

# Chapitre 8

## Les nombres réels

 Our moi, la mathématique, c'est la conquête du continu par le discret.

René Thom<sup>1</sup>

 Il se peut qu'il n'y ait aucune utilité à savoir que  $\pi$  est irrationnel, mais si nous pouvons le savoir, il serait certainement intolérable de ne pas le savoir.

Edward Charles Titchmarsh<sup>2</sup>

### 1. Autres ensembles de nombres

#### Définition 1.

- On appelle **ensemble des entiers naturels** l'ensemble  $\mathbf{N} = \{0; 1; 2...\}$ .
- On appelle **ensemble des entiers relatifs** l'ensemble  $\mathbf{Z}$  constitué des nombres naturels et de leurs opposés. Autrement dit,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{-n : n \in \mathbf{N}\}.$$

- On appelle **ensemble des nombres décimaux** l'ensemble

$$\mathbf{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} : (p, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}.$$

- On appelle **ensemble des nombres rationnels** l'ensemble  $\mathbf{Q}$  des quotients d'entiers relatifs. Autrement dit,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \right\}.$$

1. René THOM - mathématicien français (1923-2002)

2. Edward Charles TITCHMARSH, mathématicien britannique (1899-1963)

**⚠ Attention ⚠.** L'écriture décimale n'est pas unique. Par exemple, posons  $x = 0,999\dots$ . Alors  $10x - 9 = x$ , puis  $x = 1$ .

Notons qu'on peut voir  $0,999\dots$  comme la limite de la suite de terme général  $\sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k}$ . On a

$$\sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1 - 10^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

### Proposition 2.

On a les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q}.$$

*Démonstration.*

Les inclusions sont claires d'après la définition.

On a  $-1 \in \mathbf{Z}$  et  $-1 \notin \mathbf{N}$ , donc l'inclusion  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$  est stricte.

On a  $1, 2 \in \mathbf{D}$  et  $1, 2 \notin \mathbf{Z}$ , donc l'inclusion  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$  est stricte.

On a  $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$ . Supposons de plus que  $\frac{1}{3} \in \mathbf{D}$ . Alors il existe  $(p, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$  tel que  $\frac{1}{3} = \frac{p}{10^n}$ . Il s'ensuit  $3p = 10^n$ , ce qui entraîne que  $10^n$  est divisible par 3, ce qui est absurde. Ainsi  $\frac{1}{3} \notin \mathbf{D}$  et l'inclusion  $\mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$  est stricte.  $\square$

## 2. Les nombres réels

Depuis l'antiquité, on sait qu'il existe des longueurs constructibles simplement à l'aide de longueurs entières et pourtant non rationnelles. C'est le cas de  $\sqrt{2}$  qui est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont chacun des côtés de l'angle droit mesure 1 unité de longueur.

Cette insuffisance de  $\mathbf{Q}$  en entraîne d'autres.

- On montrera plus tard que les deux suites  $u$  et  $v$  de nombres rationnels définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  ont une limite qui est  $\sqrt{2}$ . Leur limite n'est donc pas un nombre rationnel.
- La fonction  $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$   
 $x \longmapsto x^2 - 2$  prend des valeurs positives et négatives, et pourtant, elle ne s'annule pas. Autrement dit, le théorème des valeurs intermédiaires n'existe pas avec les fonctions de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{Q}$ !

On admet l'existence d'un ensemble  $\mathbf{R}$ , contenant  $\mathbf{Q}$ , permettant par exemple de repérer par leur abscisse tous les points d'une droite munie d'un repère  $(O, \vec{i})$  (appelée droite réelle).

### 2.1. Borne supérieure, borne inférieure

Dans toute la suite, on notera, pour toute partie  $A$  de  $\mathbf{R}$ ,  $\max(A)$  (resp.  $\min(A)$ ) le maximum (resp. minimum de  $A$  (s'il existe). Il est interdit d'utiliser cette notation si le maximum (resp. minimum) n'existe pas. Il faut donc démontrer que  $A$  admet un maximum (resp. minimum) avant d'écrire  $\max(A)$  (resp.  $\min(A)$ ).

