Chapitre 4

Les nombres complexes

Le plus court chemin entre deux vérités du domaine réel passe par le domaine complexe.

Jacques Hadamard [1]

Le numéro que vous avez composé est imaginaire. Veuillez tourner le téléphone de 90 degrés.

1. Présentation

1.1. Ensemble $\mathbb{C}$ et opérations

Définition 1.

L'ensemble $\mathbf{C}$ des **nombres complexes** est l'ensemble des nombres qui s'écrivent de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels, muni des opérations d'addition et de multiplication définies par

- addition : $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$,
- multiplication : $(a+ib)\times(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$.

En particulier, on a

$$i^2 = -1.$$

1. Jacques HADAMARD - mathématicien français (1865-1963). Il est connu pour sa démonstration du théorème des nombres premiers (qui donne un comportement de la répartition des nombres premiers en l'infini) à l'aide de nombres complexes.

Les calculs dans $\mathbf{C}$ s'effectuent exactement comme dans $\mathbf{R}$ en remplaçant chaque occurrence de i^2 par -1. Mais attention, il est impossible d'établir un ordre sur $\mathbf{C}$ qui prolonge l'ordre sur $\mathbf{R}$ et qui obéisse aux mêmes règles.

⚠ **Attention ⚠.** Il ne faut donc jamais écrire une inégalité entre nombres complexes (sauf si ce sont des nombres réels).

Définition 2.

Si $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, alors a et b sont appelés respectivement la **partie réelle** et la **partie imaginaire** de z. On les note $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$. L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe, où a et b sont deux nombres réels, est appelée **la forme algébrique** de z.

Remarque 3. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel !

Exemple 4. $\mathfrak{Im}(3 + 5i) = 5$.

Remarque 5. Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : pour tous nombres complexes z et z',

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z'). \end{cases}$$

L'ensemble des nombres complexes de la forme $a + 0i$ est naturellement identifié à $\mathbf{R}$. Un nombre réel est donc aussi un nombre complexe.

Définition 6.

Les nombres complexes de la forme ib où $b \in \mathbf{R}$ sont appelés les **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbf{R}$.

Exercice d'application 7. Soit a un nombre complexe et z le nombre complexe $z = a^2 + i(a + 1)$. Quelles sont les parties réelle et imaginaire de z ?

$\hookrightarrow$ On a $a = \mathfrak{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a)$. Alors

$$z = (\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a))^2+i(\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a)+1) = \mathfrak{Re}(a)^2-\mathfrak{Im}(a)^2+2i\,\mathfrak{Re}(a)\,\mathfrak{Im}(a)+i\,\mathfrak{Re}(a)-\mathfrak{Im}(a)+i$$

$$z = \left(\mathfrak{Re}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)\right) + i\,(2\,\mathfrak{Re}(a)\,\mathfrak{Im}(a) + \mathfrak{Re}(a) + 1)$$

On a bien mis z sous la forme $x + iy$ avec x et y réel, donc $\mathfrak{Re}(z) = \left(\mathfrak{Re}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)\right)$ et $\mathfrak{Im}(a) = (2\,\mathfrak{Re}(a)\,\mathfrak{Im}(a) + \mathfrak{Re}(a) + 1)$.

Proposition 8 - Linéarité des parties réelle et imaginaire.

Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$,

$$\mathfrak{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathfrak{Re}(z) + \mu\,\mathfrak{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathfrak{Im}(z) + \mu\,\mathfrak{Im}(z').$$

Démonstration.
On a :

$$\lambda z+\mu z' = \lambda(\mathfrak{Re}(z)+i\,\mathfrak{Im}(z))+\mu(\mathfrak{Re}(z')+i\,\mathfrak{Im}(z')) = \left(\lambda\,\mathfrak{Re}(z) + \mu\,\mathfrak{Re}(z')\right)+i\left(\lambda\,\mathfrak{Im}(z) + \mu\,\mathfrak{Im}(z')\right),$$

d'où le résultat. □

1.2. Structure de $\mathbf{C}$

On constate que :

- La somme de deux nombres complexes est un nombre complexe. On dit que l'addition sur $\mathbf{C}$ est **interne**.
  Toutes les opérations ne sont pas internes ; pensez au produit scalaire.
- L'addition sur $\mathbf{C}$ est **associative** :
  $$\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ (z+z')+z'' = z+(z'+z'').$$
  Toutes les opérations ne sont pas associatives ; pensez aux puissances : $(3^3)^3 \neq 3^{(3^3)}$.
- Le nombre complexe 0 est un **élément neutre** pour l'addition :
  $$\forall z \in \mathbf{C},\ z+0 = 0+z = z.$$
- Tout nombre complexe $z = a+ib$ admet un **opposé** dans $\mathbf{C}$, noté $-z$, qui est égal à $-a+i(-b)$. (l'opposé d'un nombre z est par définition un nombre z' tel que $z+z' = z'+z = 0$.)

Pour résumer ces quatre propriétés, on dit que $(\mathbf{C}, +)$ est un groupe.

- L'addition sur $\mathbf{C}$ est **commutative** :
  $$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ z+z' = z'+z.$$
  Toutes les opérations ne sont pas commutatives ; pensez à la soustraction des nombres réels.

Cette cinquième propriété permet de préciser la structure de $\mathbf{C}$: $(\mathbf{C}, +)$ est un groupe commutatif.

- Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe : la multiplication sur $\mathbf{C}$ est **interne**.
- La multiplication dans $\mathbf{C}$ est **associative** :
  $$\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ (zz')z'' = z(z'z'')$$
- Le nombre complexe 1 est un **élément neutre** pour la multiplication :
  $$\forall z \in \mathbf{C},\ z \times 1 = 1 \times z = z.$$
- La multiplication dans $\mathbf{C}$ est **distributive** par rapport à l'addition :
  $$\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ z(z'+z'') = zz'+zz'' \quad \text{et} \quad (z'+z'')z = z'z+z''z.$$
  Autrement dit : on peut développer !

Avec ces quatre nouvelles propriétés, ajoutées au cinq précédentes, on dit que : $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un anneau.

- La multiplication dans $\mathbf{C}$ est **commutative** :
  $$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ zz' = z'z.$$

Cette dixième propriété précise la structure de $(\mathbf{C}, +, \times)$: $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- Tout nombre complexe <u>non nul</u> admet un **inverse** (pour la multiplication) : Si $z = a+ib$ est un nombre complexe non nul , alors $z' = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$ vérifie $zz' = z'z = 1$.

Avec cette dernière propriété, ajoutée aux dix précédentes, on dit que : $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Remarque 9. $(\mathbf{R}, +, \times)$ est aussi un corps commutatif.

