

Chapitre 3

Fonctions usuelles

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.

Pierre-Simon de Laplace ¹

1. Théorème de la bijection monotone

1.1. Fonctions réelles bijectives

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbf{R}$ à valeurs dans une partie B de $\mathbf{R}$. On dit que f est une **bijection**, ou que f est **bijective**, si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in A$ admet une unique solution.

Exemple 2. Les fonctions suivantes sont des bijections :

$$\begin{array}{llll} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} & , \quad g : \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ & , \quad h : [0, \pi/2] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & x^3 & & x & \longmapsto & x^2 & & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{ll} u : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ & , & v : \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas des bijections. En effet, l'équation $u(x) = 1$ admet deux solutions et l'équation $v(x) = -1$ n'admet pas de solution.

Graphiquement, $f : A \rightarrow B$ est une bijection si, et seulement si, pour tout $b \in B$, la droite horizontale d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.

1. Pierre-Simon de LAPLACE - mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749-1827)

$$f(x) = y \iff x^2 - 1 = y \iff x^2 = y + 1 \iff x = \sqrt{y + 1} \text{ car } (y + 1, x) \in (\mathbf{R}_+)^2.$$

Finalement, f est bijective et $f^{-1} : [0, 3] \longrightarrow [1, 2]$.

$$y \longmapsto \sqrt{y+1}$$

Soit f une fonction bijective de A sur une partie B de $\mathbf{R}$.

- Démonstration.*

1. Soit $x \in A$. $f^{-1}(f(x))$ est l'unique solution de l'équation $f(a) = f(x)$ d'inconnue $a \in \mathbf{R}$, i.e. x .
2. Soit $y \in B$. $f(f^{-1}(y))$ est l'image par f de l'unique solution de l'équation $f(a) = y$ d'inconnue $a \in \mathbf{R}$, i.e. y . □

↪ Soit $y \in]-b, b[$. Puisque f est bijective, il existe un unique $x \in]-a, a[$ tel que $f(x) = y$. On a $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ et $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x$, d'où $f^{-1}(y) = -f^{-1}(-y)$, puis f^{-1} est impaire.

Théorème 10 - Théorème de la bijection.

Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur un intervalle noté $f(I)$ et défini par le tableau ci-dessous :

I	$f(I)$	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$

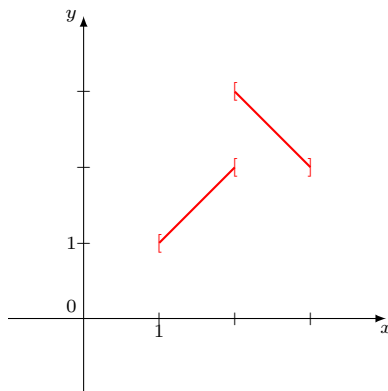
Démonstration (idée de preuve).

3 - FONCTIONS USUELLES

Puisque f est continue sur I , d'après le théorème des valeurs intermédiaires (qui sera étudié en détail ultérieurement), toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes. La stricte monotonie entraîne que lorsqu'une valeur est prise, elle ne l'est qu'une seule fois.

En attendant une démonstration plus rigoureuse, on retiendra que l'existence d'un antécédent est liée à la continuité, tandis que l'unicité d'un antécédent est liée à la stricte monotonie. $\square$

Remarque 11. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection entre deux intervalle. On peut démontrer que si f est continue, elle est nécessairement strictement monotone. De plus, si f est strictement monotone, elle est nécessairement continue. Mais il faut être très prudent, puisqu'il existe des bijections non continues et non monotones. Nous donnons ci-après le graphe d'une fonction bijective de $[1, 3]$ dans $[1, 3]$ qui n'est ni continue, ni monotone.



Exercice d'application 12. Déterminer un couple d'intervalles (intervalle de définition et intervalle d'arrivée) sur lesquels la fonction

$$f : x \longmapsto x^4 + 7x^2 - 12$$

réalise une bijection.

$\hookrightarrow$ La fonction f est continue en tant que somme de fonctions continues. De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes et d'une constante. Par ailleurs, $f(0) = -12$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ sur $[-12, +\infty[$.

On peut montrer de la même manière que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-12, +\infty[$.

Exercice d'application 13. Démontrer que la fonction suivante est une bijection

$$\begin{aligned} f : [0; 1[&\longrightarrow [1; 2[\\ x &\longmapsto \sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ La fonction f est continue, strictement croissante en tant que somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction croissante. Le théorème de la bijection assure alors que f réalise une bijection de $[0; 1[$ sur $f([0; 1[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)[= [1; 2[$.

1.3. Propriétés des fonctions réciproques

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Proposition 14.

Soient A et B des parties de $\mathbf{R}$ et f une bijection de A sur B . La courbe représentative de f et celle de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).

Démonstration.

Notons $\mathcal{C}_f$ (resp. $\mathcal{C}_{f^{-1}}$) la courbe représentative de f (resp. f^{-1}). Soit $M \in \mathcal{C}_f$ de coordonnées (x_0, y_0) . Soit M' de coordonnées (x', y') l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (d) d'équation $y = x$. Notons $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 1)$ un vecteur directeur de (d) . Le milieu de $[MM']$ de coordonnées $((x_0 + x')/2, (y_0 + y')/2)$ appartient à (d) , et $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc :

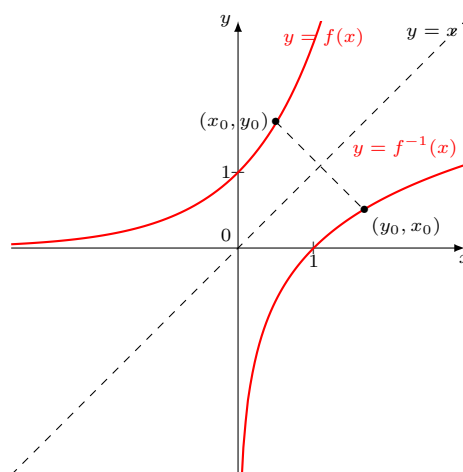
$$\begin{cases} (y_0 + y')/2 = (x_0 + x')/2 \\ (x' - x_0) + (y' - y_0) = 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} -x' + y' = x_0 - y_0 \\ x' + y' = x_0 + y_0 \end{cases}.$$

Ainsi M' a pour coordonnées (y_0, x_0) .

On obtient alors :

$$M \in \mathcal{C}_f \iff y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0) \iff M' \in \mathcal{C}_{f^{-1}}.$$

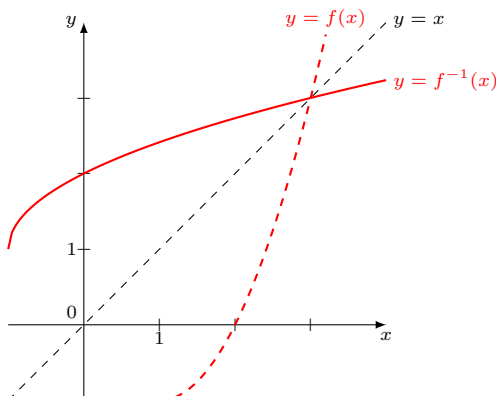
□



Exercice d'application 15. Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque de

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\longrightarrow [-1, +\infty[\\ x &\longmapsto (x-1)^2 - 1 \end{aligned}.$$

$\hookrightarrow$ On commence par tracer la parabole représentative de f , dont le sommet a pour coordonnées $(1, -1)$ et qui passe par les points de coordonnées $(2, 0)$ et $(3, 3)$. Par symétrie, on en déduit la courbe représentative de f^{-1} .



Proposition 16.

Soient A, B des parties de $\mathbf{R}$ et f une bijection de A sur B . Si f est strictement monotone sur A , alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur B et de même monotonie que f .

Démonstration.

Supposons que f est strictement croissante. Soit $(y, y') \in B^2$ tels que $y < y'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. On a ainsi $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

L'hypothèse $y < y'$ se réécrit $f(x) < f(x')$ et puisque f est strictement croissante, on en déduit que $x < x'$, autrement dit que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Ceci prouve que f^{-1} est strictement croissante. $\square$

Proposition 17.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et f une bijection de I sur J .

Si f est continue sur I , alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J .

Démonstration.

La démonstration de ce résultat sera vue plus tard dans le cours sur la continuité. Graphiquement, puisque la courbe représentative de f^{-1} est obtenue par symétrie à partir de celle de f , qui peut être tracée « sans lever le crayon », il en va de même pour celle de f^{-1} . $\square$

Théorème 18 - Dérivée d'une bijection réciproque.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I . Soit $b \in J$.

f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Le cas échéant,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration.

