est pair, alors n est pair.

◇◇

2.3. Raisonnement par double implication

Pour démontrer une équivalence, on peut procéder par double implication.

Proposition 21 - Raisonnement par double implication.

Soient P et Q des assertions. On a la synonymie :

$$P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P).$$

◇◇
Remarque technique 22. Pour démontrer une équivalence entre deux assertions P et Q, on peut procéder par « double implication », *i.e.* démontrer séparément $P \Longrightarrow Q$ (Q est une condition nécessaire pour P) et $Q \Longrightarrow P$ (Q est une condition suffisante pour P).

Exercice d'application 23. Soit n un entier. Démontrer que n est pair si, et seulement si n^2 est pair (*i.e.* « n est pair » équivant à « n^2 est pair »).

$\hookrightarrow$ Il suffit de reprendre les résultats obtenus aux exercices d'application 16 et 20.

◇◇

2.4. Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** repose sur l'idée qu'une assertion qui n'est pas fausse est vraie. Pour prouver une proposition P, on suppose que P est fausse et on raisonne jusqu'à trouver une contradiction (une « absurdité »). Si cette absurdité est apparue, c'est que l'hypothèse faite au départ (« P est fausse ») est fausse. La proposition P est donc vraie.

◇◇
Remarque technique 24. Le raisonnement par l'absurde est utile lorsque travailler sous l'hypothèse $\neg P$ semble plus facile que d'obtenir P directement.

Exercice d'application 25. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.

$\hookrightarrow$ Ici il paraît difficile de travailler directement, car on ne saurait « essayer » tous les couples d'entiers ! Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc $(p,q) \in (\mathbf{Z}^\star)^2$ tel que $\sqrt{2} = p/q$. On peut supposer (quitte à simplifier la fraction) que p et q n'ont pas de diviseurs communs.
On a $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair. Avec l'Exercice d'application 20, on en déduit que p est pair. Donc

il existe $r \in \mathbf{Z}$ tel que $p = 2r$.
On a $p = 2r$, d'où $2q^2 = p^2 = 4r^2$, puis $q^2 = 2r^2$. Comme avant, on en déduit que q est pair, comme p. Ceci est une contradiction, car on avait supposé que p et q n'avaient pas de diviseurs communs.
On a donc montré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

◇◇◇

◇◇◇

Remarque technique 26. Le raisonnement par l'absurde est commode pour démontrer qu'un objet n'existe pas (*i.e.* qu'un ensemble est vide).

Exercice d'application 27. Résoudre l'équation $x = x + 1$, d'inconnue réelle x.

$\hookrightarrow$ Supposons qu'il existe une solution à l'équation et notons-la x. Alors $x = x + 1$, donc $0 = 1$. Ceci est faux. Ainsi il n'existe pas de solution à l'équation.

Solution plus classique. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x = x + 1 \iff 0 = 1.$$

L'assertion « $0 = 1$ » étant fausse, l'équivalence précédente assure que « $x = x + 1$ » est fausse également. Finalement, l'équation n'a pas de solution.

◇◇◇

2.5. Raisonnement par disjonction de cas

Proposition 28 - Disjonction de cas.

Soient A, B et C trois assertions.

$$\big((A \vee B) \Longrightarrow C\big) \equiv \big((A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C)\big).$$

Démonstration.
Immédiat avec des tables de vérité. □

Corollaire 29.

Soient A et C deux assertions. On a

$$C \equiv \big((A \Longrightarrow C) \wedge (\overline{A} \Longrightarrow C)\big).$$

Démonstration.
On a $A \vee \overline{A}$ vraie, donc $A \vee \overline{A} \Longrightarrow C$ a la même valeur logique que C. On conclut avec la proposition précédente.

Exercice d'application 30. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n(n^2+1)}{2}$ est un entier naturel.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$.

- Supposons n pair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2+1)$, d'où $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.
- Supposons que n n'est pas pair, *i.e.* que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Il s'ensuit $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{(2k+1)(4k^2+4k+2)}{2} = (2k+1)(2k^2+2k+1)$, d'où $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.