**Définition 3.**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}$  non vide.

- On appelle **borne supérieure** de  $A$ , et on note  $\sup(A)$ , le plus petit élément de l'ensemble des majorants de  $A$ , s'il existe.
- On appelle **borne inférieure** de  $A$ , et on note  $\inf(A)$ , le plus grand élément de l'ensemble des minorants de  $A$ , s'il existe.

*Démonstration.*

*Unicité de la borne supérieure.* La borne supérieure étant définie comme le minimum de l'ensemble des majorants, l'unicité de la borne supérieure provient de l'unicité du minimum.

*Unicité de la borne inférieure.* Même idée.  $\square$

**Exemple 4.** Un ensemble non majoré (resp. non minoré) n'a pas de borne inférieure (resp. supérieure) puisque l'ensemble des majorants (resp. minorants) est vide.

L'écriture  $\sup(A)$  (on pourrait dire de même de  $\inf(A)$ ,  $\min(A)$ ,  $\max(A)$ ) n'est autorisée que si la borne supérieure existe. Il faut donc s'en assurer préalablement.

**Théorème 5 - Théorèmes de la borne supérieure et de la borne inférieure.**

$\mathbf{R}$  a la propriété de la borne supérieure, i.e. :

- Toute partie non vide et majorée de  $\mathbf{R}$  possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de  $\mathbf{R}$  possède une borne inférieure.

*Démonstration.* 1. Admis (la preuve dépend de comment on construit  $\mathbf{R}$ , et la construction de  $\mathbf{R}$  n'est pas au programme...).

2. On applique le point 1. à  $B = \{-x : x \in A\}$ , et on vérifie que  $-\sup(B) = \inf(A)$ .  $\square$

**Proposition 6.**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}$  non vide.

$$\alpha = \max(A) \iff \begin{cases} \alpha = \sup(A) \\ \alpha \in A \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha = \min(A) \iff \begin{cases} \alpha = \inf(A) \\ \alpha \in A \end{cases}$$

*Démonstration.*

On ne démontre que la première équivalence.

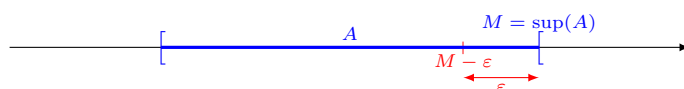
Supposons que  $\alpha = \max(A)$ . Alors  $\alpha \in A$  par définition du plus grand élément. En particulier, comme  $\sup(A)$  est un majorant de  $A$ ,  $\sup(A) \geq \alpha$ . Or  $\alpha$  est un majorant de  $A$ , donc  $\sup(A) \leq \alpha$ . Donc  $\sup(A) = \alpha$ .

Réciproquement, supposons  $\alpha = \sup(A)$  et  $\alpha \in A$ . On a immédiatement  $\sup(A) = \max(A)$  en tant que majorant élément de  $A$  et par unicité du maximum.  $\square$

### Théorème 7 - Caractérisation de la borne supérieure.

Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbf{R}$ . Soit  $M \in \mathbf{R}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M = \sup(A)$ .
- (ii)  $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } M' \text{ majorant de } A, M \leq M' \end{cases}$
- (iii)  $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } b < M, b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$
- (iv)  $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \end{cases}$



*Démonstration.*

Chaque assertion est une traduction de la définition. □

**Exercice d'application 8.** Déterminer, s'ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de  $A = [0; 1[$ .

$\hookrightarrow 0 \in A$  et pour tout  $x \in A$ ,  $x \geq 0$ . Donc  $\min(A) = 0$  et  $\inf(A) = 0$ .

Démontrons que 1 est la borne supérieure de  $A$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $x = \max\{\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ . Alors  $x \in A$  et  $x > 1 - \varepsilon$ , donc, d'après l'assertion (iv) du Théorème 7,  $\sup(A) = 1$ . Puisque  $1 \notin A$ , on obtient également que  $A$  n'a pas de plus grand élément.

