

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

 *Es mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets.*

Henri Poincaré¹

1. Parties de $\mathbf{R}$

1.1. Inégalités dans $\mathbf{R}$

Définition 1.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On dit que a est **inférieur à** b , et on note $a \leq b$, si et seulement si $b - a \in \mathbf{R}_+$.

Remarque technique 2. Pour établir des inégalités ou résoudre des inéquations, on se ramène donc souvent à une étude de signe.

Exercice d'application 3. Résoudre l'inéquation $x^2 \leq x$ d'inconnue réelle x .

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x^2 \leq x \iff x(x-1) \leq 0 \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[0, 1]$.

On admet les propositions suivantes.

1. Henri POINCARÉ - mathématicien français (1854-1912) ; ses travaux sont considérables, et il a même donné son nom à un lycée dans le coin ☺

Proposition 4 - $\leq$ est une relation d'ordre totale.

La relation $\leq$ satisfait les propriétés suivantes.

- **Réflexivité.** $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x \leq x.$
- **Antisymétrie.** $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y.$
- **Transitivité.** $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z.$

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Proposition 5 - Somme d'inégalités.

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbf{R}^2, \quad (x \leq y \wedge x' \leq y') \implies x + x' \leq y + y'.$$

Proposition 6 - Produit d'inégalité à membres positifs.

$$\forall (x, y, z, t) \in (\mathbf{R}_+)^4, \quad (x \leq y \wedge z \leq t) \implies x \cdot z \leq y \cdot t.$$

Proposition 7 - Multiplication par un réel dans une inégalité.

$$\forall (a, x, y) \in \mathbf{R}^3, \quad x \leq y \implies \begin{cases} ax \leq ay & \text{si } a \in \mathbf{R}_+ \\ ax \geq ay & \text{si } a \in \mathbf{R}_- \end{cases}.$$

1.2. Intervalles de réels

Définition 8.

On dit qu'une partie I de $\mathbf{R}$ est un **intervalle** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$, on a :

$$\{z \in \mathbf{R}, \quad x < z < y\} \subset I.$$

On peut aussi écrire la Définition 8 d'une autre façon :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in I^2 \implies [\forall z \in \mathbf{R}, \quad x < y < y \implies I].$$

Il existe dix formes d'intervalles. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a \leq b$:

L'intervalle noté...	... est l'ensemble des réels x tels que...	Il est représenté sur une droite graduée par :	Intervalle...
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$		fermé
$]a; b[$	$a < x < b$		ouvert
$[a; b[$	$a \leq x < b$		semi-ouvert
$]a; b]$	$a < x \leq b$		semi-ouvert
$[a; +\infty[$	$a \leq x$		fermé
$]a; +\infty[$	$a < x$		ouvert
$] - \infty; b]$	$x \leq b$		fermé
$] - \infty; b[$	$x < b$		fermé
$\emptyset$	Aucun réel		ouvert et fermé
$\mathbf{R} =] - \infty; +\infty[$	Tous les réels		ouvert et fermé

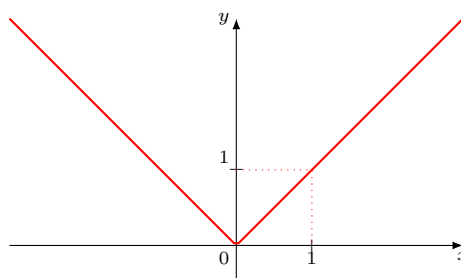
Exemple 9. • $[0, 1[\cup]1, 3]$ n'est pas un intervalle ;
• les ensembles d'entiers $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, l'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$ ne sont pas des intervalles.

1.3. Valeur absolue d'un réel

Définition 10.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **valeur absolue** de x , et on note $|x|$, le réel $\max\{-x, x\}$.

Graphes de la fonction valeur absolue (définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto |x|$)



Proposition 11.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

Démonstration.

On rappelle que la racine carrée d'un nombre $a \in \mathbf{R}_+$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a . Soit $x \in \mathbf{R}$. Par définition de la racine carrée, on a $(\sqrt{x^2})^2 = x^2$, puis

$$(\sqrt{x^2} - x)(\sqrt{x^2} + x) = 0$$

Ainsi $\sqrt{x^2} \in \{-x, x\}$. Sachant que $\sqrt{x^2}$ est un nombre positif, on conclut que $\sqrt{x^2} = \max\{-x, x\} = |x|$. $\square$

Exemple 12. $\sqrt{3^2} = |3| = 3$ et $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Proposition 13.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| \geq 0$;
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = |-x|$;
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0$;
4. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
5. $\forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$, donc $x \geq -x$, puis $\max\{-x, x\} = x$. Ainsi $|x| \geq 0$.

Si $x \leq 0$, $-x \geq 0$, donc $-x \geq x$, puis $\max\{-x, x\} = -x$, donc $|x| \geq 0$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. $|x| = \max\{-x, x\} = \max\{(-x), -(-x)\} = |-x|$.

3. On remarque que $|0| = 0$.

Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| = 0$. On a $\max\{x, -x\} = 0$, donc $x \leq 0$ et $-x \leq 0$, ce qui entraîne $x = 0$.

4. On peut distinguer quatre cas.

(a) Si $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, alors $|xy| = xy$, $|x| = x$ et $|y| = y$.

(b) Si $(x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-$, alors $|xy| = -xy$, $|x| = x$ et $|y| = -y$.