On vient de montrer, par disjonction de cas, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.

◇◇

Remarque technique 31. Disjoindre des cas peut être très pratique pour résoudre une équation faisant intervenir des racines carrées. En effet, si $x \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$\forall a \in \mathbf{R}_+, \quad \sqrt{x} = a \Longleftrightarrow x = a^2 \quad \text{mais} \quad \forall a \in \mathbf{R}_-^\star, \quad \sqrt{x} = a \text{ est fausse}$$

Exercice d'application 32. Résoudre l'équation $\sqrt{17-8x} = 2x+1$ d'inconnue x réelle.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in]-\infty; \frac{17}{8}]$.

- si $x < -\frac{1}{2}$: alors $2x+1 < 0$, et puisque $\sqrt{17-8x} \geqslant 0$, $\sqrt{17-8x} = 2x+1$ est impossible : l'équation n'a pas de solutions dans $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.
- si $x \geqslant -\frac{1}{2}$: alors $2x+1 \geqslant 0$; la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, on a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{17-8x} = 2x+1 &\Longleftrightarrow 17-8x = (2x+1)^2 \\ &\Longleftrightarrow 4x^2+12x-16 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2+3x-4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -4\end{aligned}$$

Et puisque $1 \leqslant \frac{17}{8} < 4$, seul 1 est solution dans $[-\frac{1}{2}; \frac{17}{8}]$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{1\}$.

◇◇

2.6. Raisonnement par analyse/synthese

Le raisonnement par **analyse-synthèse** est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Il se déroule en deux étapes.

1. **Analyse** : l'idée est de déterminer les «candidats» solutions du problème. Pour cela, on suppose que l'on a trouvé une solution du problème et on trouve des propriétés que doit avoir cet objet, du simple fait qu'il est une solution du problème. Cela revient à déterminer des conditions nécessaires pour qu'un objet soit solution du problème posé.
2. **Synthèse** : Parmi tous les objets qui vérifient les conditions nécessaires précédentes (les «candidats solutions»), on détermine lesquels sont effectivement solutions du problème.

Exercice d'application 33. Trouver dans $\mathbf{R}$ toutes les solutions de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$.

$\hookrightarrow$ Remarquons que les termes de l'équation sont correctement définis pour tout réel x.

1. **Analyse :** soit x un nombre réel. Supposons que x vérifie l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$. Alors, en élevant chaque membre de l'égalité au carré, on obtient
$$x^2+1 = 4x^2+4x+1$$
et donc
$$3x^2+4x = 0$$
donc
$$x(3x+4) = 0$$
Donc $x = 0$ ou $x = -4/3$.
2. **Synthèse :** $\sqrt{0^2+1} = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$ donc 0 est bien solution du problème.
$\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1}$ est positif et $2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -\frac{5}{3}$ donc 1/3 n'est pas solution du problème.

Conclusion : l'unique solution de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$ est 0.

◇◇

Remarque technique 34. Très souvent, la phase d'analyse permet de déterminer des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un seul «candidat solution».

Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution si une telle solution existe, et la phase de synthèse permet de montrer soit l'existence d'une solution, soit qu'il n'y a aucune solution.

Exercice d'application 35. Montrer que toute fonction réelle f définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction g constante et d'une fonction h vérifiant $h(0)+h(1)=0$.

↪ Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$.

1. **Analyse :** Supposons qu'on ait trouvé une fonction g constante sur $\mathbf{R}$ et une fonction h vérifiant $h(0)+h(1)=0$ telles que $f=g+h$.

   Il existe alors un réel c tel que : $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x)=c$.