Puisque f est bijective, il existe un unique $a \in I$ tel que $f(a) = b$. D'après la Proposition 17, f^{-1} est continue en b . Ainsi :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a.$$

et la valeur a n'est jamais atteinte (si $f^{-1}(y) = a$, alors $y = b$). Or, par hypothèse,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

d'où, par composition des limites,

$$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a) \quad i.e. \quad \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = f'(a).$$

Ainsi, puisque $f'(a) \neq 0$,

$$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} \quad i.e. \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

$\square$

Remarque 19. Le point crucial dans cette démonstration est la preuve que f^{-1} est dérivable en b . Si l'on admet ce fait, la formule du théorème peut se retrouver en appliquant le théorème de dérivation d'une composée à l'identité $f \circ f^{-1} = \text{Id}_J : (f^{-1})' \cdot (f' \circ f^{-1}) = 1$, puis $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Ce résultat s'interprète de manière graphique : puisque les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice il en va de même pour leurs tangentes. Les pentes de ces tangentes sont donc inverses l'une de l'autre. En particulier, si la tangente à la courbe représentative de f en un point est horizontale, au point correspondant sur la courbe représentative de f^{-1} , la tangente est verticale.

2. Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances entières et puissances réelles

2.1. Fonctions logarithmes

Définition 20.

On appelle **logarithme népérien** et on note $\ln$ la primitive nulle en 1 de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+^* &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Proposition 21 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Démonstration. 1. Soit $y \in \mathbf{R}_+^*$. Notons $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$. Par définition de $\ln$, f
 $x \longmapsto \ln(xy) - \ln(x)$
et dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. Par ailleurs, $f(1) = \ln(y)$. Ainsi, $f(x) = \ln(y)$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, d'où $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$.

2. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. On remarque d'abord que $0 = \ln\left(y \times \frac{1}{y}\right) = \ln(y) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$, d'où $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$. Il s'ensuit que $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, d'où pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$. $\square$

Corollaire 22.

Pour tout $(x, n) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_n : \ll \ln(x^n) = n \ln(x) \gg$

On a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$ donc H_0 est vrai.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vrai.

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x \cdot x^n) = \ln(x) + \ln(x^n) = \ln(x) + n \ln(x) = (n+1) \ln(x)$$

donc H_{n+1} est vraie. Donc le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Soit $n \in \mathbf{Z}_-$. On a

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n) \ln(x) = n \ln(x)$$

car $-n \in \mathbf{N}$ et on peut appliquer le résultat démontré plus haut par récurrence. $\square$

Proposition 23 - Propriétés analytiques.

1. La fonction $\ln$ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. En particulier, $\ln$ est une fonction strictement croissante.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration. 1. Découle de la définition du logarithme népérien.

2. • Soit $M \in \mathbf{R}_+^*$. Puisque $x \mapsto 1/x$ est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient que $\ln$ est strictement croissante. En particulier, $\ln(2) > 0$, puis $M/\ln(2) > 0$.
Notons n le plus petit entier tel que $n \geq M/\ln(2)$. On a $n \times \ln(2) \geq M$, puis $\ln(2^n) \geq M$.
Puisque $\ln$ est croissante, on en déduit, pour tout $x \geq 2^n$, $\ln(x) \geq \ln(2^n) \geq M$. Finalement,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

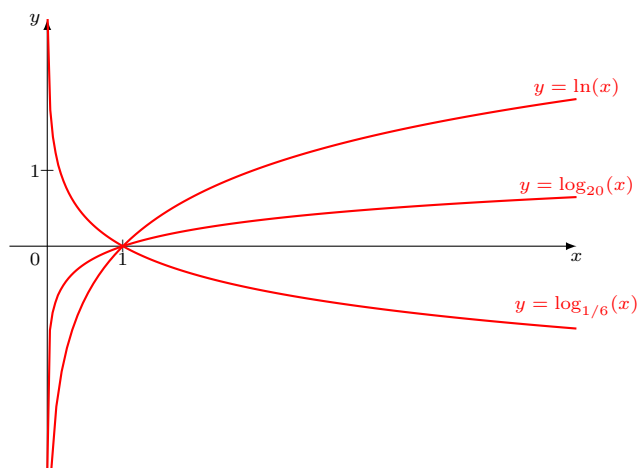
- Puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$. $\square$

Pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, on appelle **fonction logarithme en base a** la fonction

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbf{R}_+^* &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \ln(x)/\ln(a) \end{aligned}$$

Pour $a = 10$, cette fonction est aussi notée Log . Les propriétés de ces fonctions découlent de celles de $\ln$. Faire cependant attention lors du calcul des fonctions dérivées (ne pas oublier le facteur multiplicatif).

Graphes de fonctions logarithmes



L'inégalité suivante est à retenir, car très utile en pratique.

Proposition 24.

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Démonstration.

La fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$ est dérivable avec $f' : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{x} \geq 1 \iff x \in]0; 1]$. On en déduit que f est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$, donc $f(1) = 0$ est le maximum de f . Donc $f \leq 0$. $\square$

2.2. Fonctions exponentielles

Comme $\ln$ est une application strictement croissante et continue définie sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$, elle établit une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\left] \lim_{0^+} \ln; \lim_{+\infty} \ln \right[$, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, il existe donc un unique réel x tel que $\ln(x) = a$. En particulier, on peut poser les définitions suivantes.

Définition 25.

L'unique solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e .

Définition 26.

On appelle **fonction exponentielle** la réciproque de la fonction logarithme népérien. L'image d'un réel x par cette fonction est noté e^x ou $\exp(x)$.

Remarque 27. 1. En tant que réciproque de $\ln$, $\exp$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(e^x) = x$.

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$.

Proposition 28 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $e^{x+y} = e^x e^y$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.

Démonstration. 1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. $\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$, donc, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $e^{x+y} = e^x e^y$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. $\ln(e^x / e^y) = \ln(e^x) - \ln(e^y) = x - y = \ln(e^{x-y})$, donc, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $e^{x-y} = e^x / e^y$. $\square$

Proposition 29 - Propriétés analytiques.

1. La fonction $\exp$ est dérivable et $\exp' = \exp$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration. 1. La fonction $\exp$ est la réciproque de $\ln$, qui est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et dont la dérivée ne s'annule jamais. Le Théorème 18 assure alors que $\exp$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et,

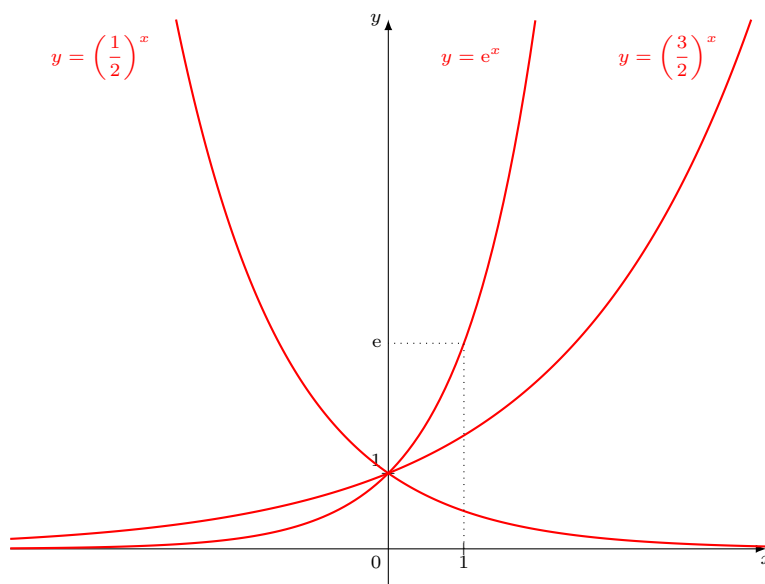
$$\exp' = \frac{1}{\ln' \circ \exp} = \frac{1}{\frac{1}{\exp}} = \exp.$$

2. • Soit $\varepsilon > 0$. Notons $x_0 = \ln(\varepsilon)$. Puisque $\exp$ est croissante ($\exp' = \exp$ et $\exp > 0$), pour tout $x \leq x_0$, $e^x \leq e^{x_0}$, d'où, pour tout $x \leq x_0$, $|e^x| \leq \varepsilon$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

1

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. On appelle **fonction exponentielle en base a** la fonction inverse de la fonction logarithme en base a ; elle est donc définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$. L'image d'un réel x par cette fonction est notée a^x . Par définition, on a donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $a^x = e^{x \ln(a)}$. Ici encore, il faut prendre garde lors de la dérivation des fonctions exponentielles en base quelconque. Ainsi si a désigne un réel strictement positif et $f : x \longmapsto a^x$, on remarque que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \ln(a)a^x$.