(c) Les autres cas sont similaires.

5. La preuve est similaire à celle du point précédent. $\square$

Proposition 14 - Inégalités triangulaires.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- $\begin{cases} x \leq \max\{-x, x\} \\ y \leq \max\{-y, y\} \end{cases}$, donc $x + y \leq |x| + |y|$.
- $\begin{cases} -x \leq \max\{-x, x\} \\ -y \leq \max\{-y, y\} \end{cases}$, donc $-(x + y) \leq |x| + |y|$.

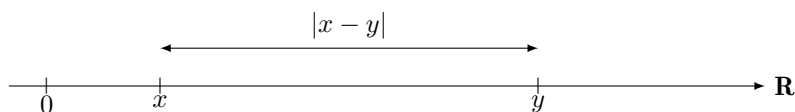
Finalement, $\max\{(x + y), -(x + y)\} \leq |x| + |y|$, i.e. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- Puisque $(x + y, -x) \in \mathbf{R}^2$, on obtient avec le point précédent $|y| \leq |x + y| + |-x|$, puis $|y| - |x| \leq |x + y|$.
De même, puisque $(x + y, -y) \in \mathbf{R}^2$, $|x| - |y| \leq |x + y|$.
Finalement, $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. □

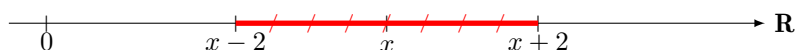
Définition 15.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On appelle **distance** entre x et y le nombre $|x - y|$.

On peut interpréter géométriquement la distance entre x et y en représentant la droite des réels :



Sur la droite ci-dessous, où $x \in \mathbf{R}$, on a coloré l'ensemble $\{y \in \mathbf{R}, |x - y| \leq 2\}$, qui est aussi égal à l'ensemble $\{y \in \mathbf{R}, x - 2 \leq y \leq x + 2\}$.



1.4. Parties bornées de $\mathbf{R}$

Définition 16.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$.

- Un nombre M est un **majorant** de A si tout élément de A est inférieur à M , *i.e.*

$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$

- Un nombre m est un **minorant** de A si tout élément de A est supérieur à m , *i.e.*

$$\forall x \in A, \quad x \geq m.$$

On dit que A est **majorée** (resp. **minorée**) si elle admet un majorant (resp. minorant).

On dit que A est **bornée** si et elle majorée et minorée.

Exemple 17. Considérons l'intervalle $A = [0, 1[$. Le nombre 1 est un majorant de A , ainsi que le nombre 3. Le nombre 0 est un minorant de A , ainsi que le nombre -3 .

Exercice d'application 18. Montrer que l'intervalle $B = [1, +\infty[$ n'est pas majoré.

$\hookrightarrow$ Dire que B est majoré s'écrit :

$$\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in B, \quad x \leq M.$$

Montrons la négation de cette assertion, qui s'écrit :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists x \in B, \quad x > M.$$

Soit $M \in \mathbf{R}$. Si $M < 1$, le résultat est immédiat puisque $1 \in B$.

Si $M \geq 1$, alors $M + 1 > M$ et $M + 1 \in B$.

Proposition 19.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$. A est bornée si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbf{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad |x| \leq \mu.$$

Démonstration. • Supposons qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leq \mu$. Soit $x \in A$. Alors $-\mu \leq x \leq \mu$. Finalement A est bornée.

- Supposons A bornée. Alors il existe $(m, M) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in A$, $m \leq x \leq M$. On a $x \geq m$, donc $-x \leq -m$. En particulier, $|x| = \max(-x, x) \leq \max(M, -m)$. Donc $\mu = \max(M, -m)$ répond à la question. $\square$

Définition 20.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$.

On dit qu'un nombre réel M est le **maximum** de A si M est un majorant et si $M \in A$.

On dit qu'un nombre réel m est le **minimum** de A si m est un minorant et si $M \in A$.

Démonstration (Unicité des extrema).

Soient M et M' deux maxima de A . Puisque $M' \in A$ et M est un majorant de A , $M' \leq M$. Puisque $M \in A$ et M' est un majorant de A , $M \leq M'$. Donc $M = M'$.

On peut montrer de manière similaire qu'il y a au plus un minimum de A . $\square$

Exemple 21. 0 est le minimum de $\mathbf{N}$.

Exercice d'application 22. Démontrer que $[0; 1[$ n'admet pas de maximum.

$\hookrightarrow$ Supposons que $[0; 1[$ admet un maximum, qu'on note M . Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq M$ puis, par passage à la limite, $1 \leq M$, ce qui contredit $M \in [0, 1[$. Finalement $[0, 1[$ n'admet pas de maximum.

Remarque technique 23. Pour montrer qu'un élément donné est un maximum (resp. minimum) d'un ensemble, on montre qu'il est un majorant (resp. minorant) puis qu'il est un élément de cet ensemble.

Exercice d'application 24. On considère la partie $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} : (m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}$ de $\mathbf{R}$.

1. A est minorée mais n'admet pas de minium.
2. Montrer que le maximum de A est $1/4$.

$\hookrightarrow$

1. Soit $(m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Puisque $m \geq 0$ et $n \geq 0$, on a $\frac{mn}{(m+n)^2} \geq 0$, donc A est minorée par 0. On suppose qu'il existe un minimum a de A . On a en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a \leq \frac{n}{(1+n)^2}$ puis, par passage à la limite, $a \leq 0$. Or 0 minore A , donc $a \geq 0$, puis $a = 0$. On en déduit $mn = 0$, ce qui est absurde. Donc A n'a pas de minium.
2. Soit $(m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2},$$

donc $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$, ce qui signifie que $\frac{1}{4}$ est un majorant de A .