   Alors $f(0)+f(1) = g(0)+g(1)+h(0)+h(1) = c+c+0 = 2c$ donc $c = \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ et il n'y a qu'un seul candidat solution pour la fonction g qui est défini par :

   $$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \frac{f(0)+f(1)}{2}.$$

   Puisque $h=f-g$, le seul candidat solution pour la fonction h est défini par :

   $$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = f(x) - \frac{f(0)+f(1)}{2}.$$

   L'analyse montre donc l'unicité d'une telle décomposition, si celle-ci existe.
2. **Synthèse :**
   - La fonction g définie comme ci-dessus est bien une fonction constante.
   - Considérons la fonction h définie ci-dessus :

     $$h(0)+h(1) = f(0) - \frac{f(0)+f(1)}{2} + f(1) - \frac{f(0)+f(1)}{2} = 0.$$

   - Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x)+h(x) = \dfrac{f(0)+f(1)}{2} + f(x) - \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

     Donc le couple (g,h) de candidats solutions trouvé dans l'analyse est bien une solution du problème posé.

   Conclusion : la fonction f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction g constante et d'une fonction h vérifiant $h(0)+h(1)=0$.

◇◇

2.7. Raisonnement par récurrence

Théorème 36 - Principe de récurrence.

On introduit pour tout $n \in \mathbf{N}$ une assertion P_n. Si P_0 est vraie et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie.

Rédaction :

- on introduit P_n : « pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : ... » ;
- on vérifie P_0 ;
- on vérifie pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$:

  « Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n soit vraie.
  [...]
  Donc P_{n+1} est vraie. »
- on conclut : « le principe de récurrence permet assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie ».

Exercice d'application 37. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geqslant n^2$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $2^n \geqslant n^2$ ». Les propositions P_0, P_1 et P_2 sont vraies, mais P_3 est fausse. Les propositions P_4 et P_5 sont vraies. On conjecture que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 4$. Montrons le par récurrence.

- $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc P_4 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 4$ tel que P_n soit vraie.
  On a $2^{n+1} = 2 \times 2^n$. Or $2^n \geqslant n^2$ d'après P_n, donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. Puisque $\begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)^2 - 2 \end{array}$ est croissante, on en déduit que pour tout $n \geqslant 4$, on a $(n-1)^2 - 2 \geqslant (4-1)^2 - 2 \geqslant 0$. Ainsi $2^{n+1} \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$ et P_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$. On peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel différent de 3.

Exercice d'application 38. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 + 3n$ est pair.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $n^2 + 3n$ est pair ».

- $0^2 + 3 \times 0 = 0$ est un nombre pair, donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a

$$(n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 5n + 4 = n^2 + 3n + 2(n+2).$$

  Or $n^2 + 3n$ est pair d'après H_n, donc $(n+1)^2 + 3(n+1)$ s'écrit comme la somme de deux entiers pairs, ce qui entraîne que $(n+1)^2 + 3(n+1)$ est pair et donc que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 + 3n$ est pair.

Théorème 39 - Principe de récurrence double.

On introduit une famille d'assertions $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Si P_0 et P_1 sont vraies et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n, P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie.

Rédaction :

- on introduit P_n : « pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : ... » ;
- on vérifie P_0 et P_1 ;
- on vérifie l'implication :

  « Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies.
  [...]
  Donc P_{n+2} est vraie. »
- on conclut : « le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie ».

Exercice d'application 40. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $u_n = 2^n - 1$ ».

- $2^0 - 1 = 0$ et $2^1 - 1 = 1$, donc H_0 et H_1 sont vraies.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 3u_{n+1} - 2u_n \\ & = & 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) \\ & = & 3 \times 2^{n+1} - 3 - 2^{n+1} + 2 \\ & = & 2^{n+1}(3-1) - 1 \\ & = & 2^{n+2} - 1, \end{array}$$

  donc H_{n+2} est vraie.
- Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice d'application 41. Soit $(u_0, u_1) \in \mathbf{N}^2$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n \in \mathbf{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbf{N}$ ».

- Par hypothèse, H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.
  D'après H_n, on a $u_n \in \mathbf{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbf{N}$, donc $u_{n+2} \in \mathbf{N}$ en tant que somme de deux entiers. Par ailleurs, $u_{n+1} \in \mathbf{N}$, donc H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$.

Remarque 42. On peut de la même façon imaginer des récurrences, triples, quadruples, etc...