Graphes de fonctions exponentielles



Remarque technique 30. Pour manipuler des expressions mettant en jeu des exponentielles ou des logarithmes de bases différentes, on se ramène à une seule base. Dans le cas des équations, on peut conserver deux bases, que l'on isole chacune d'un côté du signe « = » avant de passer au logarithme.

Exercice d'application 31. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2^{(3^x)}}{3^{(2^x)}}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On remarque que

$$f(x) = \frac{e^{3^x \ln(2)}}{e^{2^x \ln(3)}} = \exp\left(\ln(2)e^{x \ln(3)} - \ln(3)e^{x \ln(2)}\right) = \exp\left(e^{x \ln(3)}\left(\ln(2) - \ln(3)e^{x(\ln(2) - \ln(3))}\right)\right)$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2$.

$$x^{y+z} = \exp((y+z)\ln(x)) = \exp(y\ln(x)) \exp(z\ln(x))$$

d'où $x^{y+z} = x^y x^z$.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2$.

$$(x^y)^z = (\exp(y\ln(x)))^z = \exp(zy\ln(x))$$

d'où $(x^y)^z = x^{yz}$.

4. • Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$.

$$x^a = y \iff \exp(a\ln(x)) = y \iff a\ln(x) = \ln(y) \iff \ln(x) = \frac{\ln(y)}{a} \iff x = \exp\left(\frac{\ln(y)}{a}\right)$$

Donc la fonction puissance d'ordre a est bijective et sa réciproque est $x \mapsto x^{1/a}$.

- Soit $(a, x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^3$. Si $x < y$, alors $a\ln(x) < a\ln(y)$ puis $x^a < y^a$. Ainsi $x \mapsto x^a$ est strictement croissante.
- Soit $(a, x, y) \in \mathbf{R}_-^* \times (\mathbf{R}_+^*)^2$. Si $x < y$, alors $a\ln(x) > a\ln(y)$, puis $x^a > y^a$. Ainsi $x \mapsto x^a$ est strictement décroissante. $\square$

Corollaire 36.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $(e^x)^y = e^{xy}$.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $\ln(x^y) = y\ln(x)$.

Démonstration. 1. Immédiat avec la proposition précédente, puisque $e > 0$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. $\ln(x^y) = \ln(\exp(y\ln(x))) = y\ln(x) = \ln(x^y)$. $\square$

Proposition 37.

Soit $a \in \mathbf{R}^*$.

- Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est strictement croissante si $a > 0$.
- Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est strictement décroissante si $a > 0$.

La fonction puissance d'ordre a est une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}_+^*$ de réciproque la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^{1/a} \end{array} .$$

Soit p un entier naturel impair. Le cas de la puissance d'ordre $1/p$ pose un problème particulier. En effet, on peut définir cette fonction comme précédemment ou comme étant la réciproque f de la bijection $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f ainsi construite est définie sur $\mathbf{R}$ entier et coïncide avec la

$$x \longmapsto x^p$$

puissance d'ordre $1/p$ sur $\mathbf{R}_+^*$; on l'appelle **fonction racine p -ième**. En général, afin d'éviter les confusions, la fonction racine p -ième appliquée à un réel x s'écrit $\sqrt[p]{x}$ plutôt que $x^{1/p}$.

Proposition 38 - Propriétés analytiques.

1. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, la fonction puissance d'ordre a est dérivable et sa dérivée est

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+^* &\longrightarrow \mathbf{R}_+^* \\ x &\longmapsto ax^{a-1} \end{aligned}$$
2. Pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$.
 Pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^a = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$.

Démonstration. 1. Soit $a \in \mathbf{R}$. La fonction puissance d'ordre a , qu'on note f , est dérivable comme composée de fonction dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{a}{x} \exp(a \ln(x)) = \frac{a}{e^{\ln(x)}} \exp(a \ln(x))$, d'où le résultat.

2.
 - Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} a \ln(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$.
 - Soit $a \in \mathbf{R}_-^*$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} a \ln(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^a = +\infty$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$. $\square$

Remarque 39. On convient parfois que $0^0 = 1$. En effet, la fonction f définie par $f(x) = x^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $f(0) = 1$ est continue (on parle de prolongement par continuité de $x \mapsto x^x$; on étudiera cela plus en détail bientôt).

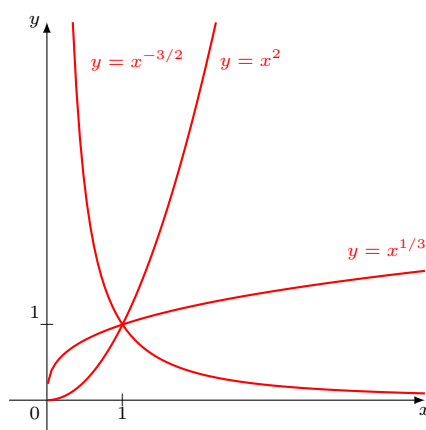
Remarque technique 40. Pour étudier des limites avec les fonctions puissances, il faut **toujours** revenir à la forme exponentielle!

Exercice d'application 41. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \left(\frac{1+2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x > 0$. On a $\frac{1+2x}{1+x} = \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$. Ainsi,

$$f(x) = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+2x}{1+x} \right) \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1.$$

Graphes de fonctions puissances



2.4. Comparaison asymptotique des fonctions introduites

Théorème 42 - Théorème de croissances comparées.

1. En $+\infty$, le logarithme népérien est négligeable devant les fonctions puissances d'exposant strictement positif : on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0$ pour tout $b > 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \ln(x) = 0$ pour tout $b > 0$.
3. En $+\infty$, les fonctions puissances sont négligeables par rapport à la fonction exponentielle : on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0$ pour tout $b \in \mathbf{R}$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^x = 0$ pour tout $b > 0$.

Démonstration. 1. On a vu que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\ln(x) \leq x - 1$ et a fortiori, on a $\ln(x) \leq x$. Soit $x \in]0, +\infty[$. On peut donc écrire aussi $\ln(x^{1/2}) \leq x^{1/2}$ c'est-à-dire

$$\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

En divisant par x , on obtient pour tout $x > 1$: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient avec le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Soit $b > 0$. Soit $x > 0$. Posons $X = x^b$. On a

$$\frac{\ln(x)}{x^b} = \frac{\ln(X^{1/b})}{(X^{1/b})^b} = \frac{1}{b} \frac{\ln(X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Soit $x > 0$ et posons $y = \frac{1}{x}$. On a $x \ln(x) = \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(y)}{y}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Soit $b > 0$. Soit $x > 0$. Posons $X = x^b$.

$$x^b \ln(x) = X \ln(X^{1/b}) = \frac{1}{b} X \ln(X) \xrightarrow{X \rightarrow 0^+} 0.$$

3. Soit $b \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$ et posons $t = e^x$ de sorte que $x = \ln(t)$. On a alors $\frac{x^b}{e^x} = \frac{(\ln(t))^b}{t}$ si bien que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t))^b}{t} = 0$$

d'après le résultat précédent.

4. Soit $b > 0$. Pour $x < 0$, on pose $X = -x$. Alors, $|x| = X$ et $|x|^b e^x = X e^{-X} = \frac{X^b}{e^X}$.

Comme $X \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^b}{e^X} = 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^x = 0.$$

□

On a en particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Remarque technique 43. Cette proposition exprime grossièrement que les exponentielles « l'emportent » sur les puissances qui « l'emportent » sur les logarithmes. Ce résultat, même s'il a l'air restrictif, permet de traiter toutes les bases et tous les cas de produits de fonctions du type précédent. Même si revenir à l'énoncé exact du théorème est un exercice de style, il faut savoir faire cette opération pour être convaincu de sa légitimité.

Exercice d'application 44. Etudier la limite en $+\infty$ de $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto e^{-3x} x^4 \ln(x)^2.$$

$\hookrightarrow$ Intuitivement, l'exponentielle « l'emporte » sur les autres fonctions, f admet 0 comme limite en $+\infty$; cette rédaction est suffisante en pratique. Pour se ramener aux résultats précédents, il suffit d'écrire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $f(x) = (\ln(x)/x)^2 (x e^{-x/2})^6$. La proposition précédente assure que $x \mapsto \ln(x)/x$ et $x \mapsto x e^{-x/2}$ admettent 0 comme limite en $+\infty$. Il en est donc de même de la fonction f .

On peut généraliser le théorème de croissances comparées :

Corollaire 45.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $b > 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b |\ln(x)|^a = 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $b > 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$ pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbf{R}$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0$ pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$.

3. Fonctions hyperboliques

Définition 46.