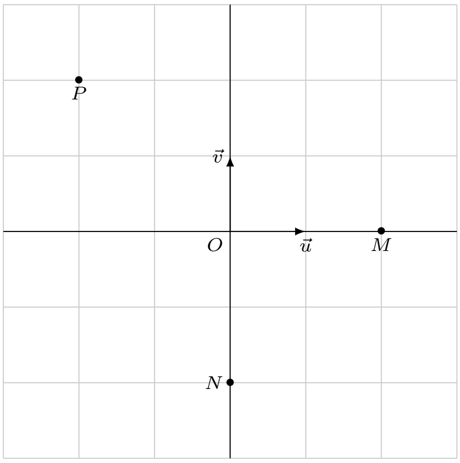
1.3. Le plan complexe

Définition 10.

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M du plan, de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $x + iy$, dit **affixe** de z. Réciproquement, pour tout nombre complexe $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, le point du plan de coordonnées (x, y) est l'unique point d'affixe z.
On appelle **plan complexe** (ou **plan de Cauchy**) cette représentation du plan euclidien par les nombres complexes.

Dans toute la suite, on se donne un plan de Cauchy muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exemple 11. Sur la figure ci-dessous, les points M, N et P sont d'affixes respectives 2, $-2i$ et $-2 + 2i$.



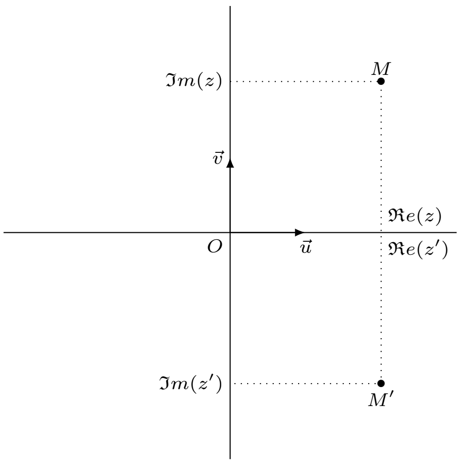
1.4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 12.

Soit $z \in \mathbf{C}$.
On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le complexe $\mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$.

Interprétation géométrique :

Soit $z \in \mathbf{C}$. Le point M' d'affixe $\overline{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des réels (*i.e.* l'axe des abscisses).
Ce résultat sera démontré ultérieurement.



Proposition 13.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
3. $\overline{-z} = -\overline{z}$;
4. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
5. si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

Démonstration.
On pose $a = \mathfrak{Re}(z)$, $b = \mathfrak{Im}(z)$, $a' = \mathfrak{Re}(z')$ et $b' = \mathfrak{Im}(z)$

1. $\overline{z} = a - ib$, donc $\overline{\overline{z}} = a + ib = z$.
2. $\overline{z + z'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - ib - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$.
3. $\overline{-z} = \overline{-a - ib} = -a + ib = -(a - ib) = -\overline{z}$.
4. $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = (a - ib)(a' - ib') = \overline{z} \times \overline{z'}$.
5. On suppose $z \neq 0$, donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

$$\overline{\left(\frac{1}{a + ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a - ib} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

□

Proposition 14.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

- $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$;
- $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;
- $z \in \mathbf{R}$ ssi $z = \overline{z}$;
- $z \in i\mathbf{R}$ ssi $z = -\overline{z}$.

Démonstration.
On a $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = a$ et $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b$ On en déduit que $z \in \mathbf{R}$ ssi $\mathfrak{Im}(z) = 0$ ssi $z - \overline{z} = 0$ ssi $z = \overline{z}$, et $z \in i\mathbf{R}$ ssi $\mathfrak{Re}(z) = 0$ ssi $z + \overline{z} = 0$ ssi $z = -\overline{z}$. □

◇◇

Remarque technique 15. Soit $z \in \mathbf{C}$. On a $z\overline{z} = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2$. Ainsi on peut déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe en multipliant son dénominateur et son numérateur par la forme conjuguée du dénominateur.

Exercice d'application 16. Écrire le nombre complexe $z = \dfrac{1 - i}{2 + 3i}$ sous forme algébrique.

$\hookrightarrow z = \dfrac{1 - i}{2 + 3i} = \dfrac{(1 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{2 - 2i - 3i - 3}{4 + 9} = \dfrac{-1}{13} + i\dfrac{-5}{13}$.

◇◇

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.1. Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbf{C}$. Puisque $z\overline{z} = \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2$, on a $z\overline{z} \in \mathbf{R}^+$. On peut donc poser :

Définition 17.

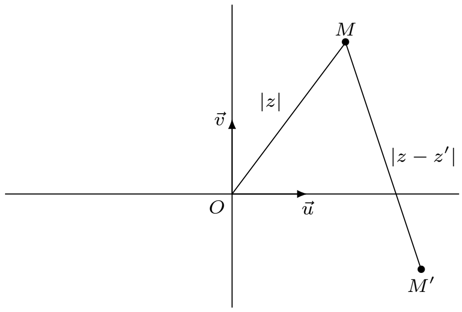
On appelle **module** d'un nombre complexe z et on note $|z|$ lé réel

$$\sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2}, \text{ ie } \sqrt{z\overline{z}}.$$

Interprétation géométrique :

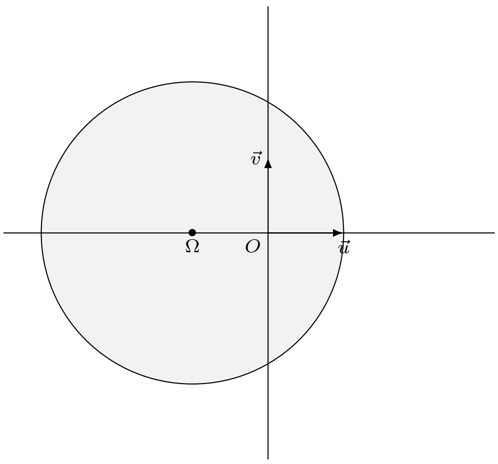
Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On considère M et M' d'affixes respectives z et z'. Alors :

- $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$.
- $|z - z'|$ est la distance entre M et M'.



Exercice d'application 18. Représenter l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait $|z + 1| \leqslant 2$.

$\hookrightarrow$ L'ensemble regroupe tous les points qui sont à une distance inférieure à 2 du point Ω d'affixe -1, *i.e.* le disque centré en Ω et de rayon 2.



Proposition 19.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$;
2. $|z| = 0$ ssi $z = 0$;
3. $|zz'| = |z| \times |z'|$;
4. si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$;

Démonstration. 3. $|zz'|^2 = z\bar{z}z'\bar{z'} = zz'\bar{z}\bar{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$.

Les autres points se montrent tout aussi facilement. $\square$

Lemme 20.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\begin{cases} |\Re e(z)| & \leqslant & |z| \\ |\Im m(z)| & \leqslant & |z| \end{cases}$$

Démonstration.
$|z^2| = \Im m(z)^2 + \Re e(z)^2$. Donc $|z|^2 \geqslant \Re e(z)^2$, puis $|z| \geqslant |\Re e(z)|$. L'autre point se montre de la même manière. $\square$

Lemme 21.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\Re e(z\overline{z'}) + |z'|^2$;
2. $|z - z'|^2 = |z|^2 - 2\,\Re e(z\overline{z'}) + |z'|^2$.

