

Chapitre 5

Primitives et équations différentielles linéaires

 'équation différentielle est une façon de regarder.

Antoine de Saint-Exupéry¹

1. Primitives

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et non vide, et $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1.1. Présentation

Définition 1.

Soit f une fonction réelle définie sur I . On appelle **primitive** de f toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 2. La fonction sin est une primitive de la fonction cos sur $\mathbf{R}$.

Théorème 3.

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$. On appelle F une primitive de f . L'ensemble des primitives de f est $\{F + c : c \in \mathbf{K}\}$. De plus, pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbf{K}$, il existe une unique primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0 .

1. Antoine de Saint-Exupéry - écrivain, poète et aviateur français (1900-1944), célèbre auteur du roman *Le Petit Prince*

Démonstration. • Soit $G \in \{F + c : c \in \mathbf{K}\}$. Il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + c$. G est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables et $G' = (F + c)' = F' = f$. Donc G est une primitive de f .

- Soit G une primitive de f . Par définition, G est dérivable et $G' = f$. Donc $G' = F'$, i.e. $(G - F)' = 0$. Donc, puisque I est un intervalle, il existe $c \in \mathbf{K}$ tel que $G - F = c$.

Ainsi $\{F + c : c \in \mathbf{K}\}$ est l'ensemble des primitives de f .

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$. $F - F(t_0) + y_0$ est une primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0 , qu'on note F_0 . Soit G une primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0 . Il existe $c \in \mathbf{K}$ tel que $G = F_0 + c$. En particulier, $c = G(t_0) - F(t_0) = y_0 - y_0 = 0$. Donc $G = F_0$.

Finalement, on a l'unicité de la primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0 . $\square$

Exemple 4. L'ensemble des primitives de $\cos$ est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \sin(x) + c \end{array} : c \in \mathbf{R} \right\}$$

D'après le Théorème 3, il existe par ailleurs une unique primitive de $\cos$ qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Notons F cette primitive. Il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $F : x \longmapsto \sin(x) + c$. On a $F(\frac{\pi}{4}) = 0$ qui se réécrit $\sin(\frac{\pi}{4}) + c = 0$, i.e. $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finalement, $F : x \longmapsto \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. L'**intégrale de Riemann** sera construite plus tard dans l'année, et on donnera un sens au nombre $\int_a^b f(t) dt$ dès que f est continue sur $[a; b]$. En attendant, rappelons quelques propriétés entrevues au lycée :

- **positivité** : si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt$ est un nombre positif.
- **opposé** : si f est une fonction continue sur $[a; b]$, par définition,

$$\int_a^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

- **relation de Chasles** : si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et $c \in [a; b]$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

- **inégalité triangulaire** : si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Théorème 5 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue sur I , soit $a \in I$. La fonction

$$\begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{array}$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Démonstration.

Ce résultat, qui n'est pas évident, est admis pour l'instant. Il sera démontré ultérieurement. $\square$

Exemple 6. La fonction $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable, et sa dérivée est la fonction cos.

$$x \longmapsto \int_{\frac{\pi}{4}}^x \cos(t) dt$$

Notons que $F(\frac{\pi}{4}) = 0$, donc on a démontré avant que $F : x \longmapsto \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Corollaire 7.

Si une fonction est continue sur un intervalle, elle y admet des primitives.

Démonstration.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. Soit $a \in I$. Alors $x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . $\square$

Exemple 8. 1. Une primitive de $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.
 $t \longmapsto e^{-t^2} \quad x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$

2. Une primitive de $\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ est $\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$.
 $t \longmapsto \ln(t)^2 \quad x \longmapsto \int_1^x \ln(t)^2 dt$

Il existe des fonctions discontinues admettant des primitives :

Exemple 9. Considérons :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} & \text{et } F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \longmapsto 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \longmapsto 0 & \end{array}$$

F est dérivable et $F' = f$.

Il existe aussi des fonctions définies sur une intervalle qui n'admettent pas de primitives (elles sont nécessairement discontinues!) :

Exemple 10. Considérons :

$$\begin{array}{ll} f : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 \longmapsto 1 & \end{array}$$

On suppose que f admet une primitive F . $F|_{[0,1[}$ est une primitive de $f|_{[0,1[}$, donc il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $F|_{[0,1[} = c$. Comme $F \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $F = c$. Donc $F' = 0$, puis $F'(1) = 0$, i.e. $1 = 0$, ce qui est absurde. Finalement, f n'admet pas de primitive.

Théorème 11 - Théorème fondamental de l'analyse - autre formulation.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue et F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

On note $\left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration.

Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. D'après les Théorèmes 3 et 5, il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = c + \int_a^x f(t) dt.$$

On a donc,

$$F(b) - F(a) = c + \int_a^b f(t) dt - c - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

□

Exemple 12. On a $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt = \left[-\cos(t) \right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = 0$.

Proposition 13.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ une fonction continue. Soit $a \in I$. Posons

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbf{K} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

Si f est continue, F est dérivable et $F' = f$.

Remarque 14. Si f n'est pas continue, on peut avoir $F' \neq f$ dans le cas général.

Corollaire 15.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a; b])$.

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Démonstration.

Posons

$$\begin{aligned} g : [a; b] &\longrightarrow \mathbf{R} & \text{et} & & h : [a; b] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f'(t) dt & & & x &\longmapsto f(x) - f(a) \end{aligned}$$

h est dérivable et $h' = f'$. Comme f' est continue, g est dérivable et $g' = f'$, puis $(g - h)' = 0$. Comme $g(a) = h(a)$, on obtient $g = h$. En particulier, $g(b) = h(b)$. □

Remarque 16. A partir de ce résultat, on retrouve immédiatement le Théorème 11 (mais dans un cadre moins général).

1.2. Calculs simples

Proposition 17 - Primitive et composée.

Soient I et J des intervalles de $\mathbf{R}$, et $u : I \longrightarrow J$, $F : J \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fonctions respectivement dérivables sur I et J . Alors la fonction $F \circ u$ est une primitive de $u' \times (F' \circ u)$ sur I .

Exemple 18. Si F est une primitive d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, alors, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{a} F(at + b)$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax + b)$.

Proposition 27.

Soit f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbf{C}$. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

- $\int_a^b \Re(f)(t) dt = \Re \left(\int_a^b f(t) dt \right);$
- $\int_a^b \Im(f)(t) dt = \Im \left(\int_a^b f(t) dt \right).$

Remarque technique 28. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On utilise la proposition précédente pour calculer une primitive de $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ (resp. $g : x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$), en remarquant que $f : x \mapsto \Re(e^{ax+ibx})$ (resp. $g : x \mapsto \Im(e^{ax+ibx})$).