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** et on note sh la fonction $\text{sh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** et on note ch la fonction $\text{ch} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\hookrightarrow S = \sum_{p=0}^n \frac{e^p - e^{-p}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n (e)^p - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n (e^{-1})^p. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{e^{(n+1)} - 1}{2(e - 1)} - \frac{e^{-(n+1)} - 1}{2(e^{-1} - 1)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right) e^{(n+1)/2}}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) e^{1/2}} - \frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{n+1}{2}\right) e^{-(n+1)/2}}{2 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-1/2}} \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)} (e^{n/2} - e^{-n/2}) \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

[illegible]

Exercice d'application 51. Soit $(n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Simplifier $\sum_{k=0}^n \text{ch}(kx)$.

↪ En procédant comme avant, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx) = \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}x) \operatorname{ch}(\frac{nx}{2})}{\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}.$$

Remarque technique 52. Pour retrouver les formules de trigonométrie hyperbolique, on se sert des formules de trigonométrie standards et on « remplace » $\sin$ par $i \operatorname{sh}$ et $\cos$ par ch , puis on « simplifie » par i .

Attention : ceci est une astuce pour pouvoir démarrer une preuve.

Exemple 53. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. On en déduit que $\operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(x)$. On prouve alors plus facilement la formule :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2x) - 1 - 2 \operatorname{sh}^2(x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^x - e^{-x})^2}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque technique 54. Pour résoudre une équation faisant intervenir ch , sh il peut être utile de revenir à la forme exponentielle.

Exercice d'application 55. Résoudre $3 \operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) = 3$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) = 3 &\iff 3(e^x + e^{-x}) + 2(e^x - e^{-x}) = 6 \\ &\iff 5e^x - 6 + e^{-x} = 0 \\ &\iff e^{-x}(5e^{2x} - 6e^x + 1) = 0 \\ &\iff (e^x - 1)5e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-\ln(5), 0\}$.

[illegible]

Proposition 56.

Les fonctions ch et sh sont dérivables, et :

- $\text{sh}' = \text{ch}$

- $\text{ch}' = \text{sh}$

Démonstration.

On voit immédiatement que les fonctions sont dérivables d'après leurs définitions.

- Soit $x \in \mathbf{R}$. $\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \text{ch}(x)$.

- Soit $x \in \mathbf{R}$. $\text{ch}'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \text{sh}(x)$. □

Proposition 57.

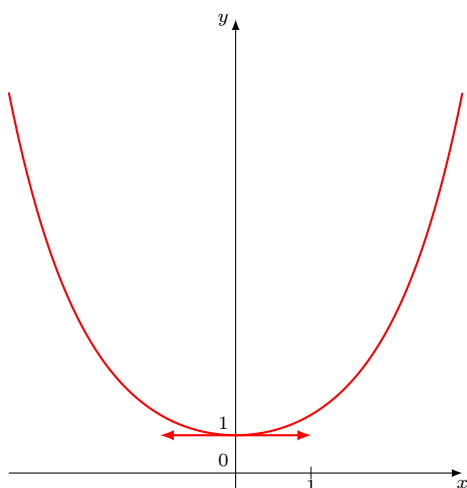
1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch} = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh} = -\infty$.

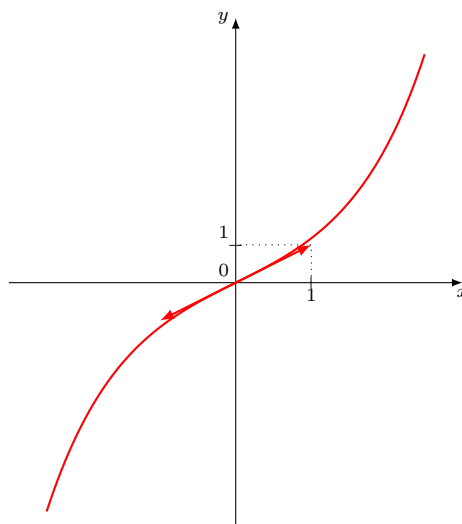
Démonstration. 1. Immédiat avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

2. Se traite comme le point précédent. □

Graphes de la fonction cosinus hyperbolique



Graphes de la fonction sinus hyperbolique



4. Fonctions circulaires

4.1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle

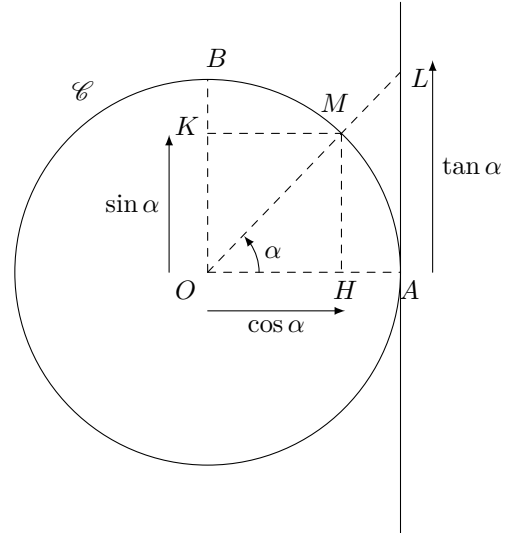
Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K , projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB) , et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A .

On oriente la droite (OA) (resp. (OB) , (OL)) par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OL}$).

Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, on sait que :

$$\cos \alpha = \overline{OH}, \quad \sin \alpha = \overline{OK}, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AL},$$

la tangente de α étant définie si et seulement si L existe, *i.e.* si le point M n'est pas sur la droite (OB) , *i.e.* si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.



Le théorème de Pythagore entraîne immédiatement le résultat suivant.

Théorème 58 - Théorème fondamental de la trigonométrie.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1.$$

Réciproquement, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour lequel $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel α , unique à 2π -près, pour lequel $(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Géométrique, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

La géométrie du triangle permet de déterminer quelques angles remarquables (à connaître par cœur).

Proposition 59 - Angles remarquables.

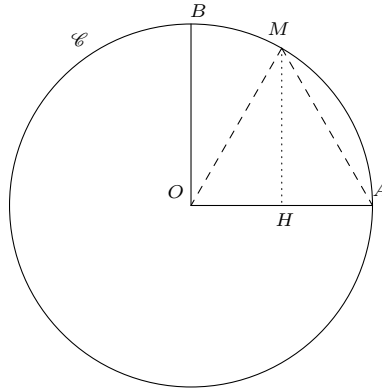
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

Démonstration.

Ces valeurs s'obtiennent en utilisant la géométrie du triangle. On se contente de démontrer $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, les autres valeurs étant laissées à la sagacité du lecteur.

On reprend les notations précédentes, avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \pi/3$. On a $OA = OM$, donc le triangle OAM est isocèle. Puisque $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \pi/3$, on en déduit que OAM est équilatéral. Il s'ensuit que

la hauteur (MH) de OAM est également une médiane, d'où, comme $\cos(\pi/3) > 0$, $\cos(\pi/3) = OH = 1/2$.



Par ailleurs, $\sin^2(\pi/3) = 1 - \cos^2(\pi/3) = 1 - 1/4 = 3/4$, puis, comme $\sin(\pi/3) > 0$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. $\square$

La lecture du cercle trigonométrique fournit également les relations suivantes :

Proposition 60 - Transformations affines.

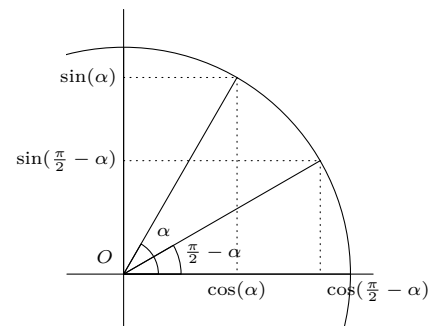
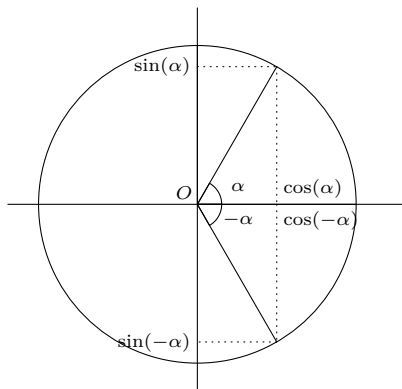
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

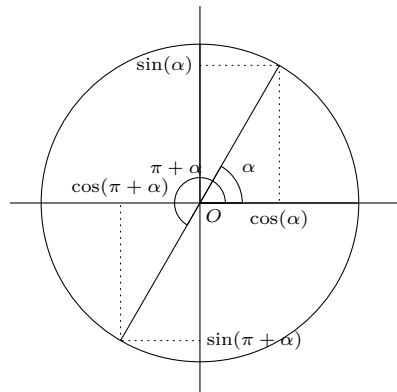
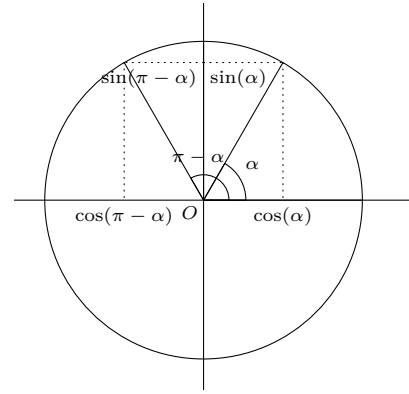
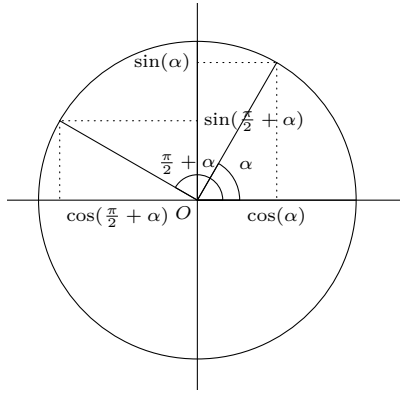
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

En particulier, en prenant garde à choisir α pour que les formules aient un sens,

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$	
$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$.