Théorème 43 - Principe de récurrence forte.

On introduit une famille d'assertions $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Si P_0 est vraie et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_0, P_1, ..., P_n \Rightarrow P_{n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie.

Démonstration.
On peut démontrer ce résultat par récurrence, en posant comme hypothèse $\mathcal{H}_n$: « $P_0, ..., P_n$ ». En particulier, on peut toujours faire une récurrence simple au lieu d'une récurrence forte. □

Rédaction :

- on introduit P_n : « pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : ... » ;
- on vérifie P_0 ;
- on vérifie l'implication :

  « Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $P_0, ..., P_n$ soient vraies.
  [...]
  Donc P_{n+1} est vraie. »
- on conclut : « le principe de récurrence forte assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie ».

Exercice d'application 44. Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

↪ Pour tout $n \geqslant 2$, posons H_n : « n possède un diviseur premier ».

- H_2 est vraie, puisque 2 divise 2.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $H_2, H_3, ..., H_n$ soient vraies.
  Si $n+1$ est premier, alors il possède un diviseur qui est lui-même.
  Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe $q \in \mathbf{N} \setminus \{1, n+1\}$ qui divise $n+1$. Puisque $1 < q < n+1$, il existe, d'après H_q, un nombre premier qui divise q. Ce nombre divise également $n+1$, donc H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence forte permet de conclure : tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

3. Conseils de rédaction

3.1. Utilisation des symboles logiques

Lors d'un raisonnement, il faut absolument éviter le mélange des genres : on écrit en français ou en mathématique, mais pas les deux à la fois !

Exemple 45. Il ne faut pas écrire

$$\forall (m,n) \in \mathbf{Z}^2,\ \text{la somme de } m \text{ et } n \text{ est un entier}$$

mais au choix :

1. $\forall (m,n) \in \mathbf{Z}^2,\ m+n \in \mathbf{Z}$.
2. La somme de deux entiers est un entier.

Les seuls mélanges couramment autorisés concernent les symboles $\in$, $=$, $\leqslant$, etc., comme dans « soit $x \in E$ » (qu'on devrait en toute rigueur écrire « soit x un élément de E »).

Quand on rédige un raisonnement, il est important de distinguer clairement les hypothèses, les conclusions et les rapports d'implication entre les différentes propositions (par exemple avec « donc », « alors » , « ainsi », etc.)

Exemple 46. S'il faut démontrer : $\forall x \in [0,1],\ \sqrt{1-x^2} \in [0,1]$, on n'écrira certainement pas :

$$\begin{array}{cl} 0 \leqslant x \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 & (t \longmapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbf{R}^+) \\ 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 & (t \longmapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbf{R}^+) \end{array}$$

mais plutôt : soit $x \in [0,1]$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}^+$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, on encore $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$. Mais la fonction racine carrée est aussi croissante, donc $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$. Comme voulu, $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$.

Remarque 47. Il faut faire très attention dans l'exemple précédent, la rédaction :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1,$$

ne répond pas du tout à la question. En effet, on rappelle que $\Longrightarrow$ ne signifie pas « donc » : si P et Q sont deux assertions, dire que $P \Longrightarrow Q$ est vraie n'entraîne certainement pas que Q est vraie. Pour pouvoir conclure, il faut aussi s'assurer que P est vraie (et l'écrire explicitement).

3.2. Introduction des variables

Lorsqu'on souhaite désigner un objet mathématique (nombres, fonctions...) par une lettre, cette correspondance doit être **explicitement déclarée**. Notons E l'ensemble des élèves de la classe. Si on veut travailler avec un élève, on peut le désigner par x. On écrira :

« Soit x un élève » ou « Soit $x \in E$ »

Exemple 48. Dérivation de la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^x$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
Soit x un réel. On a $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$.

◇◇

Remarque technique 49. Introduire ses notations avec soin permet souvent de bien commencer un raisonnement. Pour toute question de la forme : « montrer que pour tout $x \in E$, ... », la réponse devra commencer par « soit $x \in E$ ».