Exercice d'application 29. Trouver une primitive de $f : t \mapsto e^t \cos(t)$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$. $e^t \cos(t) = e^t \Re(e^{it}) = \Re(e^{it+t})$.

$$\int_0^x e^t \cos(t) dt = \Re \left(\int_0^x e^{(i+1)t} dt \right) = \Re \left(\frac{e^{(i+1)x}}{i+1} - \frac{1}{2} \right) = \Re \left(\frac{(1-i)e^{ix}e^x}{2} \right) - \frac{1}{2}.$$

Donc une primitive de f est $x \mapsto \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x))$.

Exercice d'application 30. Trouver une primitive de $t \mapsto \operatorname{sh}(t) \cos^2(t)$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$. $\operatorname{sh}(t) \cos^2(t) = \frac{1}{4} \Re(e^{(2i+1)t}) - \frac{1}{4} \Re(e^{(2i-1)t}) + \frac{\operatorname{sh}(t)}{2}$ (on linéarise $\cos^2(t)$ puis on utilise $\cos(2t) = \Re(e^{2it})$).

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{sh}(t) \cos^2(t) dt &= \frac{1}{4} \Re \left(\int_0^x e^{(2i+1)t} dt \right) - \frac{1}{4} \Re \left(\int_0^x e^{(2i-1)t} dt \right) + \frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{sh}(t) dt \\ &= \Re \left(\frac{e^{(2i+1)x}}{4(2i+1)} \right) - \Re \left(\frac{e^{(2i-1)x}}{4(2i-1)} \right) + \frac{\operatorname{ch}(x)}{2} - \frac{3}{5} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x) \cos(2x)}{10} + \frac{\operatorname{sh}(x) \sin(2x)}{5} + \frac{\operatorname{ch}(x)}{2} - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Finalement, une primitive de $t \mapsto \operatorname{sh}(t) \cos^2(t)$ est $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x) \cos(2x)}{10} + \frac{\operatorname{sh}(x) \sin(2x)}{5} + \frac{\operatorname{ch}(x)}{2}$.

Remarque technique 31. Soient A et B deux fonctions polynomiales, B étant de degré 1. Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et Q une fonction polynomiale tels que $A = BQ + \lambda$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $B(t) \neq 0$, $\frac{A(t)}{B(t)} = Q + \frac{\lambda}{B(t)}$. Donc on peut calculer une primitive de

$$t \mapsto \frac{A(t)}{B(t)}.$$

Exercice d'application 32. Calculer une primitive de $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$t \longmapsto \frac{t^3 + t + 1}{t + 2}$$

↪ On pose la division de polynôme suivante :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} T^3 + \\ -T^3 - \end{array} \begin{array}{r} T + 1 \\ 2T^2 \end{array} & T + 2 \\ \hline \begin{array}{r} -2T^2 + \\ 2T^2 + \end{array} \begin{array}{r} T + 1 \\ 4T \end{array} & T^2 - 2T + 5 \\ \hline \begin{array}{r} 5T + \\ -5T - \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 10 \end{array} & \\ \hline & -9 \end{array}$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $t^3 + 2t + 1 = (t + 2)(t^2 - 2t + 5) - 9$. Ainsi, pour $x \in \mathbf{R}_+$:

$$\int_0^x \frac{t^3 + t + 1}{t + 2} dt = \int_0^x \left(t^2 - 2t + 5 - \frac{9}{t + 2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t^2 + 5t - 9 \ln(|t + 2|) + 9 \ln(2).$$

Une primitive de f est $\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 9 \ln(x+2)$$

Théorème 33 - Décomposition en éléments simples.

Soit α et β deux éléments de $\mathbf{K}$ distincts. Alors, il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{K} \setminus \{\alpha, \beta\}$,

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

On a par ailleurs $B = -A$.

Démonstration.

On mène une preuve par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $(A, B) \in \mathbf{K}^2$ satisfaisant l'égalité du théorème.

$$\forall x \in \mathbf{K} \setminus \{\alpha, \beta\}, (x - \alpha) \cdot \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{x - \beta}, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha) \cdot \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}.$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbf{K} \setminus \{\alpha, \beta\}, (x-\alpha) \left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \right) = A+B \frac{x-\alpha}{x-\beta}, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} (x-\alpha) \left(\frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} \right) = A.$$

On en déduit que :

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta}.$$

On peut montrer de même que :

$$B = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Synthèse. Soit $x \in \mathbf{K} \setminus \{\alpha, \beta\}$.

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)(x - \alpha)} + \frac{1}{(\beta - \alpha)(x - \beta)} = \frac{(\beta - \alpha)(x - \beta) - (\beta - \alpha)(x - \alpha)}{(\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)}.$$

☐

Remarque 34. La preuve précédente est constructive : elle donne une méthode pour déterminer en pratique les valeurs A et B .

Remarque technique 35. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2$. Pour déterminer une primitive de

$$f : t \mapsto \frac{1}{at^2 + bt + c},$$

il y a trois cas à distinguer :

1. si $aX^2 + bX + c$ admet deux racines distinctes α et β , alors d'après le Théorème 33, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$,

$$f(t) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{t - \alpha} - \frac{A}{t - \beta} \right).$$

Une primitive de f sur $\mathbf{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$ est alors (cf. Exemple 20) $x \mapsto \frac{A}{a} \ln |x - \alpha| + \frac{B}{a} \ln |x - \beta|$.

2. si $aX^2 + bX + c$ admet une unique racine γ , alors, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{\gamma\}$,

$$f(t) = \frac{1}{a(t - \gamma)^2},$$

donc (cf. Exemple 21) une primitive de f sur $\mathbf{R} \setminus \{\gamma\}$ est $x \mapsto -\frac{1}{a(x - \gamma)}.$

3. si $aX^2 + bX + c$ n'admet pas de racines réelles, on met le trinôme du dénominateur sous forme canonique. Il existe donc $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{a} \frac{1}{(t + A)^2 + B^2},$$

donc, d'après l'Exemple 22, une primitive de f sur $\mathbf{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{Ba} \operatorname{Arctan}(\frac{x+A}{B})$

Exercice d'application 36. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{3t^2 - 12t + 17}.$

↔ Le discriminant de $3X^2 - 12X + 17$ est négatif, donc ce trinôme n'admet pas de racines. Soit $t \in \mathbf{R}$.