On peut rapidement retrouver ces égalités en dessinant un cercle trigonométrique :





Proposition 61 - Formules d'addition.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

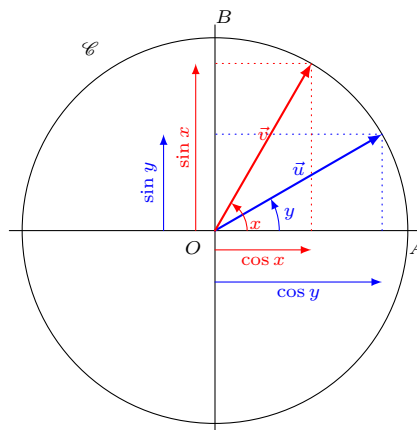
Si de plus, $x, y, x + y$ et $x - y$ ne sont pas des éléments de $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, alors :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(\cos y, \sin y)$ et $(\cos x, \sin x)$.



- D'une part $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos y \cos x + \sin y \sin x$ (produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^2$). D'autre part,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \times 1 \times \cos(x - y).$$

- On a de plus $\cos(x + y) = \cos(x - (-y)) = \cos(-y) \cos(x) + \sin(-y) \sin(x)$ avec la formule précédente. On conclut en remarquant que $\cos(-y) = \cos(y)$ et $\sin(-y) = -\sin(y)$ (cf. Proposition 60).
- D'après la Proposition 60, $\sin(x - y) = \cos(\frac{\pi}{2} - x + y) = \cos(y) \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(y) \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Or $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, d'où $\sin(x - y) = \cos y \sin x - \sin y \cos x$.
- On a $\sin(x + y) = \sin(x - (-y))$ et on conclut avec le point précédent.
- On a :

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)}{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)} = \frac{\frac{\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)}{\cos(x) \cos(y)}}{\frac{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y)}}.$$

$$\text{d'où } \tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}.$$

- $\tan(x - y) = \tan(x + (-y)) = \frac{\tan(x) + \tan(-y)}{1 - \tan(x) \tan(-y)} = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$ (car $\tan(-y) = -\tan(y)$), cf. Proposition 60). $\square$

Avec la proposition précédent, on obtient immédiatement les formules suivantes, qui sont également à connaître par cœur.

Corollaire 62 - Formules de duplication.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

Si de plus, x n'est pas un élément de $\{\pi/4 + k\pi/2, \pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Exercice d'application 63. Déterminer la valeur du réel positif $\cos(\pi/8)$.

$\hookrightarrow$ On a $\cos(\pi/4) = \cos(2\pi/8) = 2 \cos^2(\pi/8) - 1$, d'où $\cos^2(\pi/8) = (\sqrt{2} + 2)/4$. Puisque $\cos(\pi/8) \geq 0$, on obtient $\cos(\pi/8) = \sqrt{(\sqrt{2} + 2)/4}$.

Corollaire 64.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On suppose que x n'est pas un élément de $\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ et on pose $t = \tan(\frac{\pi}{2})$.

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Démonstration.

Les formules proviennent directement du Corollaire 62. $\square$

4.2. Etude des fonctions circulaires

Définition 65.

On appelle **fonction cosinus** (resp. **fonction sinus**) les fonctions définies respectivement par

$$\begin{array}{ccc} \cos : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \sin : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}.$$

On appelle **fonction tangente**, et on note $\tan$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \tan : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

Du formulaire de trigonométrie, on tire le corollaire ci-dessous.

Corollaire 66.

La fonction $\cos$ est paire, tandis que les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont impaires. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodique et la fonction $\tan$ est π -périodique. La courbe représentative de $\sin$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduit de celle de $\cos$ par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Proposition 67.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$, et

$$\cos' = -\sin \quad \sin' = \cos.$$

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

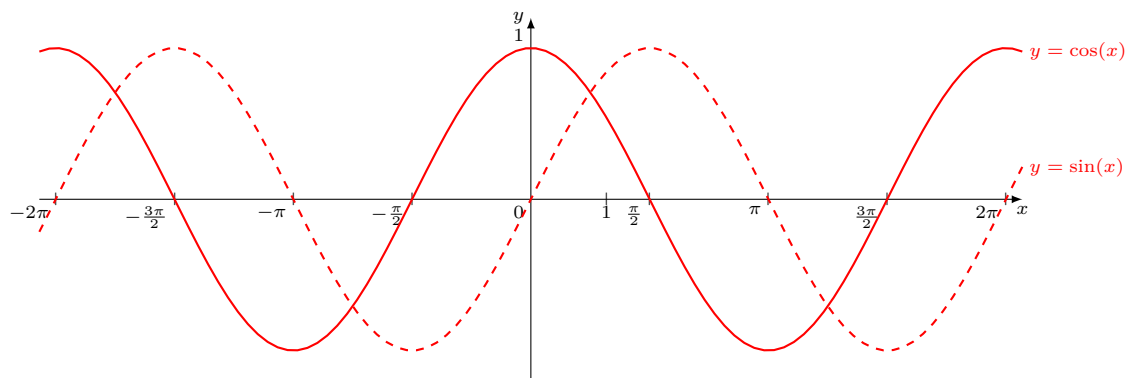
En particulier, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, la fonction tangente est strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Proposition 68.

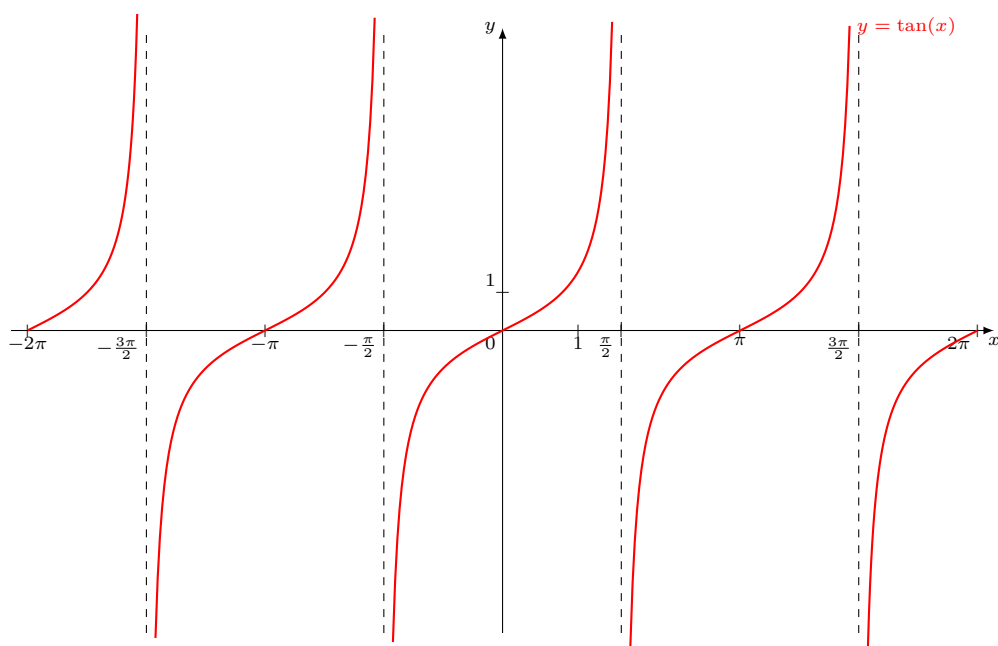
On a les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x > \pi/2}} \tan(x) = -\infty.$$

Graphes des fonctions sinus et cosinus



Graphes de la fonction tangente



5. Equations et inéquations trigonométriques

5.1. Outils de base

On utilise trois outils de base :

1. Les transformations des différences en produits, avec les complexes.
2. Les changements de lignes trigonométriques (transformation d'un sinus en cosinus, etc.).
3. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, soit $x \in \mathbf{R}$.

