

Ensembles et applications

1. Ensembles : rappels et compléments

1.1. Vocabulaire général

Définition 1.

On appelle **ensemble** toute collection d'objets.
On appelle **élément** d'un ensemble E tout objet appartenant à la collection d'objets définissant E . Pour écrire que x est un élément de E , on note $x \in E$.

Définition 2.

On appelle **partie** (ou **sous-ensemble**) de E tout ensemble F d'éléments de E .

Un ensemble peut s'écrire :

- en **extension**. On donne la liste des éléments entre accolades. Par exemple : $\{1; 2; 4\}$.
- en **compréhension**. L'ensemble est décrit comme collection d'objets vérifiant une propriété. Deux formes sont utilisées :
 - $\{x \in B \mid \text{Propriété}\}$ où B est un ensemble.
 - $\{F(x) : x \in A\}$ où A est une partie d'un ensemble E et F une expression définie pour tout $x \in A$.

On a

$$a \in \{x \in B \mid \text{Propriété}\} \iff a \text{ vérifie Propriété.}$$

et

$$a \in \{F(x) : x \in A\} \iff \exists x \in A, a = F(x).$$

Exemple 3. L'ensemble ne contenant que l'élément a est appelé **singleton** a et est noté $\{a\}$.

Exemple 4. L'ensemble des multiples de 3 s'écrit $\{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv 0[3]\} = \{3k : k \in \mathbf{Z}\}$. En particulier x est un multiple de 3 ssi $x \equiv 0[3]$ ssi il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 3k$.

Exercice d'application 5. Ecrire de trois façons différentes l'ensemble E des entiers positifs pairs.

↔ En extension, on a $E = \{0; 2; 4; \dots\}$.

En compréhension on a $E = \{2n : n \in \mathbf{N}\}$ ou $E = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k\}$.

Exercice d'application 6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Décrire de trois manières différentes l'ensemble U_n .

↔ Par définition, on a :

$$U_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$$

De plus, un théorème du cours assure que :

$$U_n = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}\right\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}.$$

Soit A et B deux ensembles, tel que pour tout $x \in A$, $F(x) \in B$. Il est possible d'une écriture en compréhension à l'autre :

$$\{F(x) : x \in A\} = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = F(x)\}.$$

Définition 7.

On appelle **ensemble vide** l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

Notation 8. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Ainsi $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.

Exemple 9. Soit E un ensemble. On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice d'application 10. Ecrire l'ensemble $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ en extension.

↔ On a $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0, 1\}\}$

Remarque 11. La partie vide n'est pas facile à manipuler, principalement parce qu'elle se note de la même manière pour tous les ensembles. Ainsi, si E est un ensemble, $\emptyset$ désigne la partie vide de E , qui est un *élément* de $\mathcal{P}(E)$, mais aussi la partie de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ ne contenant aucun élément de $\mathcal{P}(E)$, qui est une *partie* de $\mathcal{P}(E)$. Hors de tout contexte, le sens du symbole $\emptyset$ n'est pas clair.

1.2. Inclusion et égalité

Définition 12.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A appartient à B , c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Dans ce cas, on note $A \subset B$.

On peut représenter schématiquement les ensembles à l'aide d'un **diagramme de Venn**. L'inclusion $A \subset B$ peut être schématisée ainsi :

On aurait aussi pu travailler directement par équivalences. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in A &\iff 2x - y = 1 \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = t + 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in F. \end{aligned}$$

Finalement, $E = F$.

Remarque : A et B représentent la même droite du plan. A est la **représentation cartésienne** de cette droite, tandis que B est une **représentation paramétrique**.

1.3. Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 18.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E .

- Le **complémentaire** de A dans E , noté $\complement_E(A)$, (ou $E \setminus A$ ou $\overline{A}$) est

$$\{x \in E \mid \neg(x \in A)\} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- L'intersection de A et B , notée $A \cap B$, est

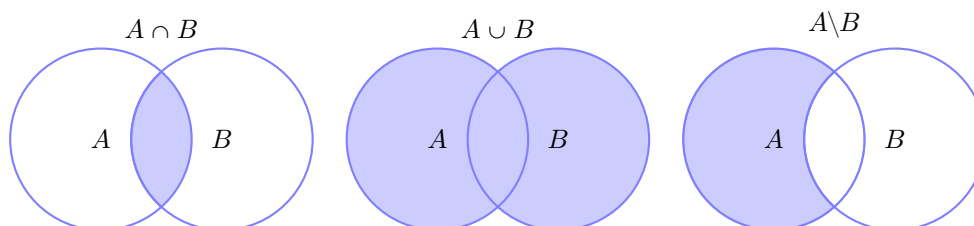
$$\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- L'**union** de A et B , notée $A \cup B$, est

$$\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- L'ensemble A **privé** de B , noté $A \setminus B$ est

$$\{x \in A \mid x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}.$$



Avec les définitions, et puisque « et » et « ou » sont commutatifs, on a $\cap$ et $\cup$ commutatifs également :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

Proposition 19.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . Alors

$$A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A.$$

Démonstration.