### Théorème 9 - Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbf{R}$ . Soit  $M \in \mathbf{R}$ .

$M$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si,  $M$  est un majorant de  $A$  et il existe une suite  $u$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

*Démonstration.*

On démontrera ce résultat dans un chapitre ultérieur. □

**Exercice d'application 10.** Reprendre l'exercice précédent et démontrer que  $\sup([0; 1]) = 1$  à l'aide de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

$\hookrightarrow 1$  majore clairement  $[0; 1[$  et  $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}^*} \in [0; 1[^\mathbf{N}$  avec  $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , donc  $\sup([0; 1]) = 1$ .

**Théorème 11 - Caractérisation de la borne inférieure.**

Soit  $B$  une partie non vide et minorée de  $\mathbf{R}$ . Soit  $m \in \mathbf{R}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $m = \inf(B)$ .
- (ii)  $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout } m' \text{ minorant de } B, m' \leq m \end{cases}$
- (iii)  $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout } b > m, b \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases}$
- (iv)  $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B, x < m + \varepsilon \end{cases}$

**Exercice d'application 12.** Déterminer, si ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de  $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$ .

$\hookrightarrow 1 \in B$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{1}{n} \leq 1$ . Donc  $\max(B) = 1$  et  $\sup(B) = 1$ .

Soit  $b > 0$ . Alors, pour un entier  $n$  supérieur strictement à  $\frac{1}{b}$ , on a  $\frac{1}{n} < b$ , ce qui montre que  $b$  n'est pas un minorant de  $B$ . Ainsi, l'assertion (iii) du Théorème 11 assure que  $0 = \inf(B)$ . De plus,  $0 \notin B$ , donc  $B$  n'a pas de plus petit élément.

**Théorème 13 - Caractérisation séquentielle de la borne inférieure.**

Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbf{R}$ . Soit  $M \in \mathbf{R}$ .

$M$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si,  $M$  est un majorant de  $A$  et il existe une suite  $u$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

*Démonstration.*

On démontrera ce résultat dans un chapitre ultérieur. □

Notons qu'avec ce résultat, l'exercice d'application précédent devient immédiat.

**Exercice d'application 14.** Déterminer, si ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de

$$A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} : n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

$\hookrightarrow$  On a  $A = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}} : n \in \mathbf{N}^* \right\}$ . Posons pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{1 - 2^{-n}}$ . On a  $u$  décroissante, donc pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n \leq u_1$  et ainsi  $\max(A) = u_1 = 2$ . En particulier,  $\sup(A) = 1$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $1 - 2^{-n} \in ]0; 1[$ , donc  $u_n > 1$  et ainsi 1 minore  $A$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ , on obtient que  $\inf(A) = 1$  (mais  $A$  n'admet pas de maximum puisque  $1 \notin A$ ).

**2.2. Droite réelle achevée**

On rappelle la définition suivante :

**Définition 15.**

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble  $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  où  $-\infty$  et  $+\infty$  sont deux objets non réels ayant la propriété

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent sur  $\overline{\mathbf{R}}$  en complétant par les opérations suivantes

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \quad x + (+\infty) &= +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) &= +\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) &= -\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = +\infty \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) \times (+\infty) &= +\infty \quad (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \quad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

**Attention :** Les opérations  $(-\infty) + (+\infty)$ ,  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $0 \times (+\infty)$  et  $0 \times (-\infty)$  ne sont pas définies.

### 2.3. Compléments sur les intervalles de $\mathbf{R}$

**Définition 16.**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}$ . La partie  $A$  est dite **convexe** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad [x; y] \subset A.$$

**Proposition 17.**

Les parties convexes de  $\mathbf{R}$  sont les intervalles. Ils peuvent prendre les formes suivantes.

1. Ensemble vide.
2. Segment :  $[a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$  où  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  et  $a \leq b$ .
3. Intervalle ouvert :  $]a; b[ = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$  où  $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$  et  $a < b$ .
4. Intervalle semi-ouvert :  $[a; b[ = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$  ou  $]a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ , avec  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  et  $a < b$ .
5. Intervalle fermé non borné :  $[a; +\infty[$  ou  $]-\infty; a]$ , avec  $a \in \mathbf{R}$ .

*Démonstration.*

Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbf{R}$ .

- Cas où  $A$  est majorée non minorée.

Posons  $a = \sup(A)$  ( $A$  est non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure).

Soit  $x \in A$ .  $\sup(A)$  majore  $A$ , donc  $x \leq \sup(A)$ , puis  $A \subset ]-\infty; a]$ .