Exercice d'application 50. Montrer que toute fonction réelle croissante définie sur $\mathbf{R}$ possède une limite en $+\infty$.

$\hookrightarrow$ On peut commencer par traduire l'énoncé au moyen de quantificateurs : « pour toute fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, si f est croissante, alors $\lim\limits_{+\infty} f$ existe ».
La réponse devra donc commencer par : « Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est croissante. Montrons que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe. [...] »

◇◇

◇◇

Remarque technique 51. Pour répondre à une question de la forme « montrer qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que... », il suffit de déterminer une valeur $x \in \mathbf{R}$ convenable. La réponse pourra commencer par : « on pose $x = ...$ ».

Exercice d'application 52. Montrer que l'assertion suivante est vraie :

$$\exists (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x + y \in \mathbf{Z} \wedge x \notin \mathbf{Z} \wedge y \notin \mathbf{Z}$$

$\hookrightarrow$ On pose $x = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. On a $x + y \in \mathbf{Z}$, $x \notin \mathbf{Z}$ et $y \notin \mathbf{Z}$.

◇◇

Parfois, lorsqu'une même expression lourde apparaît souvent, il peut être utile d'introduire une variable. Par exemple, si dans un calcul on utilise souvent $\dfrac{\sqrt{n_0}+1}{\ln(n^0+7)}$ (où n_0 a déjà été défini), on peut introduire une variable : « on pose $K = \dfrac{\sqrt{n_0}+1}{\ln(n^0+7)}$ » ou « on note K le réel $\dfrac{\sqrt{n_0}+1}{\ln(n_0+7)}$ ». Il faut toutefois faire attention à ne pas introduire trop de variables inutiles, qui peuvent alourdir inutilement la rédaction.

Exemple 53. On veut résoudre l'équation $x^2 + 3x - 2$ d'inconnue réelle x.

- La rédaction suivante n'est pas acceptable :

  « $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17$, donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. »

  En effet, a, b, c et Δ n'ont pas été introduites, et il n'est pas écrit à quoi correspondent x_1 et x_2.
- La rédaction suivante est correcte, mais très maladroite :

  « L'équation $x^3+3x-2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ peut s'écrire $ax^2+bx+c = 0$, avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = -2$. Son discriminant Δ vaut alors : $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times1\times(-2) = 17$. Posons $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. L'équation étudiée possède deux racines distinctes x_1 et x_2. »
- La rédaction suivante est la meilleure :

  « L'équation $x^3+3x-2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ a pour discriminant $3^2-4\times1\times(-2) = 17$. Ainsi l'équation étudiée possède deux racines distinctes $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. »

4. Quelques formules fondamentales

4.1. Utilisation du symbole somme

Définition 54.

Soit I un ensemble non vide. On appelle **famille de nombres complexes indexée par** I une application $a : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ i & \longmapsto & a_i \end{array}$. On la note $(a_i)_{i \in I}$. Pour $i \in I$, on dit que a_i est l'élément d'indice i.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble fini I. Si $I \neq \varnothing$, on note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Si $I = \varnothing$, on convient que $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Exemple 55. Notons $I = \{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit\}$. Si $a_\clubsuit = 0$, $a_\blacklozenge = 1$, $a_\heartsuit = 2$ et $a_\spadesuit = 3$, alors $\sum_{i\in I} a_i = a_\clubsuit + a_\blacklozenge + a_\heartsuit + a_\spadesuit = 0+1+2+3 = 6$.

Pour $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ avec $m \leqslant n$, si $I = [\![m,n]\!] = \{m, m+1, ..., n\}$, on préfère utiliser la notation $\sum_{i=m}^{n} a_i$.

Exemple 56. $\sum_{k=2}^{5} (-1)^k k^2 = (-1)^2 \times 2^2 + (-1)^3 \times 3^2 + (-1)^4 \times 4^2 + (-1)^5 \times 5^2 = -14$.

Proposition 57.