Remarquons que $\emptyset$ est inclus dans n'importe quel ensemble.

Supposons $A \neq \emptyset$. Soit $x \in A$. Alors l'assertion « $x \in A$ ou $x \in B$ » est vraie, donc $x \in A \cup B$. On vient donc de montrer que $A \subset A \cup B$.

Supposons $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $x \in A \cap B$. Alors on a en particulier $x \in A$. On vient de montrer que $A \cap B \subset A$. $\square$

Remarque 20. Dans les démonstrations de ce chapitre, on évitera d'utiliser la notation $x \notin A$ (x n'appartient pas à A), car cette écriture conduit trop souvent à des raccourcis « intuitifs ». On préférera écrire $x \in \bar{A}$ (ce qui revient exactement à dire que $x \notin A$...), et utiliser les propriétés écrites dans le cours (et rien d'autre sans le démontrer!).

Proposition 21 - Lois de Morgan.

Soit E un ensemble, A , B et C des parties de E . Alors :

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
 x \in \overline{A \cup B} &\iff x \notin \{a \in E \mid a \in A \text{ ou } a \in B\} \\
 &\iff \neg(x \in A \text{ ou } x \in B) \\
 &\iff \neg(x \in A) \text{ et } \neg(x \in B) && \text{(loi de Morgan « logique »)} \\
 &\iff x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B} \\
 &\iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}.
 \end{aligned}$$

On a montré $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

L'autre démonstration est laissée au lecteur. $\square$

Proposition 22.

Soit A une partie d'un ensemble E .

1. $\overline{\bar{A}} = A$.
2. $\bar{E} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = E$.
3. $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.
4. $A \cap E = A$ et $A \cup \emptyset = A$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$.

$$x \in \overline{\bar{A}} \iff \neg(x \in \bar{A}) \iff \neg(\neg(x \in A)) \iff x \in A.$$

On vient de montrer que $\overline{\bar{A}} = A$.

2. Supposons qu'il existe $x \in \bar{E}$. C'est absurde puisque $x \in \bar{E}$ signifie que « $x \in E$ » est faux. Ainsi $\bar{E} = \emptyset$.

En utilisant 1. on obtient $\overline{\bar{E}} = \overline{\emptyset}$, i.e. $E = \overline{\emptyset}$.

3. On a $A \cap \bar{A} = \{x \in E \mid x \in A \wedge \neg(x \in A)\} = \emptyset$.

A partir de l'expression précédente on obtient, avec une loi de Morgan, $E = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap \bar{A}} = \bar{A} \cup \bar{\bar{A}} = \bar{A} \cup A = A \cup \bar{A}$.

4. Soit $x \in E$.

$$x \in A \cap E \iff x \in A \wedge x \in E \iff x \in A$$

Ainsi $A \cap E = A$. De cette relation appliquée à $\overline{A}$ on déduit, avec une loi de Morgan,

$$A = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A} \cap E} = A \cup \overline{E} = A \cup \emptyset.$$

□

Remarque 23. Le point 4. de la proposition précédente signifie que E est l'élément neutre pour l'intersection, et que $\emptyset$ est l'élément neutre pour la réunion.

Proposition 24.

Soit E un ensemble, A , B et C des parties de E . Alors :

1. **Distributivité de $\cup$ sur $\cap$.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. **Distributivité de $\cap$ sur $\cup$.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. 1. Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
- Si $x \in B \cap C$, alors $x \in B$ et $x \in C$. Donc $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.

Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Supposons $x \in \overline{A}$. Si $x \in \overline{B}$, on a $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, d'où d'après 1., $x \in \overline{A \cup B}$, ce qui est contradictoire. Ainsi $x \in B$. De même, on montre que $x \in C$. Ainsi $x \in B \cap C$, ce qui entraîne que $x \in A \cup (B \cap C)$.

Dans tous les cas, $x \in A \cup (B \cap C)$. Donc $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

D'où l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

L'autre démonstration est laissée au lecteur (on peut aussi le faire par double inclusion). □

Dans cette démonstration, on a utilisé la méthode suivante :

Remarque technique 25. On rappelle que si P , Q et R sont des assertions, on a

$$(P \text{ ou } Q \implies R) \equiv (P \implies R \text{ et } Q \implies R).$$

En conséquence, si A , B et C sont trois parties de E , que l'on veut montrer que $A \cup B \subset C$, on procède ainsi : on fixe $x \in A \cup B$ quelconque. On distingue deux cas :

- Si $x \in A$. [Raisonnement] donc $x \in C$.
- Si $x \in B$. [Raisonnement] donc $x \in C$.

On vient de montrer que si $x \in A \cup B$, alors $x \in C$. Ainsi $A \cup B \subset C$.

Exercice d'application 26. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . Montrer que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

↔ *Méthode 1.* On raisonne par double inclusion.

- Soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Alors $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.
 - Si $x \in A \setminus B$, i.e. $x \in A \cap \overline{B}$. Alors $x \in A$ donc $x \in A \cup B$. Or $x \in \overline{B}$ donc en particulier $x \in \overline{A \cap B}$, puis $x \in \overline{A \cap B}$. On a alors $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
 - Si $x \in B \setminus A$. Alors en échangeant les rôles de A et B , on montre de même que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$.
 - Supposons $x \in A$. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$, ce qui contredit $x \in \overline{A \cap B}$. Ainsi $x \in \overline{B}$, puis $x \in A \setminus B$ et ainsi $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
 - Si $x \in B$, on montre de même que $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Par double inclusion, on a bien montré l'égalité des deux ensembles.

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \\
&= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B}) \quad (\text{distributivité}) \\
&= E \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap E \\
&= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \quad (\text{loi de Morgan}) \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B).
\end{aligned}$$
[illegible]

Soit E un ensemble. Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit A_i une partie de E . Alors :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{n}; \frac{1}{n} \right] = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{n}; \frac{1}{n} \right] = [-1; 1].$$

↪ Notons $A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left[\frac{-1}{n}; \frac{1}{n} \right]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $0 \in \left[\frac{-1}{n}; \frac{1}{n} \right]$, donc $0 \in A$, puis $\{0\} \subset A$.

Réciproquement, soit $x \in A$. Supposons $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$. Notons n un entier strictement supérieur à $\frac{1}{|x|}$: $n > \frac{1}{|x|} > 0$. Alors $|x| > \frac{1}{n}$, ce qui contredit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x| \leq \frac{1}{n}$. Finalement, $x = 0$ et $A \subset \{0\}$.

Finalemment, $A = \{0\}$.

Notons $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{n}; \frac{1}{n} \right]$. Soit $x \in [-1; 1]$. On a, pour $n = 1$, $x \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right]$, d'où $x \in B$, puis $[-1; 1] \subset B$.

Réciproquement, soit $x \in B$. Alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$, donc en particulier, puisque $-1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$, $x \in [-1; 1]$, et ainsi $B \subset [-1; 1]$.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . A et B sont dites **disjointes** si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 30.

Soit E un ensemble, I un ensemble et pour tout $i \in I$, A_i , une partie de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une **partition** de E si

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$;
- $\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j) \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit que les A_i sont deux à deux disjoints);
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Exercice d'application 31. Montrer que $(\{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi)}\})_{\theta \in [0; \pi[}$ est une partition de $\mathbf{U}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $\theta \in [0; \pi[$, on note $A_\theta = \{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi)}\}$. Pour tout $\theta \in [0; \pi[$, A_θ contient deux éléments, donc en particulier est non vide.

Soit $(\theta, \theta') \in [0; \pi[^2$. Supposons que $A_\theta = A_{\theta'}$. Alors on a en particulier $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ou $e^{i\theta} = e^{i(\theta'+\pi)}$ ou $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\theta'}$ ou $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i(\theta'+\pi)}$. Traitons ces cas dans l'ordre où ils apparaissent :

- Si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, alors $\theta \equiv \theta' [2\pi]$. Or $\theta - \theta' \in]-\pi; \pi[$, d'où $\theta = \theta'$ (la seule valeur de k pour laquelle on ait $\theta - \theta' = 2k\pi$ est 0 (et on n'a jamais $\theta - \theta' = \pi + 2k\pi$ puisque $\theta - \theta' - \pi \in]-2\pi; 0[$).
- Les autres cas sont similaires.

On a clairement $\bigcup_{\theta \in [0; \pi[} A_\theta \subset \mathbf{U}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbf{U}$. Par définition, il existe $t \in [-\pi; \pi[$ tel que $z = e^{it}$. Si $t \in [0; \pi[$, on pose $\theta = t$ et on a $z = e^{i\theta}$. Sinon, on pose $\theta = t + \pi$ de sorte que $\theta \in [0; \pi[$ et $e^{i\theta+\pi} = e^{i(t+\pi)+\pi} = e^{it+2i\pi} = e^{it} = z$. Finalement $z \in \bigcup_{\theta \in [0; \pi[} A_\theta$.

1.4. Produit cartésien

Définition 32.

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F est

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

On peut généraliser le produit cartésien à n ensembles (où $n \in \mathbf{N}^*$) $E_1, E_2, \dots, E_n$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$E^n = E \times E \times \dots \times E = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E\}.$$

Les éléments de $E_1 \times \dots \times E_n$ sont appelés des **n -uplets**, avec les terminologies particulières suivantes pour les petites valeurs de n :

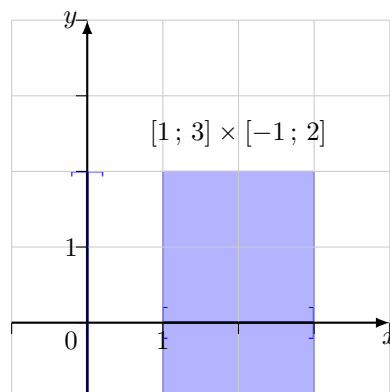
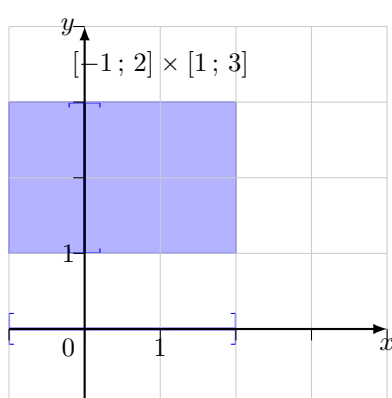
- les 2-uplets sont aussi appelés **couples** (et pas des produits!);
- les 3-uplets sont aussi appelés **triplets**;
- les 4-uplets sont aussi appelés **quadruplets**.