Par ailleurs, $\frac{1^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{4} \in A$.

Finalement $\frac{1}{4}$ est le maximum de A .

Définition 29.

Soit $(f, g) \in (\mathbf{R}^E)^2$.

- La **somme** de f et g est la fonction définie par $f + g : E \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto f(x) + g(x)$$
- Le **produit** de f et g est la fonction définie par $fg : E \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto f(x)g(x)$$

Il faut être très vigilant lorsqu'on manipule un produit de fonctions. Toute situation conduisant à l'équation $fg = 0$, où f et g sont deux fonctions réelles d'une variable réelle, est délicate.

Exemple 30. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ tel que $f^2 = g^2$. Il ne faut pas croire que $f = g$ ou $f = -g$ (conclusion qui serait par exemple valable si f et g étaient des nombres réels). En effet, comme $f^2 = g^2$, on sait que $f^2 - g^2 = 0$, i.e. $(f - g)(f + g) = 0$. Arrivé à ce point, on ne peut plus rien dire. Par exemple, les fonction $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto |x|$ vérifient $f^2 = g^2$, mais on n'a pas la relation $f = g$ ou $f = -g$.

Définition 31.

Soient E, F et G trois sous-ensembles de $\mathbf{R}$, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On appelle **fonction composée** de f par g , on note $g \circ f$, la fonction $g \circ f : E \longrightarrow G$

$$x \longmapsto g(f(x))$$

Exemple 32. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$. On a $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.

Soit $(f, g) \in (E^E)^2$. On n'a pas en général la relation $f \circ g = g \circ f$.

Exemple 33. Notons $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors $f \circ g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et

$$x \longmapsto x + 1 \qquad x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto x^2 + 1$$

 $g \circ f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Ces composées sont distinctes puisque $f \circ g(1) \neq g \circ f(1)$.

$$x \longmapsto (x + 1)^2$$

2.2. Courbe représentative d'une fonction

Définition 34.

Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle à valeurs réelles. On rappelle que le graphe de f est la partie de $\mathbf{R}^2$:

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)), \quad x \in E\}.$$

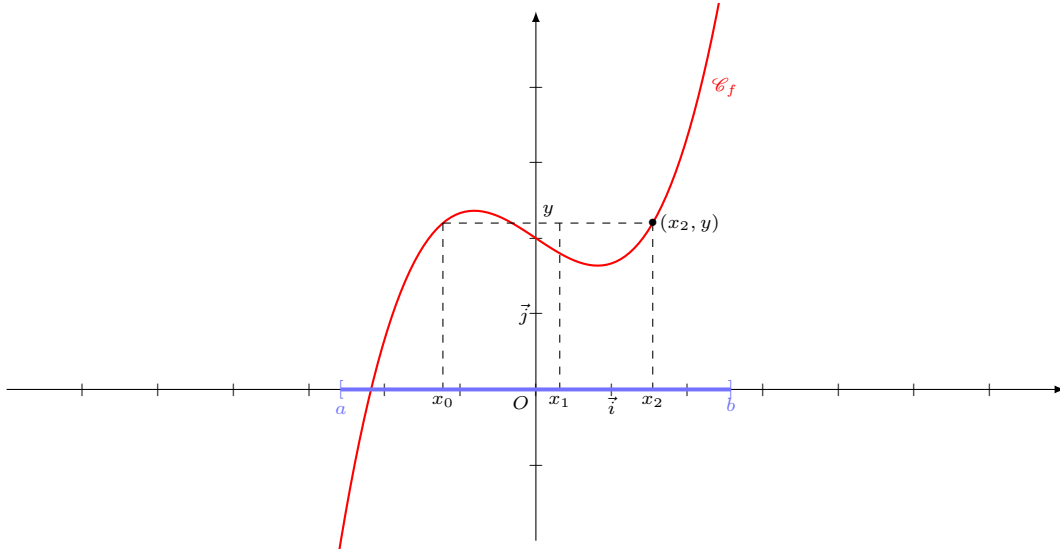
Cet ensemble peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \in E \wedge y = f(x)\}.$$

La représentation de $\mathcal{G}_f$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est appelée **courbe représentative** de la fonction.

Dans la suite, on confondra graphe et courbe représentative.

Exemple 35. On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{G}_f$ d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$. Les antécédents x_0, x_1 et x_2 d'une valeur de y apparaissent également.



Proposition 36.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe dans un repère orthonormé. Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $a\vec{j}$.
2. Le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
3. Le graphe de $x \mapsto f(a - x)$ est le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $x = a/2$.
4. Le graphe de $x \mapsto f(ax)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale d'axe (Oy) et de rapport $1/a$ (ce qui signifie que les coordonnées des points du graphe de $x \mapsto f(ax)$ sont les images par $(x, y) \mapsto (x/a, y)$ des coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$; autrement, c'est l'application qui à tout point $M(x, y)$ du plan associe le point $M'(\frac{x}{a}, y)$).
5. Le graphe de $x \mapsto af(x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport a (ce qui signifie que les coordonnées des points du graphe de $x \mapsto f(ax)$ sont les images par $(x, y) \mapsto (x, ay)$ des coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$).