Soit  $x \in ]-\infty; a[$ . Puisque  $x < a$ ,  $x$  ne majore pas  $A$  : il existe  $y \in A$  tel que  $x < y$ . Par ailleurs,  $A$  n'est pas minorée donc il existe  $z \in A$  telle que  $z < x$ . Or  $A$  est convexe, donc  $[z; y] \subset A$ . Puisque  $x \in [z; y]$ , on obtient que  $x \in A$ .

En résumé,  $]-\infty; a[ \subset A \subset ]-\infty; a]$ . Ainsi,

- si  $a \in A$ ,  $A = ]-\infty; a]$ ;
- si  $a \notin A$ ,  $A = ]-\infty; a[$ .

- On montre de même que si  $A$  est minorée non majorée,  $A = [a; +\infty[$  ou  $A = ]a; +\infty[$ , avec  $a = \inf(A)$ .
- Cas où  $A$  est majorée et minorée.  
Notons  $a = \inf(A)$  et  $b = \sup(A)$ . Soit  $x \in A$ . Puisque  $\inf(A)$  est un minorant et  $\sup(A)$  est un majorant de  $A$ ,  $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$ , puis  $x \in [a; b]$ .  
Soit  $x \in ]a; b[$ . Puisque  $a < x < b$ ,  $x$  ne majore ni ne minore  $A$  : il existe  $(y, z) \in A^2$  tel que  $y < x < z$ . Par convexité de  $A$ , il s'ensuit que  $x \in [y; z] \subset A$ , puis  $x \in A$ .  
En résumé,  $]a; b[ \subset A \subset [a; b]$ . Ainsi,
  - si  $a \in A$  et  $b \in A$ ,  $A = [a; b]$ ;
  - si  $a \in A$  et  $b \notin A$ ,  $A = [a; b[$ ;
  - si  $a \notin A$  et  $b \in A$ ,  $A = ]a; b]$ ;
  - si  $a \notin A$  et  $b \notin A$ ,  $A = ]a; b[$ .
- Supposons  $A$  non majorée, non minorée. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Puisque  $A$  est non minorée, il existe  $y \in A$  avec  $y \leq x$ . Puisque  $A$  est non majorée, il existe  $z \in A$  avec  $x \leq z$ . Ainsi  $x \in [y; z] \subset A$  car  $A$  est une partie convexe. Il s'ensuit  $\mathbf{R} \subset A$ . L'autre inclusion étant évidente, on a  $A = \mathbf{R}$ .  $\square$

**Remarque 18.** Les singletons sont aussi des intervalles de  $\mathbf{R}$ , et même des segments, puisque pour tout  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\{A\} = [a; a]$ .

### Définition 19.

Soit  $\mathcal{J}$  un ensemble et  $(E_j)_{j \in \mathcal{J}}$  une famille d'ensembles.

- L'**intersection** des ensembles  $(E_j)_{j \in \mathcal{J}}$ , noté  $\bigcap_{j \in \mathcal{J}} E_j$  est l'ensemble des éléments communs à tous les ensembles  $E_j$ , autrement dit

$$x \in \bigcap_{j \in \mathcal{J}} E_j \iff (\forall j \in \mathcal{J}, x \in E_j).$$

- La **réunion** des ensembles  $(E_j)_{j \in \mathcal{J}}$ , noté  $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} E_j$  est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles  $E_j$ , autrement dit

$$x \in \bigcup_{j \in \mathcal{J}} E_j \iff (\exists j \in \mathcal{J}, x \in E_j).$$

**Exemple 20.**

$$\bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \left] -\frac{1}{k}; 1 + \frac{1}{k} \right[ = [0; 1] \quad \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \left[ -\frac{1}{k}; 1 - \frac{1}{k} \right] = [-1; 1[$$

### Proposition 21.

L'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est un intervalle.