$$3t^2 - 12t + 17 = 3 \left(t^2 - 4t + \frac{17}{3} \right) = 3 \left((t - 2)^2 - 4 + \frac{17}{3} \right) = 3 \left((t - 2)^2 + \frac{5}{3} \right),$$

donc une primitive de f est $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{3}(x-2)}{\sqrt{5}}).$

Exercice d'application 37. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}.$

↔ D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$f(t) = \frac{A}{t - 1} - \frac{A}{t + 1}$$

On a $A = \lim_{t \rightarrow 1} (t - 1)f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t + 1} = \frac{1}{2}.$ Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$f(t) = \frac{1}{2(t - 1)} - \frac{1}{2(t + 1)}.$$

Ainsi une primitive de f est $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln |x - 1| - \ln |x + 1|).$

Exercice d'application 38. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 10t + 25}.$

↔ Pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{5\}$, on a $f(t) = \frac{1}{(t-5)^2}$, donc une primitive de f est $x \mapsto -\frac{1}{x-5}.$

Exercice d'application 39. Soit $m \in \mathbf{R}$. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2mx + 2m - 1}.$

↔ Le discriminant de $X^2 + 2mX + 2m - 1$ est $4(m - 1)^2$. On distingue deux cas.

1. Si $m = 1$, alors l'unique racine de $X^2 + 2mX + 2m - 1$ est -1 . Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{1}{x^2 + 2mx + 2m - 1} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

donc une primitive de f est $x \mapsto \frac{-1}{x+1}.$

2. Si $m \neq 1$, les racines de $X^2 + 2mX + 2m - 1$ sont -1 et $-2m + 1$. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, -2m + 1\}$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2m-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2m-1}.$$

De plus,

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \frac{1}{2(m-1)}, \quad \text{et } B = \frac{1}{2(1-m)}.$$

Finalement, une primitive de f est $x \mapsto \frac{1}{2(m-1)} \ln|x+1| + \frac{1}{2(1-m)} \ln|x+2m-1|$.

1.3. Intégration par parties

Définition 40.

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I . On notera $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur I .

Théorème 41 - Théorème d'intégration par parties.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, f et g deux fonctions définies sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt.$$

Démonstration.

On a :

$$f'g + fg' = (fg)'.$$

Donc,

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = \int_a^b (fg)'(t) dt - \int_a^b f(t)g'(t) dt,$$

puis, avec le Théorème 11,

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

□

Exercice d'application 42. Déterminer une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 1 et x . Ainsi, la formule d'intégration par parties fournit :

$$\int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = [t \ln(t)]_1^x - [t]_1^x,$$

donc une primitive de $\ln$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est $x \mapsto x \ln(x) - x$.

Remarque technique 43. Le théorème d'intégration par parties permet, par exemple, de calculer une primitive d'un produit d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle : on dérive la

fonction polynomiale et on intègre la fonction exponentielle. Ainsi le degré du polynôme est abaissé. On recommence jusqu'à ce que le polynôme soit une constante.

Exercice d'application 44. Calculer une primitive de $t \mapsto (t^2 + 1)e^{2t}$ sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. Les fonctions $t \mapsto t^2 + 1$ et $t \mapsto e^{2t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x . Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\int_0^x (t^2 + 1)e^{2t} dt = \left[(t^2 + 1) \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x - \int_0^x 2t \frac{e^{2t}}{2} dt$$

Les fonctions $t \mapsto 2t$ et $t \mapsto \frac{e^{2t}}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x . Par intégration par parties, on en déduit :

$$\int_0^x (t^2 + 1)e^{2t} dt = \left[(t^2 + 1) \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x - \left(\left[t \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2} dt \right) = \left[(t^2 + 1) \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x - \left[t \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x + \left[\frac{e^{2t}}{4} \right]_0^x.$$

Une primitive de $t \mapsto (t^2 + 1)e^{2t}$ est donc $x \mapsto \frac{e^{2x}(2x^2 - 2x + 3)}{4}$.

Exercice d'application 45. Calculer une primitive de $t \mapsto t \operatorname{ch}^3(t)$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}^3(t) = \frac{\operatorname{ch}(3t) + 3 \operatorname{ch}(t)}{4}$.

Les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties assure que :

$$\int_0^x t \operatorname{ch}^3(t) dt = \left[\frac{t}{4} \left(\frac{\operatorname{sh}(3t)}{3} + 3 \operatorname{sh}(t) \right) \right]_0^x - \frac{1}{4} \int_0^x \left(\frac{\operatorname{sh}(3t)}{3} + 3 \operatorname{sh}(t) \right) dt.$$

Finalement, une primitive de $t \mapsto t \operatorname{ch}^3(t)$ est $x \mapsto \frac{x}{4} \left(\frac{\operatorname{sh}(3x)}{3} + 3 \operatorname{sh}(x) \right) - \frac{\operatorname{ch}(3x)}{36} - \frac{3 \operatorname{ch}(x)}{4}$.

Exercice d'application 46. Trouver une primitive de $f : t \mapsto (t^2 + 2t - 1) \cos^2(t)$ sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$, une double intégration par parties assure que :

$$\begin{aligned} \int_0^x (t^2 + 2t - 1) \cos^2(t) dt &= \int_0^x (t^2 + 2t - 1) \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} + t^2 - t \right) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x (t^2 + 2t - 1) \cos(2t) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{(t^2 + 2t - 1) \sin(2t)}{4} + \frac{(t + 1) \cos(2t)}{4} - \frac{\sin(2t)}{8} \right]_0^x \end{aligned}$$

Finalement, une primitive de f est $x \mapsto \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{(x^2 + 2x - 1) \sin(2x)}{4} + \frac{(x + 1) \cos(2x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{8}$.

Exercice d'application 47. Trouver une primitive de $f : t \mapsto (t^2 + t + 1)e^{-t} \sin(t)$ sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $e^{-t} \sin(t) = \operatorname{Im}(e^{(i-1)t})$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\int_0^x (t^2 + t + 1)e^{-t} \sin(t) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^x (t^2 + t + 1)e^{(i-1)t} dt \right).$$

Comme les fonctions manipulées $t \mapsto t^2 + t + 1$, $t \mapsto e^{(i-1)t}$ et $t \mapsto 2t + 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, deux intégrations par parties conduisent à :

$$\int_0^x (t^2 + t + 1)e^{(i-1)t} dt = \left[\frac{-(i+1)(t^2 + t + 1)e^{(i-1)t}}{2} - \frac{i(2t+1)e^{(i-1)t}}{2} + \frac{2(1-i)e^{(i-1)t}}{2} \right]_0^x.$$

Donc,

$$\int_0^x f(t) dt = \left[\frac{-e^{-t}(t^2 + t + 1)}{2} (\sin(t) + \cos(t)) - \frac{2t+1}{2} e^{-t} \cos(t) + \frac{e^{-t}}{2} \sin(t) - \cos(t) \right]_0^x.$$

Avec le changement de variable $u = at + b$, on peut montrer qu'une primitive de

$$\begin{array}{ccc} g: \{s \in \mathbf{R} : as + b \in I\} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & f(at + b) \end{array}$$

est

$$\begin{array}{ccc} G: \{s \in \mathbf{R} : as + b \in I\} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ u & \longmapsto & \frac{F(au + b)}{a} \end{array}$$

Remarque technique 52.