Exemple 33. 1. Si le plan est muni d'un repère, l'ensemble des coordonnées des points du plan est $\mathbf{R}^2$.

2. Si l'espace est muni d'un repère, l'ensemble des coordonnées des points de l'espace est $\mathbf{R}^3$.

Exercice d'application 34. Dessiner $[-1; 2] \times [1; 3]$, puis $[1; 3] \times [-1; 2]$

↪



Remarque 35. L'ordre est important ! $E \times F$ et $F \times E$ sont deux ensembles différents en général.

Il faut aussi faire très attention aux notations !

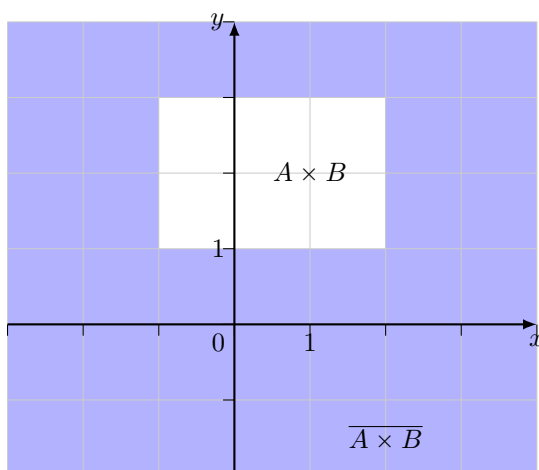
- $\{1, 2, 3\}$ désigne un ensemble : en particulier $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ (l'ordre n'a pas d'importance) et $\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ (les répétitions « ne comptent pas »).
- $(1, 2, 3)$ est un triplet, c'est-à-dire un élément d'un produit cartésien de trois ensembles ($\mathbf{R}^3$ par exemple). Le triplet $(3, 1, 2)$ est différent (l'ordre compte) et $(1, 1, 2, 3)$ est aussi différent (ça n'est même pas un triplet, mais plutôt un quadruplet).

Exercice d'application 36. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Déterminer $\overline{A \times B}$ le complémentaire de $A \times B$ dans E^2 en fonction de $\overline{A}$, $\overline{B}$ et E .

↪

$$\begin{aligned} \overline{A \times B} &= \{(x, y) \in E^2 \mid \neg(x \in A \text{ et } y \in B)\} \\ &= \{(x, y) \in E^2 \mid x \notin A \text{ ou } y \notin B\} \\ &= \{(x, y) \in E^2 \mid x \notin A\} \cup \{(x, y) \in E^2 \mid y \notin B\} \\ &= \overline{A} \times E \cup E \times \overline{B} \end{aligned}$$



2. Applications

Dans toute la suite, E et F désigneront des ensembles.

2.1. Définition, restriction, prolongement

Définition 37.

Une **application** f de E dans F associe à chaque élément x de E un et un seul élément de F , appelé **image**, et noté $f(x)$.

Si $y \in F$, un **antécédent** de y par f est un élément x de E tel que $y = f(x)$.

E est appelé **ensemble de départ** et F **ensemble d'arrivée**.

On notera $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F , et, pour $f \in \mathcal{F}(E, F)$,

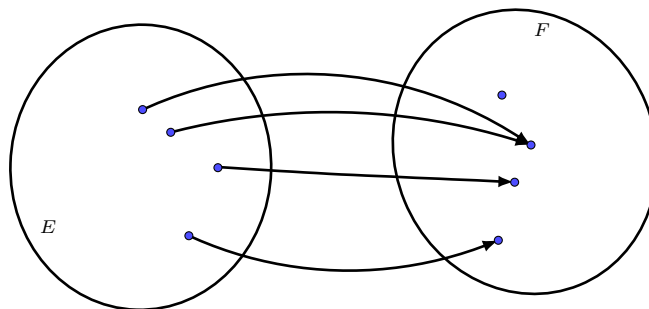
$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} .$$

Remarque 38. Un élément de E a une et une seule image dans F .

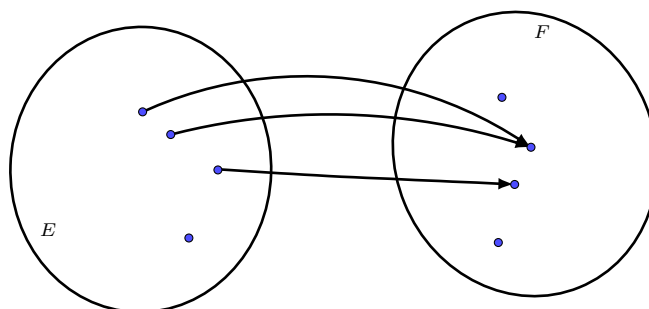
Un élément de F peut avoir zéro, un seul ou plusieurs antécédents dans E

On peut aussi les représenter par des **diagrammes sagittaux**.