*Démonstration.*

Soit  $(I_j)_{j \in \mathcal{J}}$  une famille d'intervalles de  $\mathbf{R}$ . On note  $A = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} I_j$ . Pour montrer que  $A$  est un intervalle, il suffit de prendre deux nombres réels quelconques  $a$  et  $b$  dans  $A$ , et de montrer que si un nombre réel  $x$  est compris entre  $a$  et  $b$  alors il appartient à  $A$ , c'est-à-dire à tous les  $I_j$  pour tout  $j \in \mathcal{J}$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels dans  $A$ ,  $x$  un nombre compris entre  $a$  et  $b$  et  $j \in \mathcal{J}$ . Comme les nombres  $a$  et  $b$  appartiennent à  $A$ , ils appartiennent à  $I_j$ , et puisque  $I_j$  est un intervalle, tout nombre compris entre  $a$  et  $b$  appartient à  $I_j$ . On en déduit que  $x$  appartient à  $I_j$ . Comme ceci est valable quel que soit  $j \in \mathcal{J}$ , le réel  $x$  appartient à l'intersection des  $I_j$  c'est à dire à  $A$ .  $\square$

**Remarque 22.** La réunion de deux intervalles n'est pas nécessairement un intervalle. Par exemple  $[0; 1] \cup [2, 3]$  est la réunion de deux intervalles et n'est pas un intervalle.

## 2.4. Approximation d'un nombre réel

### Définition 23.

Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On appelle **partie entière** le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . On le note  $\lfloor x \rfloor$ .

Autrement dit, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\lfloor x \rfloor$  est caractérisé par

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

*Démonstration.*

On veut montrer ici qu'il existe un unique entier  $p \in \mathbf{Z}$  tel que

$$p \leq x < p + 1.$$

*Existence.* Considérons  $B = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq x\}$ . Alors  $B$  est une partie non vide majorée de  $\mathbf{Z}$ , donc elle admet un plus grand élément  $p$ . On a  $p \in B$ , donc  $p \leq x$ . De plus  $p + 1 \notin B$ , donc  $x < p + 1$ .

*Unicité.* Soient  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $p_1 \leq x < p_1 + 1$  et  $p_2 \leq x < p_2 + 1$ . Alors

$$p_1 - p_2 - 1 < 0 < p_1 - p_2 + 1$$

Puisque  $p_1 - p_2 \in \mathbf{Z}$ , on en déduit que  $p_1 - p_2 = 0$ . □

**Exemple 24.**  $\lfloor \pi \rfloor = 3$  et  $\lfloor -3, 8 \rfloor = -4$ .

Remarque technique 25. Soit  $x \in \mathbf{R}$ ,  $a \in \mathbf{R}$ . D'après la définition, montrer que  $\lfloor x \rfloor = a$  revient à montrer que  $\begin{cases} a \in \mathbf{Z} \\ x \in [a; a + 1[ \end{cases}$ .

**Exercice d'application 26.** Soit  $a \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ . Calculer la partie entière de  $\sqrt{a^2 + 5}$ .

↔ On remarque que  $a^2 \leq a^2 + 5 < a^2 + 2a + 1$ , donc  $a^2 \leq a^2 + 5 < (a + 1)^2$ . Or  $a \in \mathbf{N}$ , donc  $\lfloor \sqrt{a^2 + 5} \rfloor = a$ .

### Proposition 27.

1.  $\forall x \in \mathbf{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ .
2.  $\forall n \in \mathbf{Z}, \lfloor n \rfloor = n$ .
3.  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, (n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor)$ .
4.  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

*Démonstration.* 1. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On a  $\lfloor x \rfloor \leq x$  par définition et  $x < \lfloor x \rfloor + 1$  qui se réécrit  $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ .

2. Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . On a  $n \leq n < n + 1$  donc, d'après la Remarque Technique 25,  $\lfloor n \rfloor = n$ .

3. Immédiat en utilisant la caractérisation  $\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq x\}$  donnée dans la démonstration qui suit la définition.

4. Soit  $x \in \mathbf{R}$  et  $n \in \mathbf{Z}$ . On a  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  donc  $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$  et comme  $\lfloor x \rfloor + n$  est un entier, on en déduit que  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$  (cf. Remarque Technique 25).