Démonstration.
1. $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z' + z'\overline{z'} = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,\Re e(z\overline{z'}) + |z'|^2$ d'après la Proposition 14.
2. En utilisant 1., on a : $|z - z'| = |z + (-z')| = |z|^2 + 2\,\Re e(z(\overline{-z'})) + |-z'|^2 = |z|^2 - 2\,\Re e(z\overline{z'}) + |z'|^2$. $\square$

Proposition 22 - Inégalités triangulaires.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On a :

- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (**inégalité triangulaire**).
- $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $z = kz'$.
- $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$ (**seconde inégalité triangulaire**).

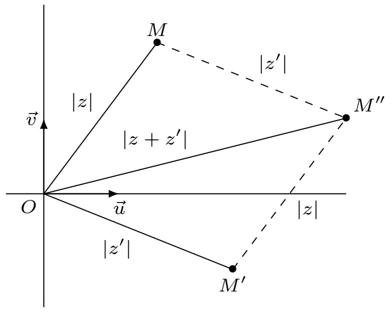
Démonstration.
- $\left(|z| + |z'|\right)^2 - |z + z'|^2 = 2|zz'| - 2\,\Re e(z\bar{z'}) = 2|z\bar{z'}| - 2\,\Re e(z\bar{z'})$.
  Or $|z\bar{z'}| \geqslant \Re e(z\bar{z'})$, donc $(|z| + |z'|)^2 \geqslant |z + z'|^2$, puis $|z| + |z'| \leqslant |z + z'|$.
- Supposons que $|z + z'| = |z| + |z'|$. Le calcul précédent donne $0 = |z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 = 2(|z\bar{z'}| - \Re e(z\bar{z'}))$, et cette égalité entraîne que $\Im m(z\bar{z'}) = 0$, puis que $z\bar{z'} \in \mathbf{R}$. Or $\Re e(z\bar{z'}) = |z\bar{z'}|$, d'où $z\bar{z'} \in \mathbf{R}_+$ (en effet, $|zz'|^2 = |z\bar{z'}|^2 = \Re e(z\bar{z'})^2 + \Im m(z\bar{z'})^2$, donc $\Im m(z\bar{z'}) = 0$ puis $\Re e(z\bar{z'}) = |z\bar{z'}| \geqslant 0$). Ainsi, il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $z\bar{z'} = k$ ce qui fournit, en multipliant par z', $z|z'|^2 = kz'$. Si $z' \neq 0$, alors $\bar{z} = \frac{k'}{|z'|^2}z'$.
  Si $z' = 0$, l'inégalité triangulaire est clairement une égalité. Supposons qu'il existe $k \in \mathbf{R}^+$ tel que $z = kz'$. Alors, puisque $k \geqslant 0$,
  $$|z + z'| = |(k + 1)z'| = (k + 1)|z'| = |kz'| + |z'| = |z| + |z'|.$$
- Puisque $(z + z', -z) \in \mathbf{C}^2$, on obtient avec le point précédent $|z'| \leqslant |z + z'| + |-z|$, puis $|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$.
  De même, puisque $(z + z', -z) \in \mathbf{C}^2$, $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$.
  Finalement, $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$. $\square$

<u>Interprétation géométrique :</u>

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On considère M, M' et M'' d'affixes respectives z, z' et $z + z'$. L'inégalité triangulaire peut se traduire par :

$$\|\overrightarrow{OM''}\| \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{OM'}\|.$$

avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et de même sens.



Corollaire 23 - Inégalité triangulaire généralisée.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n$,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} z_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{n} |z_p|.$$

Démonstration.
Une récurrence permet de conclure. □

2.2. Argument d'un complexe et écriture trigonométrique

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On note M le point d'affixe z. On note α une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$. On a :

$$\boxed{z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\boxed{\mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$$

Définition 24.

Pour tout $z \in \mathbf{C}^\star$, il existe un $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\alpha}$. α est appelé un **argument** de z.
Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. L'écriture de z sous la forme $z = |z|\mathrm{e}^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$, s'appelle **écriture trigonométrique** de z.

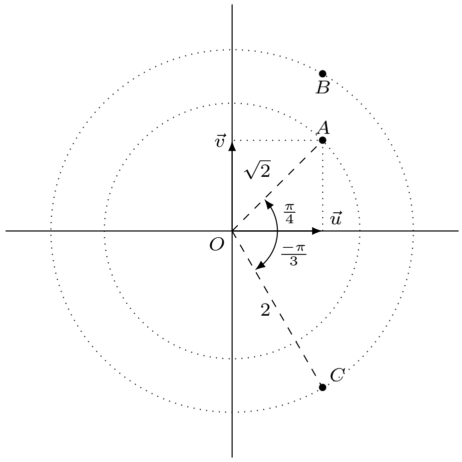
Remarque 25. 0 n'a pas d'écriture trigonométrique.

2.3. Calcul d'un argument

Exemple 26.

- $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;
- $1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$;
- $1-\sqrt{3}i=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

Sur la figure ci-contre, les points A, B et C sont d'affixes respectives $1+i$, $1+\sqrt{3}i$ et $1-\sqrt{3}i$.



◇◇

Remarque technique 27. Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tel que $a\neq 0$ et $b\neq 0$. On cherche à calculer numériquement un argument de $a+ib$. Cela revient à trouver $\alpha\in\mathbf{R}$ tel que :

$$\boxed{\cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Exercice d'application 28. Ecrire sous forme trigonométrique le complexe $z=1+\sqrt{3}i$.

$\hookrightarrow$ On a $|z|^2=1+3$, d'où $|z|=2$. De plus, pour $\theta\in\mathbf{R}$, le système :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

admet $\theta=\frac{\pi}{3}$ comme solution. Donc $z=2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 29. Si α n'est pas un angle remarquable, on remarque que

$$\tan(\alpha)=\frac{b}{a}.$$

On localise α dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, $\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ grâce aux signes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. On calcule ensuite $\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ et on remet dans le bon ensemble.

Exercice d'application 30. Calculer, à 10^{-3} près, un argument de $2-i$ appartenant à $[0,2\pi[$.

$\hookrightarrow$ On appelle α l'argument de $2-i$ appartement à $[0;2\pi[$. Comme $\cos\alpha>0$ et $\sin\alpha<0$, $\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$.
De plus, $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$. Comme $\mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{2}\right)=-0,463$ rad à 10^{-3} près, $\alpha=5,819$ rad à 10^{-3} près.

◇◇

◇◇

Remarque technique 31. Il faut être vigilant : si un nombre complexe est écrit sous la forme $re^{i\theta}$, où $(r,\theta)\in\mathbf{R}^2$, il n'est pas nécessairement sous sa forme trigonométrique. Si $r<0$, on écrit $re^{i\theta}=(-1)\times e^{i\pi}\times r\times e^{i\theta}=(-r)\times e^{i(\theta+\pi)}$ qui est sous forme trigonométrique.