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

Il existe x_0 tel que $\cos(x_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(x_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc

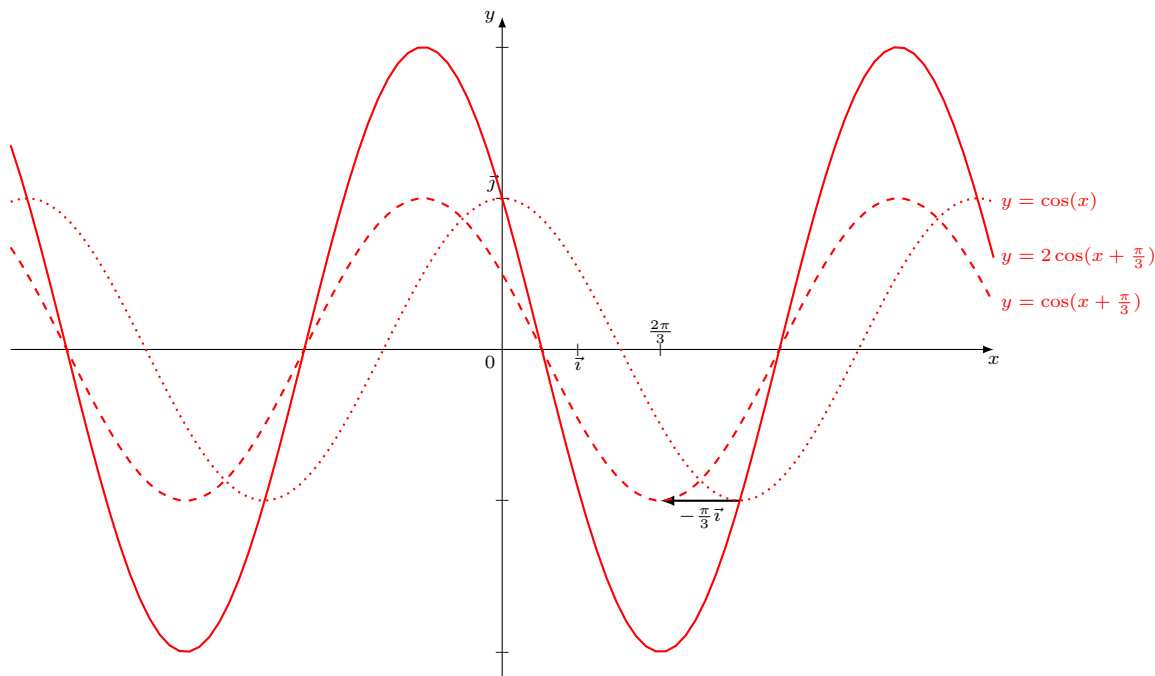
$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - x_0).$$

Exercice d'application 69. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$ définie sur $\mathbf{R}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{3} \cos x + \sin \frac{-\pi}{3} \sin x \right) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

On peut ainsi représenter la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



Définition 70.

Soit $(a, b, m) \in \mathbf{R}^3$. On dit que a est congru à b modulo m , et on note $a \equiv b [m]$, s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b + km$ (autrement dit $a - b$ est un multiple de m).

Exemple 71. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$. Si $\theta \equiv \theta' [2\pi]$, alors $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta')$, puisque $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodique. La réciproque est fautive. Par exemple, $\sin(\pi/4) = \sin(3\pi/4)$ et pourtant $3\pi/4 - \pi/4$ n'est pas un multiple de 2π . De même, $\cos(\pi/4) = \cos(-\pi/4)$ alors que $\pi/4 - (-\pi/4)$ n'est pas un multiple de 2π .

Proposition 72.

Soit $m \in \mathbf{R}$.

1. **Réflexivité.** $\forall a \in \mathbf{R}, a \equiv a [m]$.
2. **Symétrie.** $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, a \equiv b [m] \iff b \equiv a [m]$.
3. **Transitivité.** $\forall (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, si $a \equiv b [m]$ et $b \equiv c [m]$ alors $a \equiv c [m]$.
4. **Somme.** $\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, si $a \equiv c [m]$ et si $b \equiv d [m]$, alors $a + b \equiv c + d [m]$.
5. **Produit.** $\forall (a, b, \lambda) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^*$, si $a \equiv b [m]$, alors $\lambda a \equiv \lambda b [m]$.
6. **Projection.** $\forall (a, b, p) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$, si $a \equiv b [pm]$, alors $a \equiv b [m]$.

5.2. Equations trigonométriques

La résolution d'équations trigonométriques est basée sur trois équivalences de base.

Proposition 73.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. $\sin(x) = \sin(y)$ ssi $x \equiv y [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y [2\pi]$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. $\cos(x) = \cos(y)$ ssi $x \equiv y [2\pi]$ ou $x \equiv -y [2\pi]$.
3. Soit $(x, y) \in \left(\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}\right)^2$. $\tan(x) = \tan(y)$ ssi $x \equiv y [\pi]$.

Exercice d'application 74. Résoudre l'équation $(E_1) : 2 \sin(2x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow \text{Soit } x \in \mathbf{R}. \quad 2 \sin(2x) = 1 &\iff \sin(2x) = \frac{1}{2} \\
 &\iff \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } \pi - 2x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{12} [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12} [\pi]
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice d'application 75. Résoudre l'équation $(E_2) : \sin(2x) = \cos(3x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow \text{Soit } x \in \mathbf{R}. \quad \sin(2x) = \cos(3x) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) \\
 &\iff \frac{\pi}{2} - 2x \equiv 3x [2\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 2x \equiv -3x [2\pi] \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{10} \left[-\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice d'application 76. Résoudre l'équation $(E_3) : \sin(x) + \cos(7x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow \text{Soit } x \in \mathbf{R}. \quad \sin(x) + \cos(7x) = 0 &\iff -\sin(x) = \cos(7x) \\
 &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(7x) \\
 &\iff x \equiv \frac{\pi}{12} \left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{16} \left[\frac{\pi}{4}\right]
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice d'application 77. Résoudre l'équation $(E_4) : \sin(x) + \cos(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow \text{Soit } x \in \mathbf{R}. \quad \cos(x) + \sin(x) = 1 &\iff \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) \right) = 1 \\
 &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &\iff x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5.3. Inéquations trigonométriques

Proposition 78.

1. Pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $\sin(x) > 0$ si et seulement si $x \in]0, \pi[$.
2. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

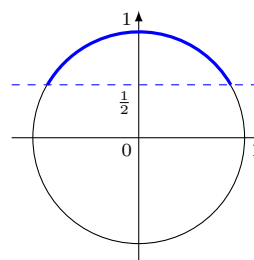
Remarque technique 79. Pour résoudre une inéquation trigonométrique, la première étape consiste à réduire l'intervalle d'étude en utilisant la périodicité des fonctions mises en jeu. Pour cela, une étude préalable au brouillon est nécessaire.

Exercice d'application 80. Résoudre l'inéquation $2 \sin(2x - 4) > 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ *Au brouillon.* On commence par écrire formellement :

$$2 \sin(2x - 4) > 1 \iff \sin(2x - 4) > \frac{1}{2}.$$

Avec un schéma, on constate que cette inéquation est facile à résoudre si $2x - 4 \in [0; 2\pi[$ par exemple (sur cet intervalle, la solution est donnée par un unique intervalle et pas par une union d'intervalles, comme cela aurait été le cas si on avait travaillé sur $[-\pi; \pi[$ par exemple). Ainsi on est amené à introduire $x \in [2; 2 + \pi[$.



Au propre. Soit $x \in [2; 2 + \pi[$. On remarque que $2x - 4 \in [0; 2\pi[$. Donc

$$\begin{aligned} 2 \sin(2x - 4) > 1 &\iff \sin(2x - 4) > \frac{1}{2} \\ &\iff 2x - 4 \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[\\ &\iff x \in \left] \frac{\pi}{12} + 2, \frac{5\pi}{12} + 2 \right[\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto \sin(2x - 4)$ est π -périodique, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] \frac{\pi}{12} + 2 + k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2 + k\pi \right[$$

Exercice d'application 81. Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geq \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

$$\sin(x) > \cos(2x) \iff 2 \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

On étudie deux inéquations :

$$(F_1) : \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad \text{d'inconnue } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$$

$$(F_2) : \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad \text{d'inconnue } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$$

- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$. On remarque que $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \in [-\pi, 5\pi[$. Donc

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 &\iff \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \in \{-\pi\} \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi[\\ &\iff x \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$. On remarque que $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Donc

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

- De plus, la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$ s'annule uniquement sur $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right\}$.