□

Remarque technique 28. La caractérisation de la partie entière avec des inégalités est très utile pour résoudre des équations avec la partie entière. Si  $x$  désigne l'inconnue, on commence par encadrer  $x$  entre deux réels (phase d'analyse). Ensuite, on calcule les parties entières qui interviennent dans l'équation (puisque  $x$  est encadré par deux réels, il y a un nombre fini de calculs à faire) et on vérifie si l'équation est vérifiée (phase de synthèse).

**Exercice d'application 29.** Résoudre l'équation  $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$  d'inconnue  $x \in \mathbf{R}$ .

↪ *Analyse.* Soit  $x \in \mathbf{R}$  une solution de l'équation. On a  $2x - 1 - 1 < \lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor \leq x - 4$ , d'où  $x < -2$ . De plus,  $x - 4 - 1 < \lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor \leq 2x - 1$ , d'où  $x > -4$ . Ainsi  $x \in ]-4; -2[$ .

*Synthèse.* Soit  $x \in ]-4; -2[$ . On cherche à distinguer des cas suivant les valeurs que peuvent prendre les parties entières. Par exemple,  $-9 < x - 5 < \lfloor x - 4 \rfloor \leq x - 4 < -6$ , d'où  $\lfloor x - 4 \rfloor \in \{-8, -7\}$ .

- Résolvons  $\lfloor x - 4 \rfloor = -8$  et  $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -8$ .  
On a  $\lfloor x - 4 \rfloor = -8 \iff -8 \leq x - 4 < -8 + 1 \iff -4 \leq x < -3$ . De plus,  $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -8 \iff -8 \leq 2x - 1 < -7 \iff -\frac{7}{2} \leq x < -3$ . Ainsi les valeurs de  $[-\frac{3}{2}; -3[$  sont solutions de l'équation initiale.
- Résolvons  $\lfloor x - 4 \rfloor = -7$  et  $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -7$ .  
On a  $\lfloor x - 4 \rfloor = -7 \iff -7 \leq x - 4 < -6 \iff -3 \leq x < -2$ . De même,  $\lfloor 2x - 1 \rfloor = -7 \iff -7 \leq 2x - 1 < -6 \iff -3 \leq 2x - 1 < -\frac{5}{2}$ . Ainsi les valeurs de  $[-3; -\frac{5}{2}[$  sont solutions de l'équation initiale.

Finalement, l'ensemble des solutions est  $[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}[$ .

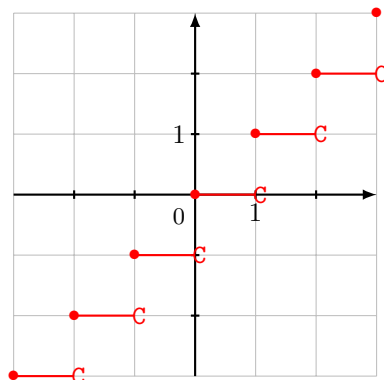
### Proposition 30.

La fonction  $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$  est croissante.  
 $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

*Démonstration.*

Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Supposons  $x \leq y$ . Alors  $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$ . Avec le point 3. de la proposition précédente, on obtient  $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ . □

Graphes de la fonction  $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ .



Soit  $x \in \mathbf{R}$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Alors  $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$  est l'unique entier tel que

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1, \quad i.e. \quad \frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

**Définition 31.**

Le nombre décimal  $\frac{p_n}{10^n}$  est appelé **approximation décimale par défaut** de  $x$  à la précision  $10^{-n}$ .

Le nombre décimal  $\frac{p_n + 1}{10^n}$  est appelé **approximation décimale par excès** de  $x$  à la précision  $10^{-n}$ .

**Exemple 32.** • On a, à  $10^{-2}$  près,  $2,71 \leq e < 2,72$ .

- On a, à  $10^{-3}$  près,  $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$ .
- On a, à  $10^{-4}$  près,  $3,1415 \leq \pi < 3,1416$ .

**Remarque 33.** Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , notons  $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  l'approximation par défaut de  $x$ . On a alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq x - u_n \leq 10^{-n}$ . Par passage à la limite on obtient avec le théorème des gendarmes que  $u$  converge vers  $x$ .

On a ainsi obtenu, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , une suite  $u$  de nombres rationnels qui converge vers  $x$ . On traduit cette propriété en disant que  $\mathbf{Q}$  est **dense** dans  $\mathbf{R}$ .