Soient m et n deux entiers naturels avec $m \leqslant n$. Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. On a :

1. $\sum_{k=m}^{n} \lambda = \lambda(n-m+1)$.
2. **Linéarité de la sommation.** $\sum_{i=m}^{n} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \lambda \sum_{i=m}^{n} b_i$.
3. **Relation de Chasles.** $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Démonstration.
1. Il suffit de remarquer qu'il y a $n-m+1$ entiers dans $[\![n,m]\!]$.
2. Une simple récurrence permet de conclure.
3. Une simple récurrence permet de conclure. □

Proposition 58 - Sommes télescopiques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0.$$

□

Exercice d'application 59. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Michel CHASLES - mathématicien français (1793-1880)

$\hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Exercice d'application 60. Soit $(a,n)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{N}^\star$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$.

$\hookrightarrow$ On remarque que pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$,

$$\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{a+k+1-(a+k)}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}\right)=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+n}.$$

Proposition 61 - Ré-indiciation.

Soit n, m et n_0 trois nombres entiers. Soit $(a_i)_{i\in[\![n,m]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=n}^{m}a_i=\sum_{j=n+n_0}^{m+n_0}a_{j-n_0}.$$

Remarque 62. Il est inutile d'apprendre la formule précédente, mais il faut savoir la retrouver. On a posé $j=i+n_0$, donc on a formellement remplacer tous les « i » par « $j-n_0$ ». Par ailleurs, dans la somme de gauche $n\leqslant i\leqslant m$ donc $n+n_0\leqslant j\leqslant m+n_0$ et l'on retrouve les indices de début et de fin de la somme de droite.

Remarque technique 63. Les ré-indiciations permettent de rédiger plus soigneusement les simplifications de sommes télescopiques (sans points de suspension)

Exercice d'application 64. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

$\hookrightarrow$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} && \text{on a posé dans la deuxième somme } j=k+1\\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\\ &= 1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Soit $(n,p)\in\mathbf{N}^2$. Si $I=[\![0,n]\!]\times[\![0,p]\!]$, alors, pour toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ de nombres complexes, on note :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant p}}a_{i,j}=\sum_{(i,j)\in I}a_{i,j}.$$

Proposition 65.

Soit n et p deux entiers strictement positifs et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) \qquad \text{découpage sur les lignes}$$
$$= \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) \qquad \text{découpage sur les colonnes}$$

Exercice d'application 66. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$. On admettra que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni+\sum_{j=1}^{n} j\right)\\ &= n\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+n\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\\ &= 2n\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\\ &= 2n\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $(n,p)\in(\mathbf{N}^\star)^2$, $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\mathbf{C}^n$ et $(b_j)_{j\in[\![1,p]\!]}\in\mathbf{C}^p$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j.$$

Soit $E = \{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$, $E' = \{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \mid 1\leqslant i< j\leqslant n\}$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note

$$\sum_{(i,j)\in E} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{(i,j)\in E'} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j}$$

Proposition 67.

Soit n un entier strictement positif et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) \quad \text{découpage sur les lignes}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) \qquad\qquad = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right) \quad \text{découpage sur les colonnes}$$

Exercice d'application 68. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, simplifier $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i)$.

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} (j-i) \right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left(j(j-1) - \sum_{i=1}^{j-1} i \right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left(j(j-1) - \frac{j(j-1)}{2} \right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{j^2 - j}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} j \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{2n-2}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

4.2. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique

Proposition 69 - Somme des premiers entiers.

Soit $(n, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.
On peut le démontrer par récurrence. Nous préférons ici une approche utilisant une astuce attribuée à Gauss (alors âgé de 10 ans). Notons S_n la somme recherchée. On a :

$$S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} (k + n - k) = n(n+1),$$

donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

Corollaire 70.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $(m,n)\in\mathbf{N}^2$, avec $m\leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2}.$$

Démonstration.
Soit $(m,n)\in\mathbf{N}^2$, avec $m\leqslant n$. Pour tout $k\in[\![m,n]\!]$, $u_k=u_m+(k-m)r$, donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} u_k &= (n-m+1)u_m + r\sum_{k=m}^{n}(k-m)\\
&= (n-m+1)u_m + r\sum_{k=0}^{n-m}k\\
&= (n-m+1)u_m + r\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\\
&= \frac{n-m+1}{2}(u_m+u_m+(n-m)r)\\
&= \frac{n-m+1}{2}(u_m+u_n).
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 71. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

$\hookrightarrow$ La somme recherchée s'écrit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n-1}k+n=n(n-1)+n=n^2$.