Exercice d'application 32. Donner la forme trigonométrique de $-2e^{\frac{i\pi}{8}}$.

$\hookrightarrow$ On a $-2e^{\frac{i\pi}{8}} = 2e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{8}} = 2e^{\frac{9i\pi}{8}}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 33. Soit $(r, r', t, t') \in \mathbf{R}^4$.

Pour résoudre $re^{it} = r'e^{it'}$, il y a trois cas à traiter :

1. $r = r' = 0$;
2. $r = r'$ et $t - t' \equiv 0\ [2\pi]$;
3. $r = -r'$ et $t - t' \equiv \pi\ [2\pi]$.

Exercice d'application 34. Déterminer l'ensemble $\{(r, t) \in \mathbf{R}^2,\ re^{it} = 1 + i\}$.

$\hookrightarrow$ Soit $(r, t) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} re^{it} = 1 + i &\iff re^{it} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ t - \frac{\pi}{4} \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} r = -\sqrt{2} \\ t - \frac{\pi}{4} \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est égal à $\left\{\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\ :\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 35. Pour résoudre une équation d'inconnue $|z|$, $\overline{z}$, etc. il peut être utile de cherche z sous forme algébrique ou sous forme trigonométrique.

Exercice d'application 36. Résoudre l'équation $\dfrac{\overline{z}}{z+1} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

$\hookrightarrow$ Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\{1\}$. Notons $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$.

$$\frac{\overline{z}}{z+1} = 1 \iff a - ib = a + ib + 1$$

En observant la partie réelle de l'égalité précédente, on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde. Ainsi l'équation n'a pas de solution.

◇◇

2.4. Propriétés de l'exponentielle complexe

Proposition 37.

Soit $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

1. $e^{it}e^{it'} = e^{i(t+t')}$;
2. $\dfrac{1}{e^{it}} = e^{-it}$;
3. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$.

Démonstration. 1. $e^{it}e^{it'} = (\cos(t) + i\sin(t))(\cos(t') + i\sin(t')) = \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t') + i(\sin(t)\cos(t') + \sin(t)\cos(t')) = \cos(t + t') + i\sin(t + t') = e^{i(t+t')}$.

2. $e^{it}e^{-it} = e^{i(t-t} = 1$, donc $e^{-it} = \dfrac{1}{e^{it}}$.
3. $\overline{e^{it}} = \overline{(\cos(t) + i\sin(t)} = \cos(t) - i\sin(t) = \cos(-t) + i\sin(-t) = e^{-it}$. □

◇◇

Remarque technique 38. Soit $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

- $e^{it} + e^{it'} = 2\cos\left(\frac{t-t'}{2}\right) e^{i\frac{t+t'}{2}}$;
- $e^{it} - e^{it'} = 2i\sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) e^{i\frac{t+t'}{2}}$.

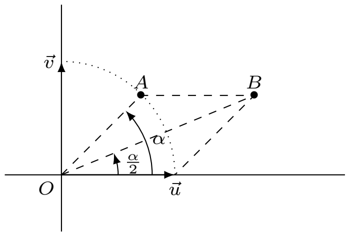
Démonstration.
$e^{it} + e^{it'} = e^{it'/2}(e^{i(t-t'/2)} + e^{it'/2}) = e^{it/2}e^{it'/2}(e^{i(t/2-t'/2)} + e^{i(t'/2-t/2)}) = 2e^{(t+t')/2}\cos((t-t')/2)$.
L'autre égalité se montre de la même manière. □

Exercice d'application 39. Trouver le module et un argument de $1+e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ $1+e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, $|1+e^{i\alpha}| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et un argument de $1+e^{i\alpha}$ est $\frac{\alpha}{2}$.
- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$, $|1+e^{i\alpha}| = 0$. Il n'y a pas d'argument.
- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$, $|1+e^{i\alpha}| = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et un argument de $1+e^{i\alpha}$ est $\frac{\alpha}{2}+\pi$.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha/2) > 0$. Sur la figure ci-contre, les points A et B sont pour affixes respectives $e^{i\alpha}$ et $1+e^{i\alpha}$.
On retrouve que dans un losange, les diagonales sont également les bissectrices des angles internes.



◇◇

On obtient en particulier qu'un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments, tous égaux à un multiple de 2π près. Ainsi :

Définition 40.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On appelle **argument principal** de z, et on note $\arg(z)$, l'unique argument de z situé dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Avec la Proposition 37, on obtient les règles opératoires suivantes :

$$\boxed{\forall (z,z') \in (\mathbf{C}^\star)^2,\ \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]}$$

Proposition 41.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$.
1. $z \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$.
2. $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Démonstration.
Notons θ un argument de z.
1. $z \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\mathfrak{Im}(z) = 0$, si et seulement si $\sin(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$.
2. $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, si et seulement si $\cos(\theta) = 0$, si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. □

2.5. Applications de l'exponentielle complexe

Proposition 42 - formule de Moivre.

Pour tout $(n, t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$,
$$(\mathrm{e}^{it})^n = \mathrm{e}^{int}.$$

Démonstration.
On démontre la formule pour tout $n \in \mathbf{N}$ par récurrence, puis on en déduit que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbf{Z}$ en utilisant $(\mathrm{e}^{it})^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{-it}$. □

Une application usuelle de cette formule est la factorisation de formes trigonométriques.

Exemple 43. Soit $x \in \mathbf{R}$.
$$\cos(3x) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{3ix}) = \mathfrak{Re}((\mathrm{e}^{ix})^3) = \mathfrak{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x).$$

De même,
$$\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).$$

Proposition 44 - formules d'Euler.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}.$$

Une application de ces formules est la linéarisation des expressions trigonométriques.

Exemple 45. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$\sin(x)^3\cos(x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{+ix}}{2}\right)^2$. Donc $\sin(x)^3\cos(x)^2 = -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)$.

Une autre application des formules d'Euler est le calcul explicite de sommes de fonctions trigonométriques.

Exemple 46. Soit $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$. On pose $S = \sum_{p=0}^{n} \sin(px)$.
$$S = \sum_{p=0}^{n} \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{ipx}) = \mathfrak{Im} \sum_{p=0}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^p.$$

- Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, $S = 0$.
- Si x n'est pas congru à $0\ [2\pi]$, $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$, puis :
$$S = \mathfrak{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1}\right) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2}.$$

Exemple 47. Soit $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$. On pose $S = \sum_{p=0}^{n} (\cos(px))^3$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\cos(px)^3 = \dfrac{1}{4}(\cos(3px) + 3\cos(px))$. Donc $S = \dfrac{1}{4}\mathfrak{Re}\left(\sum_{p=0}^{n}(\mathrm{e}^{i3x})^p\right) + \dfrac{3}{4}\mathfrak{Re}\left(\sum_{p=0}^{n}(\mathrm{e}^{ix})^p\right)$.