La mise sous forme canonique d'un polynôme du second degré et le changement de variable de l'Exemple 51 permettent de calculer des primitives dans lesquelles apparaissent de tels polynômes.

Exercice d'application 53. Calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4t^2 + 4t + 2} dt$ à l'aide des changements de variable $u = 2t + 1$, puis $u = \operatorname{sh}(x)$. On pourra utiliser que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2 \operatorname{ch}(x)^2 = \operatorname{ch}(2x) + 1$.

$\hookrightarrow$ On a, pour tout $t \in [-\frac{1}{2}; 1]$, $4t^2 + 4t + 2 = (2t + 1)^2 + 1$. Par ailleurs, $t \mapsto 2t + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc le changement de variable $\begin{cases} u = 2t + 1 \\ du = 2 dt \end{cases}$ assure que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4t^2 + 4t + 2} \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{(2t+1)^2 + 1} \cdot 2 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{1+u^2} \, du.$$

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et continue, donc elle établit une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\text{sh}(\mathbf{R}) =]\lim_{-\infty} \text{sh}; \lim_{+\infty} \text{sh}[= \mathbf{R}$. De plus, sh est dérivable et sa dérivée ch ne s'annule jamais, donc sh^{-1} est dérivable et $(\text{sh}^{-1})' = \frac{1}{\text{ch} \circ \text{sh}^{-1}}$. Les fonctions mises en jeu étant continues, on obtient que sh^{-1} est continue, ce qui signifie que sh^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. En faisant le changement de variable $x = \text{sh}^{-1}(u)$, qu'on écrit plus simplement $\begin{cases} u = \text{sh}(x) \\ du = \text{ch}(x) dx \end{cases}$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{1+u^2} \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{sh}^{-1}(3)} \sqrt{1+\operatorname{sh}(x)^2} \operatorname{ch}(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln(\sqrt{10}+3)} \operatorname{ch}(x)^2 \, dx$$

car $\text{sh}(x) = 3 \iff x = \ln(\sqrt{10} + 3)$ et $\text{ch}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; \ln(\sqrt{10} + 3)]$. Ainsi,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4t^2 + 4t + 2} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^{\ln(\sqrt{10}+3)} = \frac{\operatorname{sh}(2 \ln(\sqrt{10}+3))}{8} + \frac{\ln(\sqrt{10}+3)}{4}.$$

Exercice d'application 54. Trouver une primitive de $t \mapsto \frac{t+2}{t^2+2t+4}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\frac{t+2}{t^2+2t+4} = \frac{t+2}{(t+1)^2+3}$. On pose $\begin{cases} u &= t+1 \\ du &= dt \end{cases}$.

$$\int \frac{t+2}{t^2+2t+4} dt = \int \frac{u+1}{u^2+3} du = \int \frac{u du}{u^2+3} + \int \frac{du}{u^2+3} = \frac{\ln(u^2+3)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Finalement, une primitive de $t \mapsto \frac{t+2}{t^2+2t+4}$ est $t \mapsto \frac{\ln(t^2+2t+4)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice d'application 55. Trouver une primitive de $f :]-3 ; 1[\longrightarrow \mathbf{R}$

$$t \longmapsto \frac{t-3}{\sqrt{3-2t-t^2}}.$$

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in]-3 ; 1[$, $\frac{x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \frac{x+3}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$. On pose $\begin{cases} u &= t+1 \\ du &= dt \end{cases}$.

$$\begin{aligned}\int f(t) \, dt &= \int \frac{u+2}{\sqrt{4-u^2}} \, du \\&= \int \frac{u \, du}{\sqrt{4-u^2}} + \int \frac{2 \, du}{\sqrt{4-u^2}} \\&= -\sqrt{4-u^2} + 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{u}{2} \right) + c \\&= -\sqrt{3-2t-t^2} + 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{t+1}{2} \right) + c.\end{aligned}$$

Donc une primitive de f est $t \longmapsto -\sqrt{3-2t-t^2} + 2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{t+1}{2}\right)$.

Exercice d'application 56. Trouver une primitive de $f : [5; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$:

$$t \longmapsto \frac{t^3 + t + 1}{t^2 - 4t - 1}$$

↪ Une division euclidienne assure que pour tout $t \in [5, +\infty[$, $\frac{t^3 + t + 1}{t^2 - 4t - 1} = t + 4 + \frac{18t + 5}{(t - 2)^2 - 5}$. En

$$\text{posant} \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & t - 2 \\ du & = & dt \end{array} \right., \text{ on a :}$$

$$\int \frac{18t+5}{(t-2)^2-5} dt = \int \frac{18u+41}{u^2-5} du = 9 \ln(u^2-5) - \frac{41}{\sqrt{5}} \operatorname{argth} \left(\frac{u}{\sqrt{5}} \right) + c$$

Finalement une primitive de f est : $t \mapsto \frac{t^2}{2} + 4t + 9 \ln(t^2 - 4t - 1) - \frac{41}{\sqrt{5}} \operatorname{argth}\left(\frac{t-2}{\sqrt{5}}\right)$.

2. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

2.1. Présentation

Définition 57.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad (\text{E})$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et dérivable sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$.

On appelle **solution** de (E) sur I toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E).

L'équation différentielle (E) est dite **homogène** si b est la fonction nulle.

On appelle **équation homogène associée à (E)** (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad (\text{H})$$

Dans la pratique, on écrit (E) sous la forme :

$$y' + a(t)y = b(t), \quad (\text{E})$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y .

Pour toute la suite, on se donne a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbf{K}$.

2.2. Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 1

Proposition 58 - Solutions de l'équation homogène.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

où A est une primitive de la fonction a sur I .