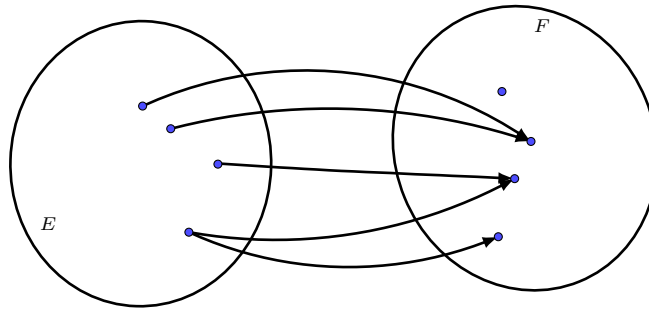
Le diagramme suivant correspond à une application.



Le diagramme suivant ne correspond pas à une application, car un élément de E n'a pas d'image.



Le diagramme suivant ne correspond pas à une application, car un élément de E possède deux images.



Définition 39 - Exemples de fonctions classiques.

1. On appelle **identité** de E , notée Id_E , l'application

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

2. Si $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A , notée $\mathbf{1}_A$ l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

3. Soit I un ensemble fini (généralement $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbf{N}^*$). On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E . On note $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille.

Proposition 40.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On a

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A.$$

Démonstration.

Il suffit de vérifier les formules pour $x \in E$, en distinguant quatre cas $x \in A \cap B$, $x \in \overline{A} \cap B$, $x \in A \cap \overline{B}$ et $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. $\square$

Définition 41.

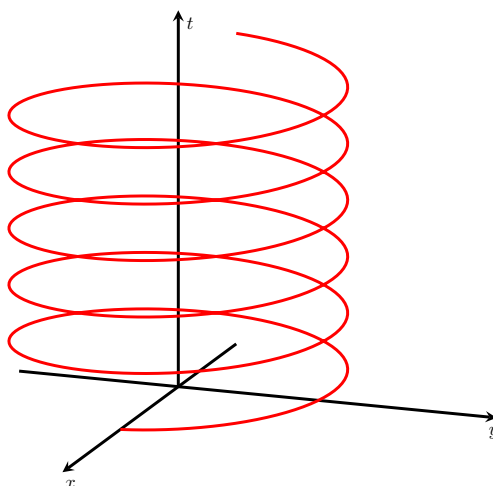
Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Le **graphe** de f est $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$. C'est une partie de $E \times F$.

Exemple 42. 1. Le graphe de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est représenté géométriquement par une parabole du plan.

$$\begin{aligned} x &\longmapsto 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

2. Le graphe de l'application $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ est représenté géométriquement par une spirale de l'espace.

$$\begin{aligned} t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$



Il est parfois utile de changer le domaine de définition d'une application, cela correspond aux notions de prolongement et de restriction.

Définition 43.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- Soit $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application $f|_A : A \longrightarrow F$.

$$x \longmapsto f(x)$$
- Soit B un ensemble tel que $E \subset B$. Un **prolongement** de f à B est une application $g : B \longrightarrow F$ telle que $g|_E = f$.

Exemple 44. On pose $g : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

Alors $g_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est un prolongement (continu) de g .

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.2. Image directe et image réciproque d'une partie par une application

Définition 45.

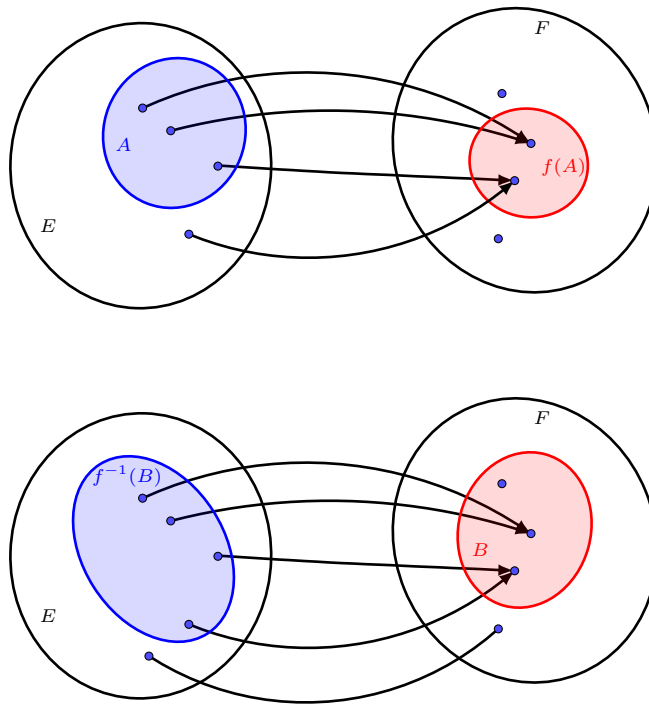
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F .