On distingue trois cas :

1. Si $x \equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\cos(px) = 1$. Donc $S = n+1$.
2. Si $x \equiv 0\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas $\mathrm{e}^{i3x} = 1$ et $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$.
$$S = \frac{n+1}{4} + \frac{3\cos\frac{nx}{2} + \sin\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}.$$
3. Si $x \not\equiv 0\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas $\mathrm{e}^{i3x} \neq 1$ et $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$.
$$S = \frac{\cos\frac{3nx}{2}\sin\frac{3(n+1)x}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}} + \frac{3\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}.$$

3. Racine n-ièmes d'un complexe

3.1. Définition et expression

Définition 48.

Soit $z \in \mathbf{C}$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Une **racine n-ième** de z est un complexe z' tel que $(z')^n = z$.

- Si $n = 1$, z admet une seul racine 1-ième (lui-même).
- Si n est quelconque, 0 admet une seule racine n-ième (lui-même).

Théorème 49.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. z admet n racine n-ième. En notant S l'ensemble des racines n-ième de $r\mathrm{e}^{it}$, $(r,t) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$, on a :
$$S = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i},\ k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i},\ k \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Démonstration. • Soit $z' \in \mathbf{C}^\star$. Il existe $(r,r',t,t') \in (\mathbf{R}^{+\star})^2 \times \mathbf{R}^2$ tel que $\begin{cases} z &= r\mathrm{e}^{it} \\ z' &= r'\mathrm{e}^{it'} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
(z')^n = z &\iff (r'\mathrm{e}^{it'})^n = r\mathrm{e}^{it} \\
&\iff (r')^n\mathrm{e}^{itn'} = r\mathrm{e}^{it} \\
&\iff \begin{cases} (r')^n &= r \\ t - nt' &\equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r' &= r^{\frac{1}{n}} \\ \text{il existe } k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } t' &= \dfrac{t}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme 0 ne vérifie par $0^n = z$,
$$S = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i},\ k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- On pose $S' = \left\{ r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.
  - Par définition, $S' \subset S$.
  - Soit $z \in S$. Il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i}$. Comme $n \neq 0$, il existe $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $k = an + b$ et $b \in [\![0, n-1]\!]$.

    $$z = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2(an+b)\pi}{n}\right)i} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2b\pi}{n}\right)i}.$$

    Finalement, $z \in S'$. Donc $S' \subset S$.
  - Donc $S = S'$.
- Soit $(k, k') \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)i}$.
  On sait que $\dfrac{t}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} - \left(\dfrac{t}{n} + \dfrac{2k'\pi}{n}\right) \equiv 0\ [2\pi]$, ie $n | k - k'$.
  Or $\left\{ \begin{array}{c} 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 1-n \leqslant -k' \leqslant 0 \end{array} \right.$, donc $1 - n \leqslant k - k' \leqslant n - 1$, puis $k = k'$.
  On en déduit que $\mathrm{card}(S') = n$. $\square$

Définition 50.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle **racine n-ième de l'unité** les racines n-ièmes de 1.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :

$$\mathbf{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{2i\frac{k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

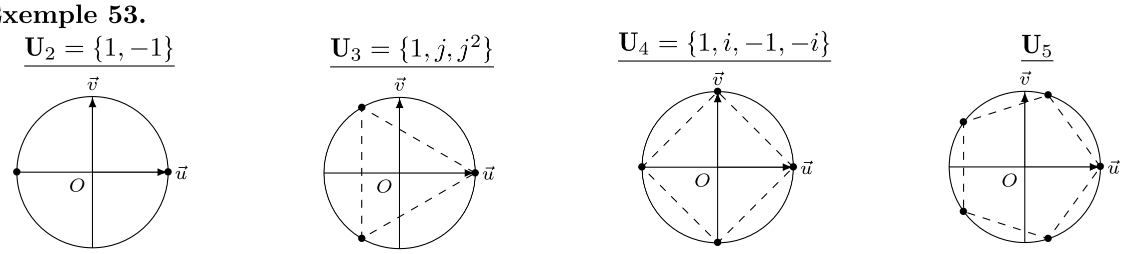
Les racines n-ièmes d'un nombre complexe $z \neq 0$ sont obtenues en multipliant une racine n-ième quelconque par les racines n-ièmes de l'unité.

Remarque technique 51. $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a : $\left\{ \begin{array}{rcl} j^3 & = & 1 \\ \bar{j} & = & j^2 \\ 1 + j + j^2 & = & 0 \end{array} \right.$.

Exercice d'application 52. Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\dfrac{(1+3j)^2}{1-2j^2} = a + bj$.

$\hookrightarrow \dfrac{(1+3j)^2(1-2j)}{(1-2j^2)(1-2j)} = \dfrac{(1+6j+9j^2)(1-2j)}{1-2j^2-2j+4j^3} = \dfrac{1-2j+6j-12j^2+9j^2-18j^3}{7}$.
Finalement, $\dfrac{(1+3j)^2}{1-2j^2} = -2 + j$.

Exemple 53.



Proposition 54.

Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

$$\sum_{z \in \mathbf{U}_n} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{2i\pi/n})^k = \frac{\mathrm{e}^{2i\pi} - 1}{\mathrm{e}^{2i\pi/n} - 1} = 0.$$

□

◇◇

Remarque technique 55. Soit $(a, b, n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$. Soit α une racine n-ième de -1.

$$a^n + b^n = (a - \alpha b) \sum_{p=0}^{n-1} a^n (\alpha b)^{n-p-1}.$$

Si n est impair, on peut choisir $\alpha = -1$.

◇◇

Exemple 56. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. Avec la remarque technique précédente, on a $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$, $a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (ces identités sont à connaître par cœur).

Remarque 57. La notation $\sqrt{x}$ n'est valable que pour $x \in \mathbf{R}_+$ (elle désigne alors l'unique racine 2-ième positive de x, au sens de la Définition 48). En particulier, il est interdit d'utiliser le symbole $\sqrt{\cdot}$ pour les éléments de $\mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_+$.

3.2. Calcul des racines n-ièmes

Le calcul des racines n-ièmes d'un complexe est immédiat si z est donné sous forme trigonométrique.

Exercice d'application 58. Déterminer les racines 3-ièmes de $1 + i$.

$\hookrightarrow$ On a $1 + i = 2^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, donc l'ensemble des racines 3-ièmes de $1 + i$ est :

$$\left\{ 2^{\frac{1}{6}} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}},\ 2^{\frac{1}{6}} \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)},\ 2^{\frac{1}{6}} \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} \right\}.$$

On peut aussi calculer les racines carrées d'un complexe donné sous forme algébrique :

◇◇

Remarque technique 59. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Notons z une racine de α. Alors, par identification du module, de la partie réelle et de la partie imaginaire dans l'égalité $z^2 = \alpha$, on tire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 & = & |\alpha| \\ \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2 & = & \mathfrak{Re}(\alpha) \\ 2\,\mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Im}(z) & = & \mathfrak{Im}(\alpha) \end{array} \right. .$$

Exercice d'application 60. Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$.