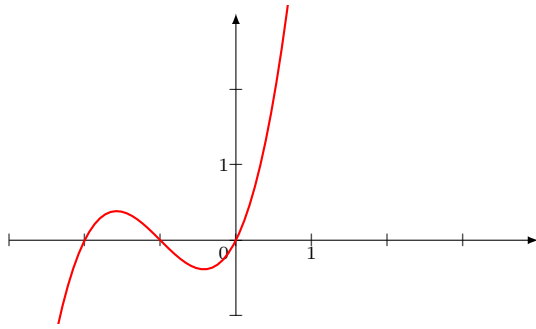
Démonstration.

On en démontre que la point n°2. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . Notons $\tilde{f} : x \mapsto f(x + a)$ et $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ la courbe représentative de cette fonction dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

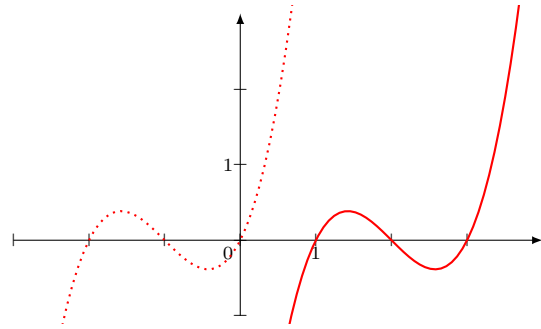
$$\begin{array}{ll}
 M \in \mathcal{C}_f & \text{ssi } y = f(x) \\
 & \text{ssi } y = f(x + a - a) \\
 & \text{ssi } y = \tilde{f}(x - a) \\
 & \text{ssi le point de coordonnées } (x - a, y) \text{ appartient à } \mathcal{C}_{\tilde{f}} \\
 & \text{ssi } M - a\vec{i} \in \mathcal{C}_{\tilde{f}}.
 \end{array}$$