L'**image directe** de A par f est l'ensemble des images des éléments de A par f :

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$



Remarque 46. On voit avec l'illustration précédente que la partie $f^{-1}(f(A))$ n'est pas toujours incluse dans A (dans la première illustration, $f^{-1}(f(A)) = E$). De même, $f(f^{-1}(B))$ n'est pas toujours incluse dans B (dans la deuxième illustration, B contient trois éléments, alors que $f(f^{-1}(B))$ n'en contient que deux).

Exercice d'application 47. On pose $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Déterminer $f([3; 4])$, $f^{-1}([3; 4])$, $f([-1; 2])$ et $f^{-1}([-1; 2])$.

$\hookrightarrow$

- Soit $y \in \mathbf{R}$.

$$y \in f([3; 4]) \iff \exists x \in [3; 4], y = x^2 \iff y \in [9; 16],$$

car

$$3 \leq x \leq 4 \iff 9 \leq x^2 \leq 16$$

Finalement, $f([3; 4]) = [9; 16]$.

- Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x \in f^{-1}([3; 4]) \iff f(x) \in [3; 4] \iff x^2 = y \iff 3 \leq x^2 \leq 4 \iff x \in [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2],$$

donc $f^{-1}([3; 4]) = [-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$.

- De même, on montre que $f([-1; 2]) = [0; 4]$ et $f^{-1}([-1; 2]) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Exercice d'application 48. Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $A = \{0; 1\}$
 $n \longmapsto \text{le reste de la division de } n \text{ par } 2$

$\{0; 2; 4\}$. Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(\{1\})$.

$\hookrightarrow f(A) = \{0\}$ car tous les éléments de A sont pairs. De plus, $f^{-1}(\{1\})$ est l'ensemble des entiers impairs de $\mathbb{Z}$, à savoir $\{1; 3; 5; 7\}$.

Exemple 49. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$ et $\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}) = \overline{A}$.

Remarque 50. L'utilisation de la notation $f^{-1}(A)$ lorsque A est un ensemble NE SIGNIFIE PAS que f est une bijection.

$f^{-1}(A)$ n'est PAS l'image de A par la bijection réciproque de f , car f n'a aucune raison d'être bijective.

Proposition 51.

Soit f une application de E dans F .

- Soient A et A' des parties de E telles que $A \subset A'$. Alors $f(A) \subset f(A')$.
- Soient B et B' des parties de F telles que $B \subset B'$. Alors, $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Démonstration. • Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. $A \subset A'$ donc $x \in A'$. On en déduit que $y = f(x) \in f(A')$.

Cela étant vrai pour tout $y \in f(A)$, on en déduit que $f(A) \subset f(A')$.

- Soit $x \in f^{-1}(B)$. Comme $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$, on a $f(x) \in B$.

Comme $B \subset B'$, on a aussi $f(x) \in B'$.

On en déduit que $x \in f^{-1}(B')$.

Cela étant vrai pour tout x dans $f^{-1}(B)$, on a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

□

Définition 52.

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on appelle **ensemble image** de f , noté $f(E)$ ou $\text{Im}(f)$, l'ensemble des valeurs prises par f .

$$f(E) = \text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Exercice d'application 53. On considère $f : \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, où $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ désigne

$$u \longmapsto u'$$

l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Justifier que $\text{Im}(f) = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

$\hookrightarrow$ Soit $v \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Puisque v est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure qu'il existe $u \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dérivable telle que $u' = v$ (u est une primitive de v). Or v est dérivable, donc $u' = v$ est également dérivable, et ainsi $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Ainsi la relation $f(u) = v$ entraîne $v \in f(\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}))$. On vient de montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \subset \text{Im}(f)$.

L'inclusion réciproque est trivialement vraie car $\text{Im}(f)$ est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de f par définition.

Exercice d'application 54. Déterminer l'image de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$.

$$\theta \longmapsto e^{i\theta}$$

$\hookrightarrow$ Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$z \in f(\mathbf{R}) \iff \exists \theta \in \mathbf{R}, z = e^{i\theta}$$

Or l'équation $z = e^{i\theta}$ d'inconnue θ admet une solution si et seulement si $|z| = 1$. Ainsi $f(\mathbf{R}) = \mathbf{U}$.

2.3. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 55.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est **injective** si tout élément de F a au plus un antécédent par f . Autrement dit,

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

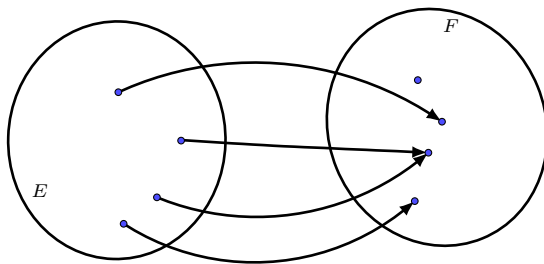
- f est **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f . Autrement dit,