$\hookrightarrow$ $3+4i$ admet deux racines carrées opposés l'une de l'autre. Il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $(a+ib)^2 = 3+4i$. En particulier, $|a + ib|^2 = 5$. On peut aussi identifier les parties réelle et imaginaire.
Donc $\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + b^2 & = & 5 \\ a^2 - b^2 & = & 3 \\ 2ab & = & +4 \end{array} \right.$, donc $\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2 & = & 1 \\ ab & > & 0 \end{array} \right.$, puis $(a, b) = (2, 1)$ ou $(a, b) = (-2, -1)$. Ainsi les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$.

◇◇

3.3. Equation du second degré

On se donne $(a,b,c) \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^2$ pour tout la suite. On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue $x \in \mathbf{C}$. Soit $x \in \mathbf{C}$.

$$\begin{array}{rclcl}
ax^2+bx+c=0 & \Longleftrightarrow & a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right) & = & 0 \\
 & \Longleftrightarrow & a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}\right) & = & 0 \\
 & \Longleftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} & = & 0
\end{array}$$

On appelle δ une racine carrée de b^2-4ac (qui est le discriminant de l'équation).

$$\begin{array}{rclcl}
ax^2+bx+c=0 & \Longleftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2 & = & 0 \\
 & \Longleftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\delta}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\delta}{2a}\right) & = & 0
\end{array}$$

Proposition 61.

L'ensemble des solutions de $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue $x \in \mathbf{C}$ est $\left\{\dfrac{-b+\delta}{2a}, \dfrac{-b-\delta}{2a}\right\}$ avec $\delta^2 = b^2-4ac$.

Définition 62.

Les solutions de $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue $x \in \mathbf{C}$ sont dites des **racines** de l'équation. Le nombre b^2-4ac est appelé **discriminant** de l'équation.

Exercice d'application 63. Résoudre $z^2+(3i-4)z+1-7i=0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

$\hookrightarrow$ Le discriminant de l'équation est $3+4i$. On a obtenu à l'Exercice d'Application 60 qu'une racine de $3+4i$ est $2+i$. On en déduit que les solutions de l'équation sont $\frac{-(3i-4)+(2+i)}{2} = 3-i$ et $\frac{-(3i-4)-(2+i)}{2} = 1-2i$.

On appelle x_0 et x_1 les solutions éventuellement confondues de l'équation manipulée.

Soit $x \in \mathbf{C}$. $ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a(x-x_0)(x-x_1)=0$. Donc $ax^2+bx+c = ax^2-a(x_0+x_1)x+ax_0x_1$. Comme cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbf{C}$,

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x_0+x_1 & = & -\dfrac{b}{a} \\ x_0x_1 & = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right.}$$

Ces égalités sont appelées **relations coefficients-racines**.

Exercice d'application 64. On considère l'équation $2z^2-iz+1+i=0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. Calculer la somme des cubes des solutions de l'équation.

$\hookrightarrow$ On appelle x_0 et x_1 les solutions de l'équation. On sait que $\left\{\begin{array}{rcl} x_0+x_1 &=& \frac{i}{2} \\ x_0x_1 &=& \frac{1+i}{2} \end{array}\right.$.

$$\begin{aligned} x_0^3+x_1^3 &= (x_0+x_1)^3-3x_0^2x_1-3x_0x_1^2 \\ &= (x_0+x_1)^3-3x_0x_1(x_0+x_1) \\ &= \left(\tfrac{i}{2}\right)^3-3\tfrac{i+1}{2}\times\tfrac{i}{2} \\ &= \tfrac{6-7i}{8}. \end{aligned}$$

4. Nombres complexes et géométrie plane

Définition 65.

Si A et B sont deux points du plan d'affixes z_A et z_B, on appelle **affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe z_B-z_A. Il s'agit de l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$.

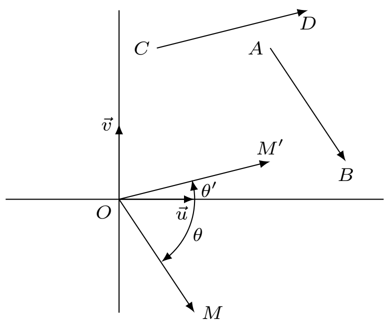
Proposition 66.

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Le réel

$$\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$$

est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$.

Démonstration.
La notion d'angle orienté n'ayant pas encore été explicitement étudiée, le texte qui suit correspond plutôt à une explication qu'à une démonstration.



On se donne M et M' deux points du plan satisfaisant $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{CD}$. Notons θ l'argument principal de z_B-z_A. C'est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}})$. De même, notons θ' l'argument principal de z_D-z_C, qui est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM'}})$. Le nombre $\theta'-\theta$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})$ (on le « voit » sur la figure, mais nous ne l'avons pas démontré...), donc de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$. On peut désormais conclure en écrivant :

$$\theta'-\theta=\arg(z_D-z_C)-\arg(z_B-z_A),$$

d'où

$$\theta'-\theta\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi].$$

□

Corollaire 67.

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a :

1. $(AB) \mathbin{/\!/} (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.
2. A, B et C sont alignés ssi $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.
3. $(AB) \perp (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbf{R}$.

Démonstration. 1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, *i.e.* si 0 ou π est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$. On a donc :

$$(AB) \mathbin{/\!/} (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$$

d'après la Proposition 66.

2. Les points A, B et C sont alignés ssi $(AB) \mathbin{/\!/} (AC)$. On conclut en conduisant un raisonnement similaire à celui de 1.
3. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, *i.e.* si $\pi/2$ ou $-\pi/2$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$. On a donc

$$(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbf{R}$$

d'après la Proposition 66. □

Exercice d'application 68. Soient A, B et C trois points distincts non alignés, d'affixes respectives a, b et c. Démontrer que le centre du triangle ABC a pour affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

↪ Posons $a' = \frac{b+c}{2}$ l'affixe du milieu de $[BC]$ et $g = \frac{a+b+c}{3}$. On a :

$$g - a = \frac{b+c-2a}{3} \quad \text{et} \quad g - a' = \frac{2a-b-c}{6},$$

donc,

$$\frac{g-a}{g-a'} = \frac{2b+2c-4a}{2a-b-c} = \frac{-1}{2}.$$

Puisque ce dernier nombre est réel, on obtient avec le Corollaire 67 que G, C et C' sont alignés, *i.e.* G appartient à la médiane issue de C.
Étant donné la symétrie du problème, on montre de la même manière que G appartient à la médiane issue de A. Ainsi G est le centre de gravité de ABC.