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ une fonction dérivable.

$$\begin{aligned} f \text{ est une solution de (H)} \quad & \text{ssi} \quad f' + af = 0 \\ & \text{ssi} \quad f' + A'f = 0 \\ & \text{ssi} \quad \text{pour tout } t \in I, \quad e^{A(t)}(f'(t) + A'(t)f(t)) = 0 \\ & \text{ssi} \quad \text{la dérivée de } t \mapsto e^{A(t)}f(t) \text{ est nulle} \\ & \text{ssi} \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbf{K} \text{ tel que pour tout } t \in I, \quad f(t) = \lambda e^{-A(t)} \\ & \text{ssi} \quad f \in \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\} \end{aligned}$$

□

Remarque 59. Dans la Proposition 58, on peut remarquer que l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (H) est l'ensemble des fonctions proportionnelles à la fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & e^{-A(t)} \end{array}$. L'ensemble S peut donc être vu comme une droite vectorielle de vecteur directeur f .

Il est évident que S est aussi l'ensemble des fonctions proportionnelles à n'importe quelle fonction non nulle de (H). Autrement dit, si l'on connaît une solution d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1, on les connaît toutes.

Exemple 60. Soit $k \in \mathbf{K}$. L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + ky = 0$$

est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-kt} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

(en effet, une primitive de $t \mapsto k$ est $t \mapsto kt$).

Exercice d'application 61. Résoudre sur $]1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{t-1}y = 0$$

$\hookrightarrow$ Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ est $t \mapsto \ln(t-1)$. De plus, pour tout $t \in]1; +\infty[$, $e^{-\ln(t-1)} = \frac{1}{t-1}$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc}]1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda}{t-1} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Proposition 62 - Solutions de l'équation générale.

Notons S_H l'ensemble des solutions homogènes. Si f_p est une solution de (E) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{h + f_p : h \in S_H\} = \left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow K \\ t & \longmapsto \lambda e^{-A(t)} + f_p(t) \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E), on peut obtenir toutes les solutions de (E) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H).

Démonstration.

Notons S_E l'ensemble des solutions de (E). Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ dérivable.

$$\begin{array}{ll} f \in S_E & \text{ssi} \quad f' + af = b \\ & \text{ssi} \quad f' + af = f'_p + af_p \\ & \text{ssi} \quad (f' - f'_p) - a(f - f_p) = 0 \\ & \text{ssi} \quad (f - f_p)' - a(f - f_p) = 0 \\ & \text{ssi} \quad f - f_p \in S_H \\ & \text{ssi} \quad \text{il existe } h \in S_H \text{ tel que } f - f_p = h \\ & \text{ssi} \quad \text{il existe } h \in S_H \text{ tel que } f = h + f_p \\ & \text{ssi} \quad f \in \{h + f_p : h \in S_H\} \end{array}$$

Finalement, $S_E = \{h + f_p : h \in S_H\}$. □

Remarque 63. On peut poursuivre la Remarque 59 : l'ensemble des solutions de (E) est une droite affine de vecteur directeur $f : t \longmapsto e^{-A(t)}$ et qui passe par le point f_p .

2.3. Détermination d'une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

On vient de voir que pour déterminer toutes les solutions de (E), il suffit de résoudre l'équation homogène (H) puis de déterminer une solution de (E). La résolution d'une équation d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 se mène donc toujours en trois temps :

1. recherche des solutions homogènes (cf. Proposition 58);
2. recherche d'une solution particulière;
3. conclusion (écriture de l'ensemble des solutions de l'équation générale).

Pour déterminer une solution particulière, le premier réflexe à avoir est de chercher une solution évidente.

Exemple 64. Soit $(k, m) \in \mathbf{K}^2$. Une solution de

$$y' + ky = m$$

est la fonction constante $t \longmapsto \frac{m}{k}$. Ainsi (on a déjà déterminé l'ensemble des solutions homogènes à l'Exemple 60), l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K} & \longrightarrow \mathbf{K} \\ t & \longmapsto \lambda e^{-kt} + \frac{m}{k} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Exercice d'application 65. Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$y' - 2y = t^2 - 2t + 4.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K} & \longrightarrow \mathbf{K} \\ t & \longmapsto \lambda e^{2t} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$
$$\begin{array}{ll}
P \text{ est solution de l'équation} & ssi \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad P'(t) - 2P(t) = t^2 - 2t + 4 \\
& ssi \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad 2at + b - 2at^2 - 2bt - 2c = t^2 - 2t + 4 \\
& ssi \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad -2at^2 + (2a - 2b)t + (b - 2c) = t^2 - 2t + 4 \\
& ssi \quad (a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)
\end{array}$$

Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation générale est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K} & \longrightarrow \mathbf{K} \\ t & \longmapsto \lambda e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{7}{4} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

$\hookrightarrow$ La dérivée de $g : x \mapsto f(x)e^{x^2}$ est, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $(f'(x) + 2xf(x))e^{x^2}$. Ainsi g est décroissante. En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x)e^{x^2} \leq f(0)$. Or on sait aussi que f est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, donc, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $0 \leq f(x) \leq f(0)e^{-x^2}$. Le théorème des gendarmes assure finalement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

$$\begin{array}{ccc} f_p: & I & \longrightarrow \mathbf{K} \\ & t & \longmapsto q(t)e^{-A(t)} \end{array},$$

Exercice d'application 68. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y' - t^2 y = \frac{te^{\frac{t^3}{3}}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{\frac{t^3}{3}} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$
$$\begin{aligned} f \text{ est solution de l'équation} \quad & ssi \quad \forall t \in I, \quad f'(t) - t^2 f(t) = \frac{te^{\frac{t^3}{3}}}{\sqrt{1+t^2}} \\ & ssi \quad g'(t)e^{\frac{t^3}{3}} + t^2 g(t)e^{\frac{t^3}{3}} - t^2 g(t)e^{\frac{t^3}{3}} = \frac{te^{\frac{t^3}{3}}}{\sqrt{1+t^2}} \\ & ssi \quad g'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$, donc $f : t \mapsto \sqrt{1+t^2}e^{\frac{t^3}{3}}$ est une solution particulière.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto (\sqrt{1+t^2} + \lambda)e^{-\frac{t^3}{3}} \quad : \lambda \in \mathbf{R} \end{array} \right\}.$$

La méthode de variation de la constante assure que :

Proposition 69.

L'équation (E) possède au moins une solution.

Démonstration.

Soit $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ dérivable. On pose $f_p : \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbf{K} \\ t & \longmapsto g(t)e^{-A(t)} \end{array}$. f_p est dérivable.

$$\begin{aligned} f_p \text{ est solution de } S_E & \text{ssi} \quad f'_p + af_p = b \\ & \text{ssi} \quad \text{pour tout } t \in I, \quad g'(t)e^{-A(t)} - a(t)e^{-A(t)}g(t) + a(t)g(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ & \text{ssi} \quad \text{pour tout } t \in I, \quad g'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

Or $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue, donc cette fonction admet une primitive F . Ainsi :

$$\begin{aligned} f_p \in S_E & \text{ssi} \quad g' = F' \\ & \text{ssi} \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbf{K} \text{ tel que } g = F + \lambda \end{aligned}$$

En particulier, $t \mapsto F(t)e^{-A(t)}$ est solution de (E). □

Remarque 70. Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite : il faut pour cela être capable de déterminer deux primitives à l'aide des fonctions usuelles (une primitive A de a et une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$).