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

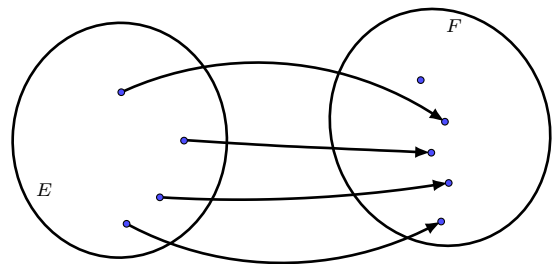
- f est **bijective** si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes elle est à la fois injective et surjective, *i.e.* si tout élément de F a un et un seul antécédent par f . Autrement dit,

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

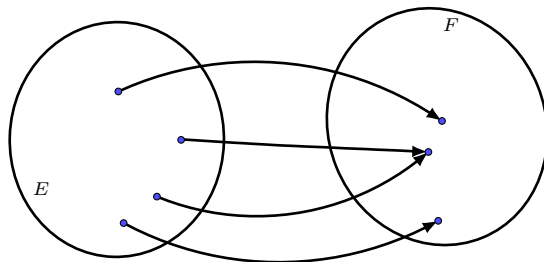
Application non injective, non surjective



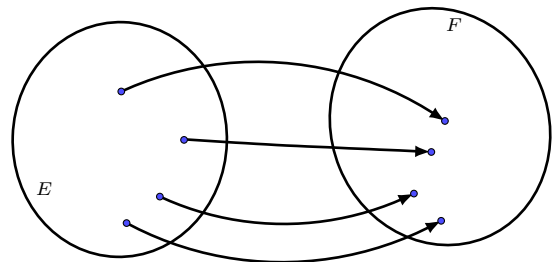
Application injective, non surjective



Application non injective, surjective



Application bijective



Remarque technique 56.

1. Pour démontrer l'injectivité, on peut suivre le schéma de preuve suivant :

*On veut montrer que f est injective. Soient x et x' éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
[raisonnement]*

On en déduit que $x = x'$.

On vient de montrer que tout élément de F admet au plus un antécédent par f , donc f est une application injective.

2. Pour montrer la surjectivité, on peut suivre le schéma de preuve suivant :

Première méthode. On veut montrer que f est surjective. Soit $y \in F$.

On vient de montrer que tout élément de F admet au moins un antécédent par f , donc f est une application surjective.

Proposition 63.

Soient E, F, G et H des ensembles.

1. Pour tout $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.
2. Pour tous $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Démonstration. 1. Immédiat.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(G, H)$. Soit $x \in E$.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

□

Remarque 64. Le point 2. de la proposition traduit l'associativité de $\circ$.

Proposition 65.

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
Inversement, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

- Démonstration.* 1. Supposons f et g injectives. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque g est injective, on a $f(x) = f(x')$. Puisque f est injective, on a $x = x'$. Ainsi $g \circ f$ est injective. Réciproquement, supposons $g \circ f$ injective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En composant par g , on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, puis par injectivité de $g \circ f$, $x = x'$. Ainsi f est injective.
2. Supposons f et g surjective. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g , il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Par surjectivité de f , il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi $f(g(x)) = f(y) = z$, et la surjectivité de $g \circ f$ est acquise.
Réciproquement, supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. Par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Ainsi $f(x)$ est un antécédent de z par g , donc g est surjective.
 3. Immédiat avec les points précédents.

□

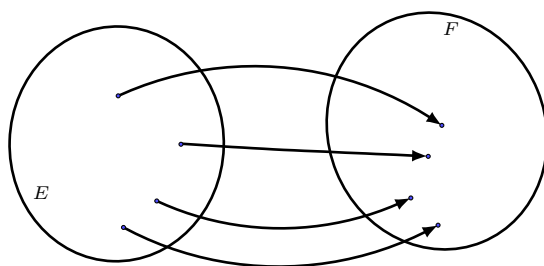
Définition 66.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, on peut définir l'application f^{-1} , appelée **bijection réciproque** de f et définie de F dans E par :

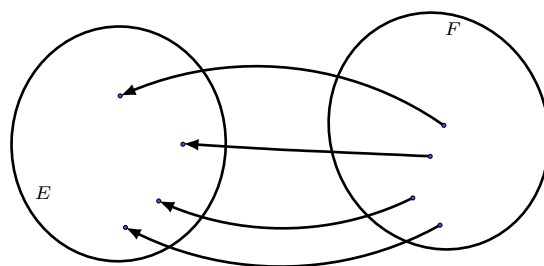
$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) \text{ l'unique antécédent de } x \text{ par } f \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\forall y \in F, \forall x \in E, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

On obtient avec la définition que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad x = f^{-1}(f(x)) \quad \text{et} \quad y = f(f^{-1}(y)).$$

Ces relations permettent de caractériser les bijections :

Proposition 67.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

L'application g est alors unique et c'est la bijection réciproque de f .

Démonstration.

Si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ convient.

Réciproquement, supposons qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$. On déduit de la première égalité que f est injective, et de la seconde que f est surjective. Ainsi f est bijective.