Exercice d'application 72. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{101}\frac{2k-1}{7}$.

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{101}\frac{2k-1}{7} &= \frac{2\left(\sum_{k=0}^{101}k\right)-\left(\sum_{k=0}^{101}1\right)}{7}.\\
&= \frac{2\left(\sum_{k=0}^{101}k\right)}{7}-\frac{102}{7}\\
&= \frac{2\left(\frac{100\times101}{2}\right)}{7}-\frac{102}{7}\\
&= \frac{10100}{7}-\frac{102}{7}\\
&= \frac{9998}{7}
\end{aligned}$$

Proposition 73.

Soit $(n,q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{C}$. On a :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k & = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1\\
& = n+1 & \text{si } q=1
\end{array}\right.$$

Démonstration.
Si $q = 1$, le résultat est évident.
Supposons $q \neq 1$. Notons S_n la somme recherchée. On a :

$$qS_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = S_n - 1 + q^{n+1},$$

d'où $S_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$. □

Corollaire 74.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

Démonstration.
Soit $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ avec $m \leqslant n$. On a :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=0}^{n-m} q^k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

□

Exercice d'application 75. Soit $(x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}$.

$\hookrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{x})^k$.

Si $x = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = n+1$.

Si $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{x}}$.

4.3. Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 76.

Soit $(a,b,n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$. On a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p} &= \sum_{p=0}^{n-1} a^{p+1} b^{n-1-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p} \\ &= \sum_{p=1}^{n} a^p b^{n-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p} \\ &= a^n b^0 - a^0 b^{n+0}\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 77. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$.

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$;
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Exercice d'application 78. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la limite en 1 de $f : x \longmapsto \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R} \backslash \{1\}$.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k},$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) = n$.

4.4. Formule du binôme de Newton

Définition 79.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle **factorielle** n et on note $n!$ le nombre

$$\begin{cases} n! & = & 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n & \text{si } n \geqslant 1 \\ & = & 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Exemple 80. $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Proposition 81.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)! = (n+1)n!$$

Le nombre $n!$ a une signification combinatoire : c'est l'ensemble des *permutations* ou des *bijections* sur un ensemble à n éléments (nous verrons plus tard en détail ce que cela signifie précisément). C'est donc notamment le nombre de façon d'« ordonner » n objets.

Exemple 82. Considérons l'ensemble $\{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit\}$. Les façons de ranger les éléments de cet ensemble sont : $(\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit)$, $(\clubsuit, \heartsuit, \blacklozenge)$, $(\blacklozenge, \clubsuit, \heartsuit)$, $(\blacklozenge, \heartsuit, \clubsuit)$, $(\heartsuit, \blacklozenge, \clubsuit)$ et $(\heartsuit, \clubsuit, \blacklozenge)$. Il y a donc bien $3! = 6$ façons de ranger ces trois éléments.

Définition 83.

Soit $(n, p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. Le **coefficient binomial** « p parmi n », noté $\dbinom{n}{p}$, est défini par :

$$\begin{cases} \dbinom{n}{p} & = & \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!] \\ & = & 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le nombre $\binom{n}{p}$ a une aussi une signification combinatoire : c'est le nombres de façon de choisir p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple 84. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$ et $\displaystyle\binom{n}{1} = n$.

Soit $(n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. Pour calculer « à la main » des coefficient binomiaux lorsque p n'est pas trop grand, on peut simplifier :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}.$$

Exemple 85. $\displaystyle\binom{21}{2} = \frac{21 \times 20}{2} = 210.$

Proposition 86 - Symétrie.