Remarque 69. Soient A et B deux points distincts, d'affixes respectives a et b. Soit C un point d'affixe c. En adaptant la démonstration précédente, on peut montrer que :

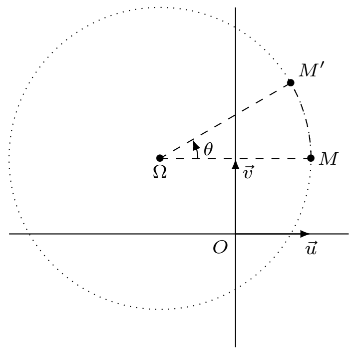
$$(AB) \perp (AC) \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbf{R}.$$

Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$. Si M est d'affixe z, f permet de lui associer naturellement un point M' d'affixe $f(z)$. On peut donc voir f comme une transformation du plan.

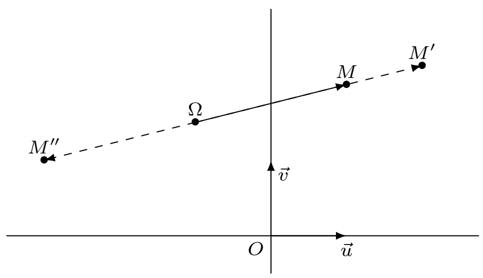
Définition 70.

- Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :
  a) $\Omega M = \Omega M'$;
  b) si $M \neq \Omega$, une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$ vaut θ.
- Soit Ω un point du plan et k un réel. L'**homothétie** de rapport k est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Exemple de rotation. Ω et M sont deux points du plan, et M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.



Exemples d'homothéties. Ω et M sont deux points du plan. M' (resp. M'') est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$ (resp. -1).



Proposition 71.

- Si $\theta \in \mathbf{R}$, la transformation $z \longmapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.
- Si $b \in \mathbf{C}$, la transformation $z \longmapsto z + b$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$, où B est le point d'affixe b.
- Si $k \in \mathbf{R}$, la transformation $z \longmapsto kz$ est l'homothétie de rapport k et de centre O.
- La transformation $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}\vec{u}$ (l'axe des abscisses).

Démonstration.
Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbf{C}$.

- Notons M' le point d'affixe $e^{i\theta}z$. Si $M = O$ (*i.e.* $z = 0$) alors $e^{i\theta}z = 0$, puis $M' = O$. Supposons $M \neq O$. On a $OM' = |e^{i\theta}z| = |z| = OM$. D'autre part, d'après la Proposition 66, une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ est :

$$\arg\left(\frac{e^{i\theta}z - 0}{z - 0}\right) = \arg(e^{i\theta}),$$

ce qui entraîne qu'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ vaut θ. Ainsi M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.

- Notons M' le point d'affixe $z + b$. Alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z + b - z = b$, donc M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
- Notons M' le point d'affixe kz. Alors $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe kz et $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z, d'où

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

Ainsi M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Notons M' le point d'affixe $\bar{z}$. Le centre de $[MM']$ a pour affixe le nombre réel $\frac{z+\bar{z}}{2}$, donc il appartient à l'axe des abscisses. Par ailleurs,

$$\frac{\bar{z} - z}{1 - 0} \in i\mathbf{R},$$

donc les droites (OI) et (MM') sont perpendiculaires (où I est le point d'affixe 1) d'après le Corollaire 67. Ainsi M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses. □

En pratique, on utilisera plutôt le résultat suivant (qu'il faut être capable de démontrer) et qui généralise la proposition précédente.

Proposition 72.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

1. Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbf{C}$, soit $\theta \in \mathbf{R}$.
   f est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. Soit $\vec{b}$ un vecteur d'affixe $b \in \mathbf{C}$.
   f est la translation de vecteur $\vec{b}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = z + b.$$

3. Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbf{C}$, soit $k \in \mathbf{R}$.
   f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) - \omega = k(z - \omega).$$

Démonstration.
Soit M, M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.

1. Supposons $M \neq \Omega$ et notons r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

$$\begin{aligned}
M' = r(M) \quad &\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} |\Omega M'| &=& |\Omega M| \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) &\equiv& \theta \ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} |z' - \omega| &=& |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) &\equiv& \theta \ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} |z' - \omega| &=& |z - \omega| \\ \arg(z' - \omega) &\equiv& \arg(e^{i\theta}(z - \omega)) \ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \quad f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).
\end{aligned}$$

Si $M = \Omega$, $f(z) = z$ et $z - \omega = 0$, d'où $f(z) - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$.

2. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{b}$ *ssi* $\overrightarrow{MM'} = \vec{b}$ *ssi* $z' - z = b$ *ssi* $z' = z + b$ *ssi* $f(z) = z + b$.
3. M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k *ssi* $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ *ssi* $z' - \omega = k(z - \omega)$ *ssi* $f(z) - \omega = k(z - \omega)$. □

◇◇

Remarque technique 73. La proposition précédente est utile pour déterminer la nature (*i.e.* donner la transformation géométrique associée) d'une application complexe $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. Les translations sont immédiates à identifier. On identifie les rotations (resp. les homothéties) comme les applications affines où z est multiplié par un nombre complexe de module 1 (resp. par un nombre réel). Pour les rotations, on écrira

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z + \omega(1 - \mathrm{e}^{i\theta}).$$

Sous cette forme, $\mathrm{e}^{i\theta}$ est immédiat à déterminer ; pour trouver ω, on factorise le terme constant par $1 - \mathrm{e}^{i\theta}$.
Pour les homothéties, on écrira

$$f(z) = kz + (1 - k)\omega.$$

Sous cette forme, k est immédiat à déterminer ; pour trouver ω, on factorise le terme constant par $1 - k$.

Exercice d'application 74. Déterminer la nature des applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & -5z - 18 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & iz - 3i \end{array}$.

$\hookrightarrow$

1. Soit $z \in \mathbf{C}$. On reconnaît une homothétie, de rapport $k = -5$. Notons ω l'affixe du centre.

$$f(z) = \underbrace{-5}_{k} \times z + \underbrace{(1 - (-5))}_{1-k} \times \underbrace{\frac{-18}{6}}_{\omega}$$

Ainsi f est une homothétie de rapport -5 et de centre le point d'affixe $-\frac{18}{6}$.

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. On reconnaît une rotation, d'angle de mesure principale $\frac{\pi}{2}$. Notons ω l'affixe du centre.

$$f(z) = \underbrace{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}}_{\mathrm{e}^{i\theta}} \times z + (\underbrace{1 - i}_{1-\mathrm{e}^{i\theta}}) \times \underbrace{\frac{-3i}{1 - i}}_{\omega}$$

Ainsi f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\frac{-3i}{1-i} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

◇◇

5. Fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbf{R}$.

5.1. Présentation

Définition 75.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$. On définit les fonctions **partie réelle** et **partie imaginaire** de f respectivement par

$$\mathfrak{Re}(f) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{Re}(f(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(f) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{Im}(f(x)) \end{array}.$$

Les propriétés de la fonction complexe $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ se ramène alors eux propriétés des fonctions réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$.