□

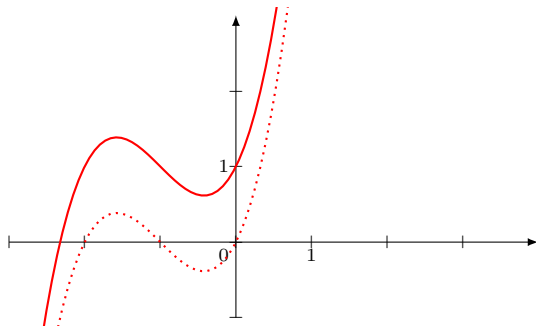
Graphes de $f : x \mapsto x(x+1)(x+2)$



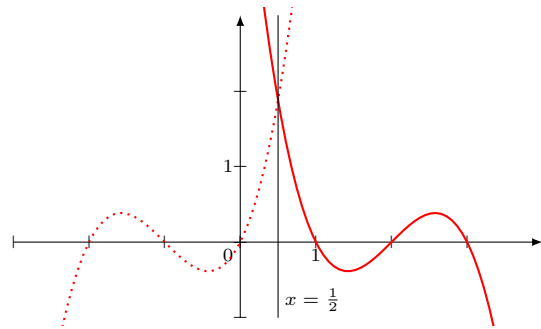
Graphes de $f : x \mapsto f(x-3)$



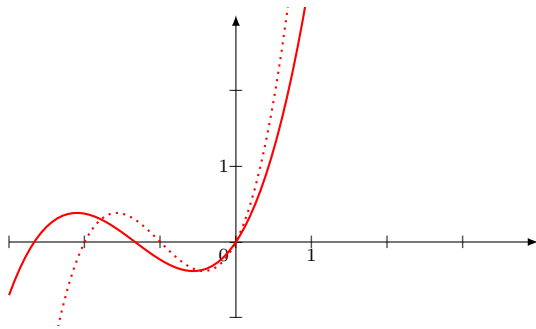
Graphes de $f : x \mapsto f(x) + 1$



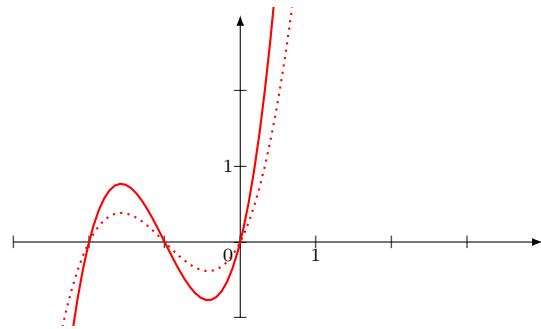
Graphes de $f : x \mapsto f(1-x)$



Graphes de $f : x \mapsto f(3x/4)$



Graphes de $f : x \mapsto 2f(x)$



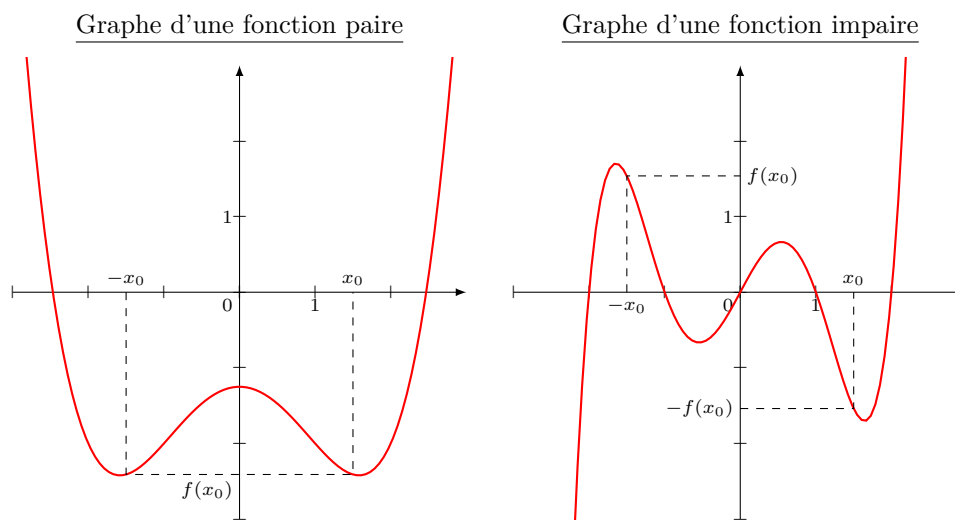
2.3. Parité et périodicité

Définition 37.

Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite :

- **paire** si pour tout élément x de E , $-x$ est également dans E et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout élément x de E , $-x$ est également dans E et $f(-x) = -f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celui d'une fonction impaire est invariant par la symétrie de centre O .



Exemple 38. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 3 - \cos(x)$ est paire.

Remarque technique 39.

Soit, pour $a > 0$, une fonction impaire $f :]-a, a[\rightarrow \mathbf{R}$. Alors $f(0) = 0$ (en effet, $f(-0) = -f(0)$, d'où $2f(0) = 0$ puis $f(0) = 0$). Cette propriété peut être utile pour démontrer rapidement qu'une fonction n'est pas impaire.

Exercice d'application 40. Etudier la parité et l'imparité de $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $f(-x) - f(x) = (-x)^2 - x + 1 - (x^2 + x + 1) = -2x$, donc f n'est pas paire. De plus, $f(0) = 1$ donc f n'est pas impaire.

⚠ Attention ⚠. Dire qu'une fonction est paire (resp. impaire) n'entraîne pas qu'elle n'est pas impaire (resp. paire). En effet, la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Les propriétés de symétrie précédentes permettent de réduire le domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire à $\mathbf{R}_+$.

On a plus généralement le résultat suivant.

Remarque technique 41. S'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $2a - x$ soit dans E et $f(2a - x) = f(x)$, alors le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$. De même, s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(2a - x) = -f(x)$, alors le graphe de f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(a, 0)$.

Exercice d'application 42. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Pour tout réel t

$$t \mapsto \ln \left(\frac{t+1}{t-4} \right)$$

où cela a un sens, calculer $f(3 - t)$. Préciser alors un domaine d'étude possible pour la fonction f .

$\hookrightarrow$ La fonction f est définie sur $] -\infty, -1[\cup]4, +\infty[$. Pour tout réel t de cette union d'intervalles, on remarque que $f(3 - t) = -f(t)$. Il s'ensuit que le graphe de f , tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, présente un centre de symétrie au point de coordonnées $(3/2, 0)$. On se propose donc d'étudier la restriction de la fonction f sur $]4, +\infty[$.

Définition 43.

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$. Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **T -périodique** si pour tout élément x de E , $x + T$ est également dans E et $f(x + T) = f(x)$. Le cas échéant, T est appelé une période de f .

Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **périodique** s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f est T -périodique.

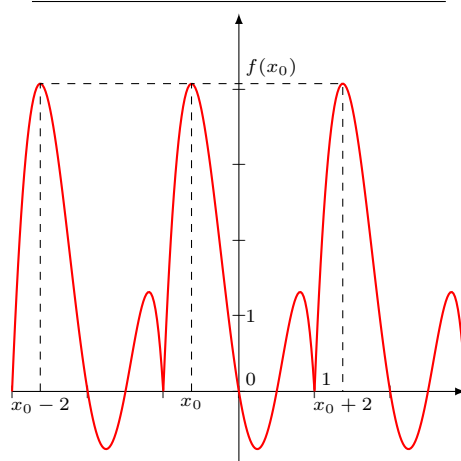
Exemple 44.

- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques. La fonction $\tan$ est π -périodique.
- La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto \sin(2x)$ est π -périodique.

On peut montrer qu'une fonction non constante, périodique et continue admet une plus petite période strictement positive. Ce point est évidemment faux pour les fonctions constantes. On peut aussi trouver des contre-exemples parmi les fonctions non continues. Ainsi, l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui associe 0 à chaque irrationnel et 1 à chaque rationnel est périodique de période n'importe quel élément de $\mathbf{Q}^*$.

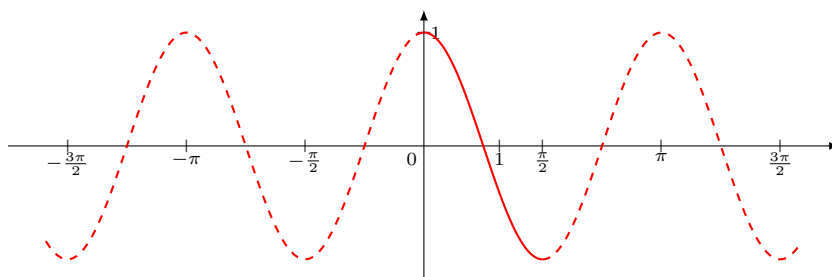
Si f est une fonction périodique de période $T \in \mathbf{R}_+^*$, son graphe, tracé dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est invariant par les translations de vecteurs de l'ensemble $\{kT\vec{i}, k \in \mathbf{Z}\}$. Cette propriété géométrique permet de réduire l'étude des fonctions T -périodiques définies sur E à l'ensemble $[0, T[\cap E$.