Sur la même restriction, la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ s'annule uniquement en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Ainsi :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	
$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	0	-	0	+	0	-	0	+
$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	0	+	+	+	0	-	-	-
$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	0	-	0	+	0	-	0	-

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$. On déduit du tableau :

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \iff x \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right]$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \right)$$

Exercice d'application 82. Résoudre l'inéquation $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \leq \frac{1}{2}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Soit $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$. En particulier $x - \frac{\pi}{4} \in [-\pi; \pi]$, d'où

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} \iff x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right]$.

Exercice d'application 83. Résoudre l'inéquation $6 \sin(x) + 8 \cos(x) \leq 5$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ et $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$.

Soit $x \in \left]\alpha + \frac{\pi}{6}, \alpha + \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$.

$$\begin{aligned} 6 \sin(x) + 8 \cos(x) \leq 5 &\iff \frac{3}{5} \sin(x) + \frac{4}{5} \cos(x) \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \sin(x - \alpha) \leq \frac{1}{2} \\ &\iff x - \alpha \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right] \end{aligned}$$

Comme $x \mapsto 6 \sin(x) + 8 \cos(x)$ est 2π -périodique, l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\alpha + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \alpha + \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

5.4. Choix des inconnues

Exercice d'application 84. Résoudre l'équation $\sin(x) - \cos(2x) = 1$ d'inconnue réelle x .

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\sin(x) - \cos(2x) = 1 \iff 2 \sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0 \iff \sin(x) \in \left\{\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right\}$$

Il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\sin(\alpha) = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$. En remarquant que $\frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < -1$, on en déduit les solutions de l'équation, à savoir $\{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Exercice d'application 85. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) \leq \sin(x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in [0, 2\pi]$.

$$\cos(2x) \leq \sin(x) \iff 2 \sin^2(x) + \sin(x) + 1 \geq 0 \iff 2(\sin(x) + 1) \left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

On retrouve ainsi l'ensemble des solutions déterminé dans l'Exercice d'application 81.

Exercice d'application 86. Résoudre l'équation $\sin(x) + \cos(x) = \tan(x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$

- Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

$$\sin(x) + \cos(x) = \tan(x) \iff \tan^4\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \tan^3\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$$

Avec un logiciel de calcul formel, on détermine que l'équation $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 1 = 0$ d'inconnue $y \in \mathbf{R}$ admet comme seules solutions, à 10^{-3} près, 0,514 et 4,439, notées α et β . Donc

$$\sin(x) + \cos(x) = \tan(x) \iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha \quad \text{ou} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \beta$$

Si on note $\begin{cases} \alpha' \in \mathbf{R} & \text{tel que } \tan(\alpha') = \alpha \\ \beta' \in \mathbf{R} & \text{tel que } \tan(\beta') = \beta \end{cases}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation,

$$S \cap \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\} = \{2\alpha' + 2k\pi, 2\beta' + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

- Soit $k \in \mathbf{Z}$.

$$\sin(\pi + 2k\pi) + \cos(\pi + 2k\pi) - \tan(\pi + 2k\pi) = -1$$

Finalemment,

$$S = \{2\alpha' + 2k\pi, 2\beta' + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

6. Fonctions trigonométriques réciproques

6.1. La fonction arccosinus

$\cos$ est continue, strictement décroissante sur $[0, \pi]$, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Elle établit donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 87.

On appelle **arccosinus**, et on note Arccos , la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

On a donc $\text{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

Proposition 88.

Soit $x \in [-1, 1]$.

1. $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$.
2. $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}(x)$.

Démonstration. 1. Découle de la définition.

2. $\cos^2(\text{Arccos}(x)) + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 \iff x^2 + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1$. Or $\text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$, donc $\sin(\text{Arccos}(x)) \in [0, 1]$, d'où $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\begin{cases} \cos(\text{Arccos}(-x)) &= -x \\ \cos(\pi - \text{Arccos}(x)) &= -\cos(\text{Arccos}(x)) \end{cases}$, donc $\cos(\text{Arccos}(-x)) = \cos(\pi - \text{Arccos}(x))$. Or $\begin{cases} \text{Arccos}(-x) &\in [0, \pi] \\ \pi - \text{Arccos}(x) &\in [0, \pi] \end{cases}$, donc $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}(x)$. □

Remarque technique 89. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\text{Arccos}(\cos(x))$ est l'unique solution de l'équation $\cos(y) = \cos(x)$ d'inconnue $y \in [0, \pi]$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x - y$ ou $x + y$ soit un multiple de 2π . En particulier, on retrouve que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$.

Il faut donc faire très attention. Si $x \notin [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) \neq x$.

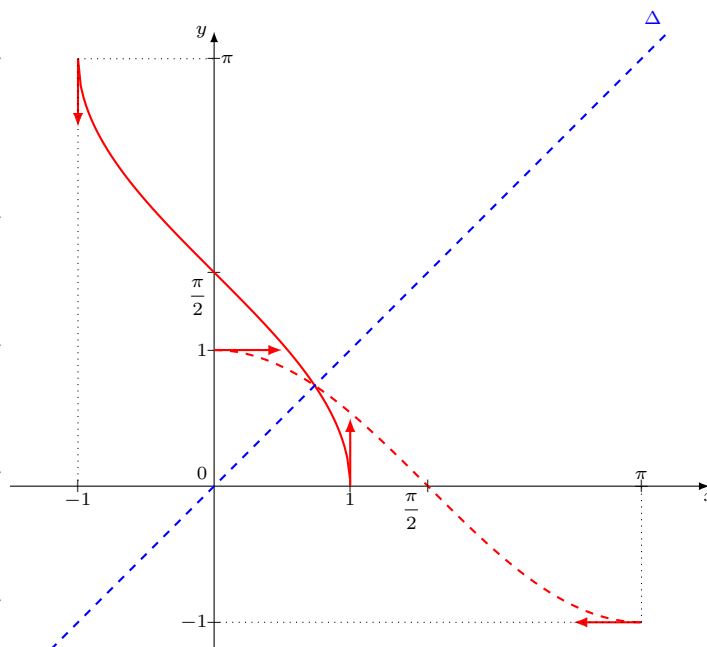
Exercice d'application 90. Calculer $\text{Arccos}(\cos(16\pi/3))$.

→ On cherche l'unique réel $y \in [0, \pi]$ tel que $\cos(y) = \cos(16\pi/3)$. On remarque que l'on a $16\pi/3 - 6\pi < 0$ et $-16\pi/3 - 4\pi > \pi$ donc on ne peut pas trouver de réel y qui diffère de $16\pi/3$ d'un multiple entier de

2π . Cette étape est inutile du point de vue de la logique puisque l'étape suivante permet de déterminer y et que l'on a unicité de la solution au problème posé ; mais, en pratique, il faut bien commencer par tester une des deux formes de y !

Comme $-16\pi/3 + 6\pi = 2\pi/3$ et comme $2\pi/3 \in [0, \pi]$, la simple définition de la fonction Arccos assure que $\text{Arccos}(\cos(16\pi/3)) = 2\pi/3$.

Sur le schéma ci-contre, on a tracé le graphe de la fonction cosinus (en pointillés) et celui de la fonction arccosinus (en trait plein), qui est évidemment le symétrique du premier par rapport à la droite Δ , première bissectrice du repère de travail. La fonction cosinus est continue, c'est-à-dire que son graphe peut être tracé « sans lever le crayon ». Cette simple considération géométrique assure qu'il en est de même de la fonction arccosinus. Dans le même ordre d'idée, le graphe de la fonction arccosinus admet une tangente en tout point m , qui est l'image par la symétrie axiale orthogonale s d'axe Δ de la tangente au graphe de cosinus au point $s(m)$. Il s'ensuit que la fonction arccosinus est dérivable en tout point de $] -1, 1[$ et n'est pas dérivable en -1 ni en 1 .



Remarque technique 91. Lorsqu'on veut démontrer une égalité ou résoudre une équation avec Arccos, on compose souvent par la fonction cos et on utilise le résultat suivant :

$$\forall (a, b) \in [0; \pi]^2, \quad \cos(a) = \cos(b) \iff a = b.$$

(le sens réciproque est évident ; pour le sens direct, si $\cos(a) = \cos(b)$ avec $(a, b) \in [0; \pi]^2$, alors $\text{Arccos}(\cos(a)) = \text{Arccos}(\cos(b))$ puis $a = b$ puisque $(a, b) \in [0; \pi]^2$).