2.4. Principe de superposition des solutions

Proposition 71 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et b_1, b_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On

pose $(E_1) : y' + ay = b_1$.

$(E_2) : y' + ay = b_2$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2) , alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2.$$

Démonstration.

Comme φ_1 et φ_2 sont dérivables, $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est dérivable.

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)' + a(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1(\varphi_1' + a\varphi_1) + \lambda_2(\varphi_2' + a\varphi_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2,$$

d'où le résultat. □

2.5. Problème de Cauchy

Définition 72.

On appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I .

Théorème 73 - Problème de Cauchy.

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Démonstration.

On sait qu'il existe une solution f_p de (E). Soit f une solution de (E). On sait qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f : I \rightarrow \mathbf{K}$, où A est une primitive de a .

$$t \mapsto f_p(t) + \lambda e^{-A(t)}$$

$$f(t_0) = y_0 \iff f_p(t_0) + \lambda e^{-A(t_0)} = y_0 \iff \lambda = (y_0 - f_p(t_0))e^{A(t_0)},$$

donc sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation différentielle (E) admet une solution unique sur I . $\square$

Exercice d'application 74. Déterminer la solution réelle f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ de (E) : $\begin{cases} y' - \frac{y}{t} = \ln(t) \\ y(1) = 3 \end{cases}$.

$\hookrightarrow$ Recherche des solutions homogènes. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\ln$, donc l'ensemble des solutions homogènes est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \lambda t \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$ dérivable. On pose $f_p : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$.

$$t \mapsto g(t)t$$

f_p est dérivable.

$$\begin{aligned} f_p \text{ est une solution de l'équation différentielle } & \text{ssi pour tout } t \in \mathbf{R}_+^*, f_p'(t) - \frac{f_p(t)}{t} = \ln(t) \\ & \text{ssi pour tout } t \in \mathbf{R}_+^*, g(t) + tg'(t) - g(t) = \ln(t) \\ & \text{ssi pour tout } t \in \mathbf{R}_+^*, g'(t) = \frac{\ln(t)}{t}. \end{aligned}$$

Or une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est $t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$. Donc

$$f_p \text{ est une solution de l'équation } \text{ssi il existe } \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que pour tout } t \in \mathbf{R}_+^*, g(t) = \frac{\ln^2(t)}{2} + \lambda.$$

Donc une solution particulière de (E) est $t \mapsto \frac{t \ln^2(t)}{2}$. Donc

Conclusion. Finalement l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \left(\frac{\ln^2(t)}{2} + \lambda \right) t \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche de l'unique solution demandée On cherche l'unique solution demandée f . Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f : t \mapsto \left(\frac{\ln^2(t)}{2} + \lambda \right) t$. Or

$$f(1) = 3 \iff \left(\frac{\ln^2(1)}{2} + \lambda \right) 1 \iff \lambda = 3.$$

Finalement, $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$

$$t \longmapsto \left(\frac{\ln^2(t)}{2} + 3 \right) t .$$

2.6. Méthode numérique de résolution

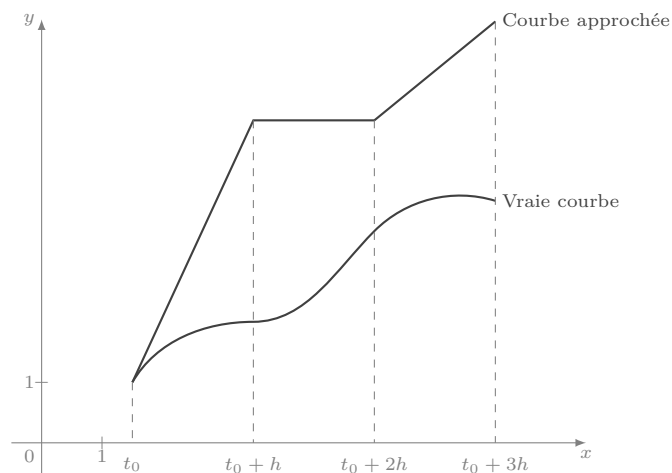
Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues réelles définies sur I , $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}$. On cherche un graphe approché de la solution de $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Méthode d'Euler. Soit $h \in \mathbf{R}_+^*$ (le pas de discrétisation).

- $y_0 = y(t_0)$;
- $y_1 = y_0 + h(a(t_0)y_0 + b(t_0)) \approx y(t_0 + h)$;
- $y_2 = y_1 + h(a(t_0 + h)y_1 + b(t_0 + h)) \approx y(t_0 + 2h)$;
- etc.

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a la relation de récurrence suivante :

$$y_n = y_{n-1} + h(a(t_0 + (n-1)h)y_{n-1} + b(t_0 + (n-1)h))$$



Sources d'erreurs :

- confusion entre la courbe et la tangente ;
- erreurs de calcul ;
- ne fonctionne pas pour des équations chaotiques (exemple : $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de 0).

3. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

3.1. Présentation

Définition 75.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t), \quad (\text{E})$$

où a et b sont deux éléments (« constantes ») de $\mathbf{K}$, c est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et deux fois dérivable sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$.

On appelle **solution** de (E) sur I toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ deux fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E).

L'équation différentielle (E) est dite **homogène** si c est la fonction nulle.

On appelle **équation homogène associée à (E)** (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad (\text{H})$$

Dans la pratique, on écrit (E) sous la forme :

$$y'' + ay' + by = c(t), \quad (\text{E})$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y .

Pour toute la suite, on se fixe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, $c \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ (on ne travaillera qu'avec des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ entier) une fonction continue.

3.2. Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Définition 76.

L'**équation caractéristique** de (H) est l'équation d'inconnue $r \in \mathbf{K}$,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Proposition 77 - Solutions de l'équation homogène - cas complexe.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H).

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 . L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{C} \\ t & \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution complexe r_0 . L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{C} \\ t & \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Démonstration.

On vérifie facilement que les fonctions données dans les deux cas sont bien solutions de (H).