Graphes d'une fonction 2-périodique



Exercice d'application 45. Déterminer un domaine d'étude possible de $f : x \longmapsto \cos(2x)$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)$ donc f est π -périodique. Ainsi on peut se contenter d'étudier f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$, donc f est paire. Ainsi, on peut se contenter d'étudier f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.



Exercice d'application 46. Déterminer un domaine d'étude possible de l'inéquation $\sin(2x - \pi/4) \geq \cos(4x)$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ La fonction $f : x \mapsto \sin(2x - \pi/4) - \cos(4x)$ est définie sur $\mathbf{R}$, π -périodique et vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(\pi/4 - x) = -f(x)$. Son graphe, tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc invariant par la translation de vecteur $\pi \vec{i}$ et présente un centre de symétrie au point de coordonnées $(\pi/4, 0)$. On peut donc se limiter à l'étude de l'équation sur $[\pi/4, 3\pi/4]$.

2.4. Monotonie

Définition 47.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur E .

- f est **croissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$;
- f est **décroissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \leq y$, $f(x) \geq f(y)$;
- f est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$, $f(x) < f(y)$;
- f est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$, $f(x) > f(y)$.

Une fonction f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si et seulement si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exercice d'application 48. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les variations sur $\mathbf{R}_+$ puis sur $\mathbf{R}_-$ de la fonction $f : x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \leq y$.

$$f(x) - f(y) = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}.$$

- Si $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, on déduit de l'égalité précédente que $f(x) \leq f(y)$. Ainsi la restriction de la fonction f à $\mathbf{R}_+$ est croissante.
- Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_-)^2$.
Si n est pair, alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $n-k+1$ et k sont de parités différentes, donc $x^k y^{n-k-1} \leq 0$. Ainsi $f(x) \geq f(y)$. On en déduit que la restriction de f à $\mathbf{R}_-$ est décroissante.
Si n est impair, alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $n-k+1$ et k sont de même parité, donc $x^k y^{n-k-1} \geq 0$. Ainsi $f(x) \leq f(y)$. On en déduit que la restriction de f à $\mathbf{R}_-$ est croissante.

En contraposant l'assertion qui traduit la stricte croissance (resp. décroissance), on obtient un résultat intéressant.

Proposition 49.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$. Si f est strictement croissante, alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x) \leq f(y) \implies x \leq y).$$

De plus, si f est strictement décroissante, alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x) \leq f(y) \implies x \geq y).$$

Démonstration.

Supposons f strictement croissante. Soit $(x, y) \in E^2$. Par définition,

$$(x > y) \implies (f(x) > f(y)).$$

En contraposant, on obtient que si $f(x) \leq f(y)$, alors $x \leq y$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) \leq f(y)$ et supposons f strictement décroissante. Alors $-f$ est strictement croissante et $-f(x) \geq -f(y)$ donc, avec le premier point de la preuve, $x \geq y$. $\square$

⚠ Attention ⚠. Le résultat de la proposition précédente n'est plus vrai si f sans la stricte croissance (resp. décroissance). Considérons par exemple $f : x \mapsto 1$. On a $f(2) \leq f(1)$ et pourtant $2 > 1$.

Proposition 50.

La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est une fonction croissante (resp. décroissante).

Le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) positives (*i.e.* à valeurs dans $\mathbf{R}_+$) est une fonction croissante (resp. décroissante).

Démonstration.

Soit $(f, g) \in (\mathbf{R}^E)^2$.

- On suppose que f et g sont croissantes. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leq y$. Alors :

$$(f + g)(x) - (f + g)(y) = f(x) - f(y) + g(x) - g(y).$$

Ce nombre est négatif en tant que somme de nombres négatifs, donc $f + g$ est croissante.

- On montre de manière similaire que la somme de fonctions décroissantes est décroissante.
- On suppose que f et g sont croissantes et positives. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leq y$. On a $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$. Puisque tous les nombres considérés sont positifs, on en déduit que $f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$, *i.e.* $(fg)(x) \leq (fg)(y)$. Ainsi fg est croissante.
- On montre de manière similaire que le produit de fonctions décroissantes positives est décroissant. $\square$

En général, le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) n'est pas croissant : considérer par exemple le produit de $x \mapsto x$ (resp. $x \mapsto -x$) avec elle-même.

Proposition 51.

Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur E et F telles que $f(E) \subset F$. Si f et g ont même sens de variation (resp. des sens de variations opposés), alors $g \circ f$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leq y$.