Exercice d'application 92. Résoudre l'équation $\text{Arccos}(x) = 2 \text{Arccos}(\frac{3}{4})$ d'inconnue $x \in [-1; 1]$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in [-1; 1]$. On a $\text{Arccos}(\frac{3}{4}) \in [0; \frac{\pi}{2}]$ puis $2 \text{Arccos}(\frac{3}{4}) \in [0; \pi]$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Arccos}(x) = 2 \text{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) &\iff \cos(\text{Arccos}(x)) = \cos\left(2 \text{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\ &\iff x = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions est $\{\frac{1}{8}\}$.

Proposition 93.

La fonction Arccos est continue.

Démonstration.

Découle de la Proposition 17. □

Proposition 94.

La fonction Arccos est dérivable seulement sur $] - 1, 1[$ et, pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$(\text{Arccos}|_{]-1,1[})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration.

La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos'(x) = 0 \iff x \in \{0, \pi\}$. Le Théorème 18 assure alors que Arccos est dérivable sur $]-1, 1[\setminus \{\text{Arccos}(0), \text{Arccos}(\pi)\}$, *i.e.* sur $]-1, 1[$. Le théorème fournit également, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'après la Proposition 88.

6.2. La fonction arcsinus

$\sin$ est continue, strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Elle établit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 95.

On appelle **arcsinus**, et on note Arcsin , la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

On a donc $\text{Arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Proposition 96.

Soit $x \in [-1, 1]$.

1. $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$.
2. $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$.

Démonstration. 1. Découle de la définition.

2. $\cos^2(\text{Arcsin}(x)) + \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 \iff x^2 + \cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1$. Or $\text{Arcsin}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \in [0, 1]$, d'où $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3.
$$\begin{cases} \sin(\text{Arcsin}(-x)) &= -x \\ \sin(-\text{Arcsin}(x)) &= -\sin(\text{Arcsin}(x)) \end{cases}, \text{ donc } \sin(\text{Arcsin}(-x)) = \sin(-\text{Arcsin}(x)).$$

Or
$$\begin{cases} \text{Arcsin}(-x) &\in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\text{Arcsin}(x) &\in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}, \text{ donc } \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x).$$
 □

Remarque technique 97. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\text{Arcsin}(\sin(x))$ est l'unique solution de l'équation $\sin(y) = \sin(x)$ d'inconnue $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$ tel que $x - y$ ou $x + y - \pi$ soit un multiple de 2π . En particulier, on retrouve que pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

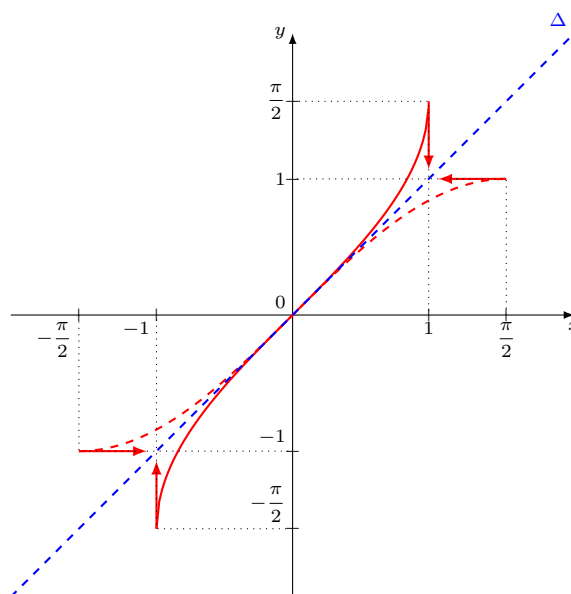
Il faut donc faire très attention. Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$.

Exercice d'application 98. Calculer $\text{Arcsin}(\sin(16\pi/3))$.

↪ On cherche l'unique réel $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(y) = \sin(16\pi/3)$. On remarque que l'on a $16\pi/3 - 6\pi < -\pi/2$ et $16\pi/3 - 4\pi > \pi/2$ donc on ne peut pas trouver de réel y qui diffère de $16\pi/3$ d'un multiple entier de 2π . Cette étape est inutile du point de vue de la logique puisque l'étape suivante permet de déterminer y et que l'on a unicité de la solution au problème posé; mais, en pratique, il faut bien commencer par tester une des deux formes de y !

Comme $-16\pi/3 + 5\pi = -\pi/3$ et comme $-\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$, la simple définition de la fonction Arcsin assure que $\text{Arcsin}(\sin(16\pi/3)) = -\pi/3$.

Sur le schéma ci-contre, on a tracé le graphe de la fonction sinus (en pointillés) et celui de la fonction arcsinus (en trait plein), qui est évidemment le symétrique du premier par rapport à la droite Δ , première bissectrice du repère de travail. La fonction sinus est continue, c'est-à-dire que son graphe peut être tracé « sans lever le crayon ». Cette simple considération géométrique assure qu'il en est de même de la fonction arcsinus. Dans le même ordre d'idée, le graphe de la fonction arcsinus admet une tangente en tout point m , qui est l'image par la symétrie axiale orthogonale s d'axe Δ de la tangente au graphe de cosinus au point $s(m)$. Il s'ensuit que la fonction arcsinus est dérivable en tout point de $] -1, 1[$ et n'est pas dérivable en -1 ni en 1 .



Remarque technique 99. Lorsqu'on veut démontrer une égalité ou résoudre une équation avec Arcsin, on compose souvent par la fonction sin et on utilise le résultat suivant :

$$\forall (a, b) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]^2, \quad \sin(a) = \sin(b) \iff a = b.$$

Proposition 100.

La fonction Arcsin est continue.

Démonstration.

Découle de la Proposition 17. □

Proposition 101.

La fonction Arcsin est dérivable seulement sur $] -1, 1[$ et, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$(\text{Arcsin}|_{]-1,1[})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration.

La fonction sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin'(x) = 0 \iff x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. Le

Théorème 18 assure alors que Arcsin est dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{\text{Arcsin}(-\frac{\pi}{2}), \text{Arcsin}(\frac{\pi}{2})\}$, *i.e.* sur $] -1, 1[$. Le théorème fournit également, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'après la Proposition 96.

6.3. La fonction arctangente

tan est continue, strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan(x) = +\infty$. Elle établit donc une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

Définition 102.

On appelle **arctangente**, et on note Arctan , la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{ccc}] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

On a donc $\text{Arctan} :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbf{R}$.

Proposition 103.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

1. $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$;

3. $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$;

$$2. \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

4. $\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Démonstration. 1. Découle directement de la définition de Arctan .

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos(\text{Arctan}(x))^2 = \frac{1}{1 + \tan(\text{Arctan}(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Comme Arctan est à valeurs dans $] -\pi/2, \pi/2[$ et comme cosinus ne prend que des valeurs positives sur cet intervalle, on en déduit la formule recherchée.

3. Découle des deux points précédents, puisque $\sin = \tan \times \cos$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$. On remarque que $\tan(-\operatorname{Arctan}(x)) = -\tan(\operatorname{Arctan}(x)) = -x = \tan(\operatorname{Arctan}(-x))$. Autrement dit, $-\operatorname{Arctan}(x)$ et $\operatorname{Arctan}(-x)$ sont deux solutions de l'équation $\tan(y) = -x$ d'inconnue $y \in \mathbf{R}$ et ces deux solutions appartiennent à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi $\operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arctan}(x)$. Finalement, la fonction Arctan est impaire. $\square$

Remarque technique 104. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. $\text{Arctan}(\tan(x))$ est l'unique solution de l'équation $\tan(y) = \tan(x)$ d'inconnue $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $x - y$ soit un multiple de π . En particulier, on retrouve que pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$.

Il faut donc faire très attention. Si $x \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{Arctan}(\tan(x)) \neq x$.

Exercice d'application 105. Calculer $\text{Arctan}(\tan(16\pi/3))$.

↔ Comme $16\pi/3 - 5\pi = \pi/3$ et comme $\pi/3 \in]-\pi/2, \pi/2[$, la simple définition de la fonction Arctan assure que $\text{Arctan}(\tan(16\pi/3)) = \pi/3$.

Remarque technique 106. Lorsqu'on veut démontrer une égalité ou résoudre une équation avec Arctan, on compose souvent par la fonction tan et on utilise le résultat suivant :

$$\forall (a, b) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan(a) = \tan(b) \iff a = b.$$

Proposition 107.

La fonction Arctan est continue.

Démonstration.

Découle de la Proposition 17. □

Proposition 108.

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration.

La fonction tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) \neq 0$. Le Théorème 18 assure alors que Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

Graphes de la fonction arctangente