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration.
Si $p \notin [\![0,n]\!]$, alors l'égalité de la proposition s'écrit $0 = 0$.
Supposons $p \in [\![0,n]\!]$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$

Finalement, pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. □

Proposition 87 - Formule du capitaine.

Soit $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration.
Si $p = n$, l'égalité de la proposition s'écrit $1 = 1 \times 1$.
Si $p \notin [\![0,n]\!]$, l'égalité s'écrit $0 = \dfrac{n}{p} \times 0$.
Supposons $p \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Finalement, pour tout $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$. □

Remarque 88. Nous expliquerons un peu plus tard dans l'année pourquoi cette formule porte parfois le nom de « formule du capitaine ».

Proposition 89 - Formule de Pascal [2].

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

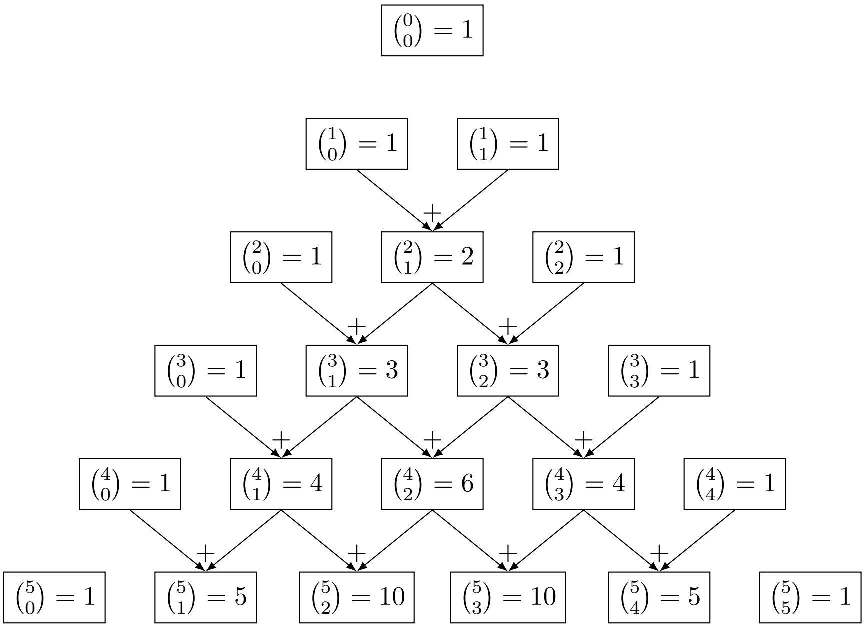
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Démonstration.
Si $p = n$, l'égalité de la proposition s'écrit $1 + 0 = 1$.
Si $p \notin [\![0, n]\!]$, l'égalité de la proposition s'écrit $0 + 0 = 0$.
Supposons $p \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Finalement, pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. □

La formule de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de « proches en proches », à l'aide du triangle de Pascal :



Par exemple, on lit sur le triangle que $\binom{5}{3}$ est égal à 10.

Corollaire 90.

Un coefficient binomial est un nombre entier naturel.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel ».

- $\binom{0}{0} = 1$, donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.
  Soit $p \in [\![1, n+1]\!]$. On a, avec la formule de Pascal, $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$. Or, d'après H_n, $\binom{n}{p} \in \mathbf{N}$ et $\binom{n}{p-1} \in \mathbf{N}$, donc $\binom{n+1}{p} \in \mathbf{N}$ en tant que somme de deux entiers naturels.
  Par ailleurs, $\binom{n+1}{0} = 1$ est un entier naturel. Ainsi H_{n+1} est vérifiée.
- Le principe de récurrence permet de conclure : un coefficient binomial est un nombre entier naturel. □

Proposition 91 - Formule du binôme de Newton[3].

Soit $(a, b, n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ ».

- On a : $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

  Ainsi H_{n+1} est vraie.

- Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $(n, a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}^2$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. □

Exemple 92. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Exemple 93. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (*voir exercices*)

Exercice d'application 94. Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

$\hookrightarrow$ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La Proposition 87 assure que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$