Enfin, en composant $f \circ g = \text{Id}_F$ par f^{-1} , on obtient que $g = f^{-1}$. $\square$

Remarque technique 68. Cette proposition fournit une troisième méthode pour déterminer si une application est bijective : si on arrive à déterminer directement une application que l'on pense être la réciproque de f , on introduit celle-ci, que l'on note g par exemple (ne surtout pas la noter f^{-1} tant qu'on n'a pas prouvé que f est bijective) et on vérifie que $f \circ g = \text{Id}_F$ et que $g \circ f = \text{Id}_E$.

Exercice d'application 69. Justifier que $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est bijective.

$$x \longmapsto x^2$$

$\hookrightarrow$ Posons $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$. On vérifie que

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R}_+, (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x.$$

Proposition 70.

- Si f est une bijection de E dans F et si g est une bijection de F dans G , alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Si f est une bijection de E dans F , alors sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective et :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration. • On a vu que $g \circ f$ est bijective (cf. Proposition 65). Par ailleurs,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{Id}_G \quad \text{et} \quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_F.$$

Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

- Cela résulte directement des identités $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$. □

3. Relation d'équivalence

Définition 71.

Soit E un ensemble. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E la donnée d'une partie Γ de $E \times E$.

On dit qu'un élément $x \in E$ est en relation avec un autre élément $y \in E$, et on note $x\mathcal{R}y$, si $(x, y) \in \Gamma$.

Exemple 72. Notons $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par $\Gamma = \{(x, x) : x \in E\}$. Alors $x\mathcal{R}x$ si et seulement si $x = y$.

Définition 73.

Une **relation d'équivalence** sur un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E qui est :

1. **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
2. **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
3. **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

On appelle alors **classe d'équivalence modulo** $\mathcal{R}$ d'un élément $x \in E$, note $\bar{x}$ (ou $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$) la partie de E donnée par :

$$\bar{x} = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}$$

Ainsi $\bar{x} \in \mathcal{P}(E)$.

Les éléments de $\bar{x}$ sont appelés les **représentants** de la classe de x .

Exemple 74. On note $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On rappelle que deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{e}_2 = k\vec{e}_1$ et $\vec{e}_1 = k\vec{e}_2$. La relation de colinéarité n'est pas une relation d'équivalence sur $\vec{\mathcal{P}}$ (elle est réflexive, transitive mais pas symétrique). La relation de colinéarité est toutefois une relation d'équivalence si l'on se restreint à l'ensemble $\vec{\mathcal{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ des vecteurs non nuls du plan. Si $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(1; 1)$, la classe d'équivalence de $\vec{u}$ est constituée de tous les vecteurs portés par la première bissectrice.

Exercice d'application 75.

1. Démontrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x\mathcal{R}y \iff x \equiv y [2\pi],$$

est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Décrire $\bar{x}$ à l'aide d'un ensemble écrit en compréhension.

↪

1. La preuve a déjà été faite au chapitre 3. Rappelons-la rapidement.

- *Réflexivité.* Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $x = x + 0 \times 2\pi$, donc $x \equiv x [2\pi]$, i.e. $x\mathcal{R}x$.
- *Symétrie.* Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x \equiv y [2\pi]$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$. Ainsi $y = x + (-k)2\pi$, où $-k \in \mathbf{Z}$. Ainsi $y \equiv x [2\pi]$, i.e. $y\mathcal{R}x$.
- *Transitivité.* Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x \equiv y [2\pi]$ et $y \equiv z [2\pi]$. Alors il existe $(k, k') \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x = y + 2k\pi$ et $y = z + 2k'\pi$. Ainsi $x = z + 2(k + k')\pi$, puis $x\mathcal{R}z$.

Finalement, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. On a

$$\bar{x} = \{y \in \mathbf{R} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, y = x + 2k\pi\} = \{x + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

(qu'on note parfois $x + 2\pi\mathbf{Z}$).

Proposition 76.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E .

1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\bar{x} = \bar{y}$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.
2. L'ensemble des classes d'équivalences constitue une partition de E .

Démonstration. 1. Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons que $\bar{x} = \bar{y}$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $x \in \bar{x}$, puis $x \in \bar{y}$, donc $x\mathcal{R}y$ par définition.

Réciproquement, on suppose que $x\mathcal{R}y$. Montrer que $\bar{x} = \bar{y}$. On procède par double inclusion. Soit $z \in \bar{x}$. On a $z\mathcal{R}x$. Or $x\mathcal{R}y$ donc, par transitivité, $z\mathcal{R}y$, ce qui signifie que $z \in \bar{y}$. On a montré que $\bar{x} \subset \bar{y}$. L'autre inclusion se montre de la même manière.

2. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $x \in \bar{x}$ pour tout $x \in E$. En particulier $\bar{x} \neq \emptyset$.

On a également, pour tout $x \in E$, $x \in \bigcup_{x \in E} \bar{x}$. Ainsi $E \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$. L'autre inclusion étant triviale,

on a $\bigcup_{x \in E} \bar{x} = E$.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Soit $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Alors $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Avec le point (1), on obtient donc $\bar{z} = \bar{x}$ et $\bar{z} = \bar{y}$, d'où $\bar{x} = \bar{y}$. Ainsi, on vient de montrer par contraposition que les classes d'équivalences sont disjointes deux à deux. $\square$