Proposition 76.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$. La fonction f est continue si et seulement si les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont.

Démonstration.
Notons $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$. Pour tout $a \in I$, montrons que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a)$ si et seulement si les limites de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ existent et valent respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$.
Si les limites quand x tend vers a de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ existent et valent respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$, alors on a $\lim_{x\to a} f(x) = f_1(a) + i f_2(a) = f(a)$.
Réciproquement, supposons que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a)$. Alors on a pour tout $x \in I$,

$$|f_1(x) - f_1(a)| = |\mathfrak{Re}(f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)|,$$

puis, par encadrement, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = f_1(a)$. On montre de même que $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = f_2(a)$. □

Proposition 77.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$. La fonction f est dérivable sur I si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables sur I. Le cas échéant, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\,\mathfrak{Im}(f)'(x).$$

Démonstration.
On note $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$. Soit $a \in I$. Soit $x \neq a$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + i\frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a}.$$

Si f_1 et f_2 sont dérivables, alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = f_1'(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = f_2'(a)$, d'où l'existence de la limite : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f_1'(a) + i f_2'(a) = f'(a)$.
Réciproquement, supposons f dérivable.

$$\left|\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} - \mathfrak{Re}(f'(a))\right| = \left|\mathfrak{Re}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right)\right| \leqslant \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

d'où $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ dérivable (avec $\mathfrak{Re}(f)'(a) = \mathfrak{Re}(f'(a))$). De même, on montre que f_2 est dérivable. □

Exemple 78. Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + ie^x \end{array}$. On a $\mathfrak{Re}(f) = \sin$ et $\mathfrak{Im}(f) = \exp$ dérivables, donc f est dérivable avec $f' : x \longmapsto \cos(x) + ie^x$.

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes. Citons par exemple :

Proposition 79.

Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^2$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable, fg est dérivable et, si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable avec

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration.
Montrons par exemple que $(fg)' = f'g + fg'$. Notons f_1, f_2, g_1, g_2 les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f et de g. On a

$$fg = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + i(f_1 g_2 + f_2 g_1).$$

On dérive alors fg en dérivant parties réelles et imaginaires :

$$(fg)' = (f_1' g_1 + f_1 g_1' - f_2' g_2 - f_2 g_2') + i(f_1' g_2 + f_1 g_2' + f_2' g_1 + f_2 g_1').$$

On vérifie qu'on a alors bien :

$$(fg)' = (f_1' + i f_2')(g_1 + i g_2) + (f_1 + i f_2)(g_1' + i g_2') = f'g + fg'.$$

□

5.2. Exponentielle complexe

Définition 80.

Soit $z \in \mathbf{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** par

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\Re e(z)} \mathrm{e}^{i\,\Im m(z)} = \mathrm{e}^{\Re e(z)}(\cos(\Im m(z)) + i \sin(\Im m(z))).$$

Proposition 81.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re e(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \Im m(z)\ [2\pi]$.
2. $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.
3. $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.
4. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ z - z' = 2ik\pi$ (on note parfois $z - z' \in 2i\pi\mathbf{Z}$).

Démonstration. 1. Direct avec la définition.

2. $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+z'} &= \mathrm{e}^{\Re e(z+z')} \mathrm{e}^{i\,\Im m(z+z')} \\ &= \mathrm{e}^{\Re e(z) + \Re e(z')} \mathrm{e}^{i(\Im m(z) + \Im m(z'))} \\ &= \mathrm{e}^{\Re e(z)} \mathrm{e}^{\Re e(z')} \mathrm{e}^{i\,\Im m(z)} \mathrm{e}^{i\,\Im m(z')} \\ &= \mathrm{e}^{\Re e(z) + i\,\Im m(z)} \mathrm{e}^{\Re e(z') + i\,\Im m(z')} \\ &= \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} \end{aligned}$$

3. $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z}$ d'après la question précédente.

4. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \Re e(z) & = & \Re e(z') \\ \arg(\mathrm{e}^z) & \equiv & \arg(\mathrm{e}^{z'})\ [2\pi] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \Re e(z) & = & \Re e(z') \\ \Im m(z) & \equiv & \Im m(z')\ [2\pi] \end{array} \right.$.

   Ainsi, si $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$, $z - z' = i(\Im m(z) - \Im m(z')) \in 2i\pi\mathbf{Z}$.
   Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z - z' = 2ik\pi$, alors $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'+2ik\pi} = \mathrm{e}^{z'} \mathrm{e}^{2ik\pi} = \mathrm{e}^{z'}$. □

Exercice d'application 82. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 3(1+\sqrt{3}i)$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

$\hookrightarrow$ On utilise la proposition précédente. Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\mathrm{e}^z = 3(1+\sqrt{3}i) \iff \mathrm{e}^z = 6\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \iff \mathrm{e}^z = \exp\left(\ln(6) + i\frac{\pi}{3}\right) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ z = \ln(6) + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\ln(6) + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi \ :\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

6. Fonction exponentielle complexe

Définition 83.

On appelle **fonction exponentielle complexe** la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$.

Théorème 84.

Soit $\phi \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\phi(t)} \end{array}$ est dérivable sur I, avec :

$$f' : t \longmapsto \phi'(t)\mathrm{e}^{\phi(t)}.$$

Démonstration.

On note $\phi_1 = \Re e(\phi)$ et $\phi_2 = \Im m(\phi)$. Par compositions, produits et sommes de fonctions dérivables sur I, $\exp(\phi)$ est dérivable sur I. En utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \exp(\phi)' & = & \exp(\phi_1 + i\phi_2)' \\ & = & (\phi_1 + i\phi_2)' \exp(\phi_1 + i\phi_2) \\ & = & \phi_1' \exp(\phi_1)(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) + \exp(\phi_1)(-\phi_2' \sin(\phi_2) + \phi_2' i\cos(\phi_2)) \\ & = & (\phi_1' + i\phi_2') \exp(\phi_1)(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) \\ & = & \phi' \exp(\phi). \end{array}$$

$\square$

Exemple 85. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. La dérivée de $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est $t \longmapsto \alpha\mathrm{e}^{\alpha t}$.

Exercice d'application 86. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin(\sqrt{3}x)$.

$\hookrightarrow$ On peut écrire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \Im m(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\sqrt{3}ix})$. Posons $g : x \longmapsto \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\sqrt{3}ix}$. Pour obtenir la dérivée n-ième de f, il suffit de prendre la partie imaginaire de la dérivée n-ième de g. Or g est clairement dérivable à tout ordre sur $\mathbf{R}$ avec, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$g^{(n)}(x) = (1 + i\sqrt{3})^n g(x) = 2^n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} g(x) = 2^n \mathrm{e}^x \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}x\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}x\right)\right).$$

On en déduit que $f^{(n)} : x \longmapsto 2^n \mathrm{e}^x \sin(\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}x)$.