Réciproquement, soit f une solution de (H). Notons r l'une des solutions de l'équation caractéristique, et considérons la fonction $g : t \mapsto f(t)e^{-rt}$. La fonction g est deux fois dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f'(t) = g'(t)e^{rt} + rg(t)e^{rt} \quad \text{et} \quad f''(t) = g''(t)e^{rt} + 2g'(t)re^{rt} + g(t)r^2e^{rt}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$0 = f''(t) + af'(t) + bf(t) = (g''(t) + (2r + a)g'(t) + (r^2 + ar + b)g(t))e^{rt} = (g''(t) + (2r + a)g'(t))e^{rt},$$

et donc, puisque pour tout $t \in \mathbf{R}$, $e^{rt} \neq 0$, on obtient que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g''(t) + (2r + a)g'(t) = 0.$$

Cela revient à dire que g' vérifie l'équation différentielle du premier ordre $z' + (2r + a)z = 0$, et donc il existe une constante $C_1 \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g'(t) = C_1 e^{-(2r+a)t}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors $r = r_0 = -\frac{a}{2}$, et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g'(t) = C_1$. Ainsi, il existe $C_2 \in \mathbf{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g(t) = C_1 t + C_2,$$

ce qui donne, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = (C_1 t + C_2) e^{-rt}.$$

- Si $\Delta \neq 0$, on a par exemple $r = r_1$. Or $-a = r_1 + r_2$ (relations coefficients/racines), d'où, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g'(t) = C_1 e^{-(2r_1 - r_1 - r_2)t} = C_1 e^{-(r_1 - r_2)t}$. Ainsi, puisque g est une primitive de g' , il existe $C_2 \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g(t) = -\frac{C_1}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t} e^{r_2 t} + C_2$$

puis

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = -\frac{C_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + C_2 e^{r_1 t}.$$

On a de nouveau le résultat annoncé (avec $\lambda = C_2$ et $\mu = \frac{C_1}{r_2 - r_1}$). □

Exercice d'application 78. Déterminer les solutions à valeurs complexes de

$$y'' + (1 + 2i)y' + (i - 1)y = 0.$$

$\hookrightarrow$ L'équation caractéristique est $r^2 + (1 + 2i)r + (i - 1) = 0$ d'inconnue r . Son discriminant est 1, elle a donc deux racines qui sont $-1 - i$ et $-i$. L'ensemble des solutions est finalement

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{C} \\ t & \longmapsto \lambda e^{-(1+i)t} + \mu e^{-it} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Proposition 79 - Solutions de l'équation homogène - cas réel.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H).

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 réelles. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution réelle r_0 . L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions, qui sont des nombres complexes conjugués de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Démonstration.

Les deux premiers cas découlent directement du résultat avec les solutions complexes.

Supposons que $\Delta < 0$. On sait que les solutions à valeurs complexes de (H) sont telles qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbf{C}^2$ tel que

$$\begin{array}{ccc} h : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \gamma e^{(\alpha+i\beta)t} + \delta e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \quad i.e. \quad \begin{array}{ccc} h : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} (\gamma e^{i\beta t} + \delta e^{-i\beta t}) \end{array}$$

Pour qu'une telle solution h ne prenne que des valeurs réelles, il faut et il suffit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait $\Im m(h(t)) = 0$, i.e.

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad (\Re e(\gamma) - \Re e(\delta)) \sin(\beta t) + (\Im m(\gamma) + \Im m(\delta)) \cos(\beta t) = 0. \quad (\star)$$

Pour $t = 0$, on trouve $\Im m(\gamma) = -\Im m(\delta)$ et pour $t = \frac{\pi}{2\beta}$, on obtient $\Re e(\gamma) = \Re e(\delta)$. Ainsi $\delta = \bar{\gamma}$. Réciproquement, si $\delta = \bar{\gamma}$, la condition $(\star)$ est vérifiée, et ainsi pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$h(t) = e^{\alpha t} (\gamma e^{i\beta t} + \bar{\gamma} e^{-i\beta t}) = e^{\alpha t} (\gamma e^{i\beta t} + \overline{\gamma e^{i\beta t}}) = 2e^{\alpha t} \Re e(\gamma e^{i\beta t}).$$

Il s'ensuit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$h(t) = e^{\alpha t} (2 \Re e(\gamma) \cos(\beta t) - 2 \Im m(\gamma) \sin(\beta t)),$$

ce qui donne le résultat attendu (en posant $\lambda = 2 \Re e(\gamma)$ et $\mu = -2 \Im m(\gamma)$). □

Exercice d'application 80. Déterminer les solutions à valeurs réelles de

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$\hookrightarrow$ L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 5 = 0$, d'inconnue r . Son discriminant est -16 , elle a donc deux racines complexes conjuguées qui sont $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$. L'ensemble des solutions de l'équation est ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t} (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Remarque 81. Toute expression de la forme $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ peut s'écrire sous la forme $R \cos(x + \varphi)$ ou $R \sin(x + \psi)$. Par conséquent, lorsque $\Delta < 0$, on peut aussi affirmer que l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle homogène (H) est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto Re^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \end{array} : (R, \varphi) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \right\}.$$

C'est cette forme qui est couramment utilisée en physique.

Proposition 82 - Solutions de l'équation générale.

Notons S_H l'ensemble des solutions homogènes. Si f_p est une solution de (E) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{h + f_p : h \in S_H\}.$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E), on peut obtenir toutes les solutions de (E) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H).

Démonstration.

La démonstration est similaire à celle de la Proposition 62.

3.3. Recherche de solutions dans quelques cas particuliers

Comme pour les équations d'ordre 1, on commence par chercher des solutions évidentes. Sinon, on se trouvera dans l'un des trois cas suivants.

Remarque technique 83. Si c est une fonction polynomiale de degré d , on recherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \longmapsto R(t)$, où R est une fonction polynomiale de degré :

$$\begin{cases} d & \text{si } b \neq 0 \\ d+1 & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ d+2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Exercice d'application 84. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = 2t^2$.

↪ *Recherche des solutions homogènes.* L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2$, ses racines sont $1 + 2i$ et $1 - 2i$. On en déduit que l'ensemble des solutions homogènes est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^2$. On pose $f_p : t \longmapsto at^2 + bt + c$. On a f_p deux fois dérivable, avec

$$f'_p : t \mapsto 2at + b \qquad f''_p : t \mapsto 2a$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll}
 f_p \text{ solution de l'équation différentielle} & ssi \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}, f_p''(t) - 2f_p'(t) + 2f_p(t) = 2t^2 \\
 & ssi \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}, 2at^2 + (-4a + 2b)t + (2a - 2b + 2c) = 2t^2 \\
 & ssi \begin{cases} 2a & = & 2 \\ -4a + 2b & = & 0 \\ 2a - 2b + 2c & = & 0 \end{cases} \\
 & ssi (a, b, c) = (1, 2, 1)
 \end{array}$$

Donc $f_p : t \mapsto t^2 + 2t + 1$ est une solution générale.

Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) + t^2 + 2t + 1 \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Remarque technique 85. Soit $(B, k) \in \mathbf{K}^2$. On suppose ici que $c : t \mapsto Be^{kt}$. On cherche alors une solution particulière f_p sous la forme

- $f_p : t \mapsto \alpha e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $f_p : t \mapsto \alpha t e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'une des deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (on dit que k est une racine simple de l'équation).
- $f_p : t \mapsto \alpha t^2 e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'unique racine (double) de l'équation caractéristique.

Exercice d'application 86. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10e^{3t}$.

$\hookrightarrow$ Recherche des solutions homogènes : fait à l'Exercice d'Application 84.

Recherche d'une solution particulière. Puisque 3 n'est pas une racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \mapsto \alpha e^{3t}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. f_p est deux fois dérivable avec

$$f_p' : t \mapsto 3\alpha e^{3t} \qquad f_p'' : t \mapsto 9\alpha e^{3t}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll} f_p \text{ solution de l'équation différentielle} & \text{ssi pour tout } t \in \mathbf{R}, f_p''(t) - 2f_p'(t) + 2f_p(t) = 10e^{3t} \\ & \text{ssi pour tout } t \in \mathbf{R}, e^{3t}(9\alpha - 6\alpha + 2\alpha) = 10e^{3t} \\ & \text{ssi } 5\alpha = 10 \\ & \text{ssi } \alpha = 2 \end{array}$$

Donc $f_p : t \mapsto 2e^{3t}$ est une solution générale.

Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) + 2e^{3t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Proposition 87.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ une fonction deux fois dérivable qui vérifie (E). Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Re(f))'' + a \cdot (\Re(f))' + b \cdot (\Re(f)) = \Re(c(t)) \\ (\Im(f))'' + a \cdot (\Im(f))' + b \cdot (\Im(f)) = \Im(c(t)) \end{array} \right.$$

Démonstration.

On compose par $\Re$ (resp. $\Im$), et on utilise que $\Re(f^{(i)}) = \Re(f)^{(i)}$ (resp. $\Im(f^{(i)}) = \Im(f)^{(i)}$) pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. $\square$

Remarque technique 88. On suppose que $c : t \mapsto B \cos(\omega t)$ (resp. $c : t \mapsto B \sin(\omega t)$), où $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$, et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

On commence par chercher une solution particulière g_p de l'équation différentielle sur $\mathbf{C}$:

$$z'' + az' + bz = Be^{i\omega t}.$$

Ainsi,

$$f \text{ est solution de } (E) \quad \begin{array}{l} \text{ssi} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = xe^x \\ \text{ssi} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}, (-2ax + 2a - b)e^x = xe^x \\ \text{ssi} \quad \begin{cases} a = -1/2 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}$$

Finalement, $x \mapsto \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x$ est solution de (E) .

- L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \left(A - x - \frac{x^2}{2}\right)e^x + Be^{2x} \quad : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \end{array} \right\}$$

Exercice d'application 93. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $y'' - 4y' + 4y = x^2 \operatorname{ch}^2(x)$.

$\hookrightarrow$ On trouve comme ensemble S_H des solutions homogènes :

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^{2x} \quad : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \end{array} \right\}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \operatorname{ch}^2(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{4} + \frac{x^2 e^{-2x}}{4} + \frac{x^2}{2}$. On pose :

$$\begin{array}{l} (E_1) : y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} \\ (E_2) : y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} \\ (E_3) : y'' - 4y' + 4y = x^2 \end{array}$$

- Recherche d'une solution de (E_1) . Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. On pose $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $x \longmapsto (ax^4 + bx^3 + cx)e^{2x}$.

Après dérivations de f , on obtient que f est solution de (E_1) ssi $(b, c) = (0, 0)$. Ainsi une solution particulière de (E_1) est $x \mapsto \frac{x^4 e^{2x}}{12}$.

- On cherche de même les solutions de (E_2) et (E_3) .
- Le principe de superposition des solutions permet d'écrire l'ensemble des solutions de (E) , à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \left(\frac{x^4}{48} + Ax + B\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{64} + \frac{x}{64} + \frac{3}{512}\right)e^{-2x} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + \frac{3}{46} \quad , (A, B) \in \mathbf{R}^2 \end{array} \right\}$$

Exercice d'application 94. Résoudre $y'' - y' = \sin(x) \operatorname{ch}(x)$ dans $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ L'ensemble S_H des solutions homogènes est :

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto Ae^x + Be^{-x} \quad : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \end{array} \right\}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2} \Im m(e^{(i+1)x}) + \frac{1}{2} \Im m(e^{(i-1)x})$. On pose :

$$\begin{array}{l} (E_1) : y'' - y' = e^{(i+1)x} \\ (E_2) : y'' - y' = e^{(i-1)x} \end{array}$$

- Recherche d'une solution de (E_1) . Soit $a \in \mathbf{C}$. On pose $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$
 $x \longmapsto ae^{(i+1)x}$. On trouve

$$a = -\frac{2i+1}{5}. \text{ Donc une solution particulière de } (E_1) \text{ est : } \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto -\frac{2i+1}{5}e^{(i+1)x}$$

- Recherche d'une solution de (E_2) . On procède comme avant.
- L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{-2 \operatorname{sh}(x) \cos(x)}{5} - \frac{\operatorname{ch}(x) \sin(x)}{5} + Ae^x + Be^{-x} \quad : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \end{array} \right\}$$

3.4. Principe de superposition des solutions

Proposition 95 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et c_1, c_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On pose

$$(E_1): y'' + ay' + by = c_1.$$

$$(E_2): y'' + ay' + by = c_2$$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2) , alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y'' + ay' + b' = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2.$$

Démonstration.

Similaire à celle de la Proposition 71. □

Exercice d'application 96. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2t^2 + 10e^{3t} + 10 \cos(2t)$.

↪ On a résolu précédemment (cf. Exercices d'application 84, 86 et 89) :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2t^2 \\ y'' - 2y' + 2y = 10e^{3t} \\ y'' - 2y' + 2y = 10 \cos(2t) \end{cases}$$

Le principe de superposition des solutions permet d'en déduire immédiatement l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))t^2 + 2t + 1 + 2e^{3t} - \cos(2t) - 2 \sin(2t) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

3.5. Problème de Cauchy

Théorème 97 - Problème de Cauchy.

Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$.

Démonstration.

Admis. □