- Supposons f croissante et g croissante. Puisque f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$ puis, comme g est croissante, $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.
- Il reste trois autres cas à étudier, qui se traitent de manière similaire. $\square$

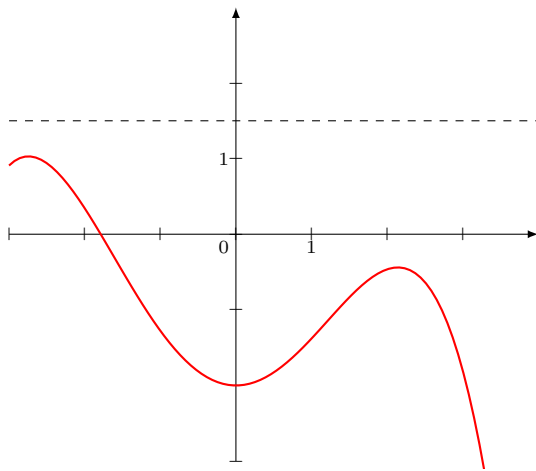
2.5. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 52.

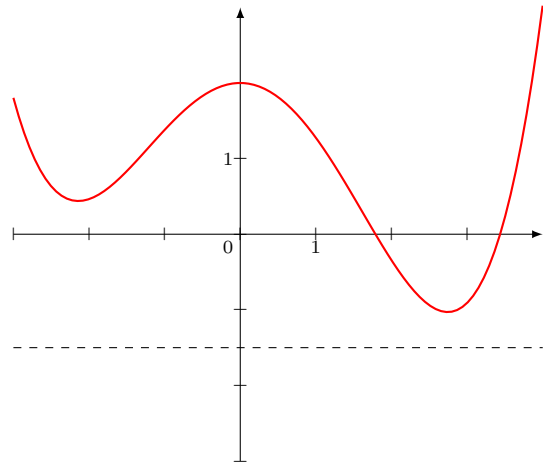
Soit f une fonction réelle définie sur E . On dit que cette fonction est :

- **majorée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$;
- **minorée** si et seulement s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geq m$;
- **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq M$.

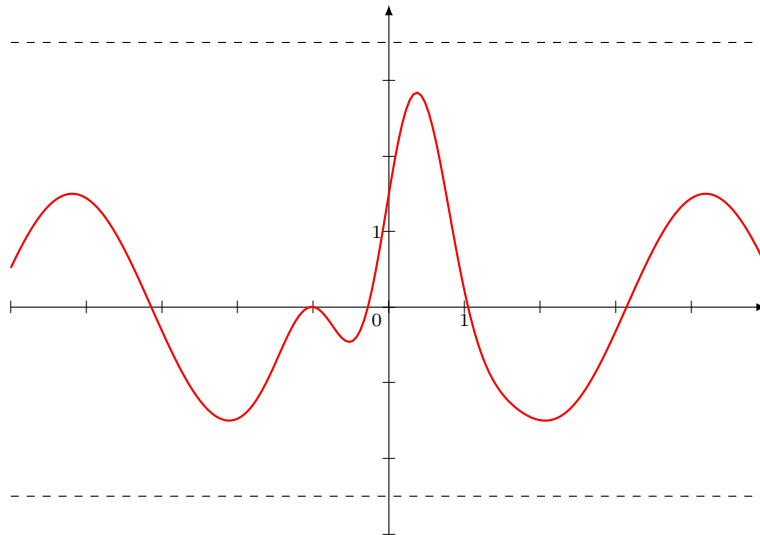
Graphes d'une fonction majorée



Graphes d'une fonction minorée



Graphes d'une fonction bornée



Définition 53.

Soit f une fonction réelle définie sur E . On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) en $a \in E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). On dit que f admet un **extremum** en a si et seulement si elle admet un maximum ou un minimum en a .

Dans la Définition 53, $f(a)$ est le maximum de l'ensemble $f(\mathbf{R}) = \{f(x), x \in E\}$ de toutes les images par f . Il y a unicité de ce maximum, comme nous l'avons signalé dans la Définition 20. En revanche, ce maximum peut être atteint en plusieurs points! Par exemple, la fonction $\cos$ admet un maximum (qui vaut 1) et ce maximum est atteint tous les multiples de 2π .

3. Notion de dérivée

Dans toute cette partie, I et J désigneront des intervalles de $\mathbf{R}$, non vides et non réduits à un point.

3.1. Rappel des définitions et des premières propriétés

Définition 54.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable en a** si la fonction taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

a une limite finie lorsque x tend vers a . Le cas échéant, cette limite est appelée **nombre dérivé** en a et est notée $f'(a)$.

Exemple 55. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in]0, +\infty[$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{a\}$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

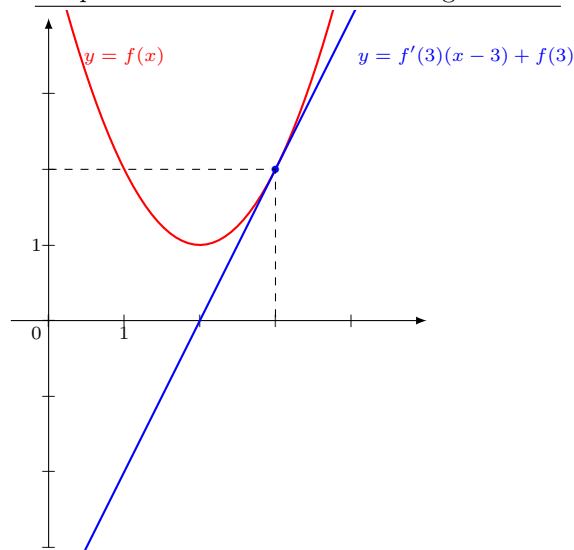
Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $a > 0$, $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Par contre, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.

La courbe représentative d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en un point a admet une tangente au point d'abscisse a . Cette droite a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Graphes d'une fonction et de sa tangente en 3



Définition 56.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f est dite **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout point de I . On peut alors définir la **fonction dérivée** de f , notée f' et définie par :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Exemple 57. La fonction $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ mais pas en 0, et $f' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice d'application 58. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la dérivée de la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto x^n$
 est $f' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto nx^{n-1}$.

↪ Soient $(n, a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1},$$

donc,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}.$$

ce qui signifie que $f'(a) = na^{n-1}$.

Finalement $f' : x \longmapsto nx^{n-1}$.

Proposition 59.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction $f \cdot g$ est dérivable sur I et $f' \cdot g + f \cdot g'$.
- Si g ne s'annule pas sur I , la fonction f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Démonstration.

La démonstration découle directement des opérations sur les limites, que nous reverrons en détail ultérieurement. Il en sera de même de tous les résultats de cette partie. $\square$

Théorème 60 - Dérivée d'une composée.

Soient deux fonctions $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f est dérivable sur I , et si g est dérivable sur J , alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Les exemples suivants sont très importants et à connaître par cœur :

Exemple 61. Soit $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. Si $I = \mathbf{R}$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $x \longmapsto u(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $x \longmapsto au'(ax + b)$.
2. La fonction u^2 est dérivable sur I , de dérivée $2u'u$.
3. La fonction e^u est dérivable sur I , de dérivée $u'e^u$.
4. Si u est à valeur dans $\mathbf{R}_+^*$ (ou $\mathbf{R}^{-*}$), alors la fonction $1/u$ est dérivable sur I , de dérivée $-u'/u^2$.
5. Si u est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I , de dérivée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
6. Si u est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I , de dérivée u'/u .

Exercice d'application 62. Soit $u :]0, 1[\longrightarrow \mathbf{R}$. Montrer que u est dérivable sur un

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

ensemble à préciser et calculer sa dérivée.

$\hookrightarrow x \longmapsto 1-x$ est dérivable sur $]0, 1[$, donc $x \longmapsto \frac{1-x}{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas ; sa dérivée vaut $x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$. Par ailleurs, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{1-x}{x} > 0 \iff x \in]0, 1[.$$

En appliquant le théorème de dérivation d'une composée aux fonctions dérivables $]0, 1[\longrightarrow]0, +\infty[$

$$x \longmapsto \frac{1-x}{x} \quad \text{et} \quad]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

on obtient que u est dérivable sur $]0, 1[$, avec $u' : x \longmapsto -\frac{1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

Notons que u n'est pas dérivable en 1 car $\frac{1-1}{1} = 0$ et la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

3.2. Etude des variations

Théorème 63.

Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$), alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I .

Démonstration.

La démonstration de ce théorème nécessite de nouveaux outils d'analyse et sera accessible ultérieurement. $\square$

Remarque 64. 1. Le fait que l'ensemble de définition de la fonction soit un intervalle est une hypothèse essentielle. Pour s'en convaincre, on pourra s'intéresser à la fonction inverse, définie sur $\mathbf{R}^*$ par $x \longmapsto 1/x$.

2. La fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et pourtant $u'(0) = 0$. Il est donc *suffisant* qu'une fonction dérivable sur un intervalle ait une dérivée strictement positive pour être strictement croissante. Ce n'est pas *nécessaire*.

Corollaire 65.

Une fonction dérivable sur un intervalle, et dont la dérivée y est nulle, est constante sur cet intervalle.

Démonstration.

Il suffit de se rappeler qu'une fonction à la fois croissante et décroissante est constante. $\square$

3.3. Dérivée d'ordre supérieur**Définition 66.**

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Si f est n fois dérivable sur I , peut définir de manière itérative une dérivée de f à l'ordre n :

- On convient que $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Si la dérivée à l'ordre n , $f^{(n)}$, est bien définie sur I et est elle-même dérivable sur I , alors la dérivée à l'ordre $n + 1$ est définie par :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

On note parfois $f'' = f^{(2)}$ et $f''' = f^{(3)}$.

Exemple 67. La fonction $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ est trois fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $f^{(3)} : x \longmapsto 2/x^3$.

$$x \longmapsto \ln(x) + x^2$$

Proposition 68.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et considérons $f_n : x \longmapsto x^n$. Alors, f_n est indéfiniment dérivable et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f^{(k)} : x \longmapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

De plus, pour tout $k > n$ entier, on a $f^{(k)} = 0$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous allons démontrer le résultat à l'aide d'une récurrence finie. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on introduit $H_k : \llcorner f^{(k)} : x \longmapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \llcorner$.

Par définition, $f^{(0)} = f$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{n!}{(n-0)!} x^{n-0} = x^n = f(x)$, donc H_0 est vraie.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que H_k soit vraie. Avec H_k , on a

$$f^{(k)} : x \longmapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

En particulier, $f^{(k)}$ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1},$$

donc H_{k+1} est vraie.

Le principe de récurrence finie permet de conclure que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, H_k est vraie.

En particulier, $f^{(n)} = n!$. Cette fonction est dérivable et permet d'obtenir $f^{(n+1)} = 0$. On en déduit que pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$. $\square$

Exercice d'application 69. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

$\hookrightarrow$ En calculant les premières dérivées, on conjecture que $f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}$. On démontre sans difficulté ce résultat par récurrence.