Chapitre 9

Suites réelles et complexes

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

Augustin Louis Cauchy [1]

Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance.

Leonardo Fibonacci [2]

1. Augustin Louis CAUCHY - mathématicien français (1789-1857)
2. Leonardo FIBONACCI, mathématicien italien (1175-1250) ; la citation est extraite de *Liber Abaci*, un traité de calculs récréatifs, qui est particulièrement innovant pour l'époque car fondé sur le calcul décimal, à une époque où l'Occident utilise encore les chiffres romains et calcule sur abaque ; on peut modéliser le problème énoncé à l'aide de la célèbre **suite de Fibonacci**, qui est étudiée dans ce chapitre en exercice.

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Généralités sur les suites réelles

1.1. Suites réelles : définition et notations

Définition 1.

Une **suite réelle** est une famille de nombres réels indexée par $\mathbf{N}$, c'est-à-dire une application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

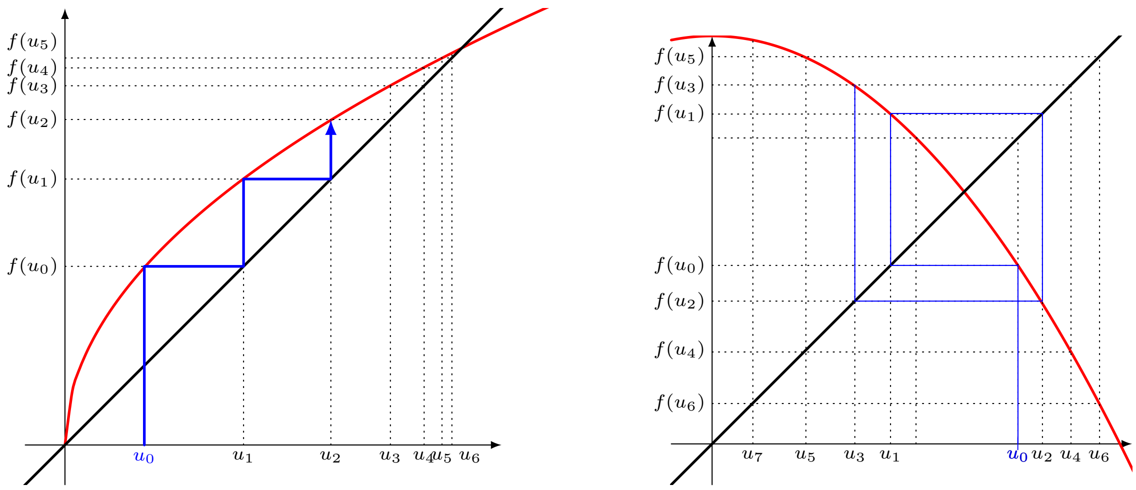
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé **terme général** (ou n-ième terme de la suite, ou terme d'indice n, ou terme de rang n) de la suite.
La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
On note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbf{N}$.

Remarque 2. Une suite réelle de terme général u_n peut aussi être indexée par les nombres entiers naturels supérieurs à un entier n_0. Une telle suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. L'étude d'une telle suite est identique à celle d'une suite indexée par $\mathbf{N}$.

On peut définir une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de plusieurs manières différentes :

- **de manière explicite :** chacun des termes de la suite est donné en fonction de n.
- **de manière implicite :** tous les termes de la suite sont correctement définis comme vérifiant une certaine propriété, mais on ne dispose pas de la valeur explicite de chacun de ses termes (souvent le terme général est défini comme l'unique solution d'une équation donnée).
- **par une relation de récurrence :** on définit explicitement le (ou les) premier(s) terme(s) de la suite puis chaque terme de la suite est défini à l'aide du (ou des) précédent(s).

Représentation d'une suite définie par récurrence



Exemple 3. 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \exp(-n+1)$$

est définie de manière explicite.
Avec cette définition, on connaît directement la valeur de chaque terme de la suite. Dans notre exemple, $u_{20} = \exp(-19)$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans $[-1; +\infty[$ donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique nombre $u_n \in \mathbf{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et, *a priori*, il n'est pas possible d'obtenir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression directe de u_n en fonction de n.
3. Par exemple, on peut définir par récurrence deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n + u_n^2,$$
$$v_0 = 0,\ v_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} = \exp(v_{n+1} - v_n).$$

   Là encore, on ne peut pas, *a priori*, déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$ une expression directe de u_n et v_n en fonction de n. On peut par contre calculer les termes de ces suites de proche en proche. Ainsi,

$$u_1 = 3 \qquad u_2 = 15 \qquad u_3 = 255\ldots \qquad v_2 = \mathrm{e} \quad v_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}\ldots$$

   On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente d'ordre 2.

Pour définir une suite par une relation de récurrence, il y a tout de même des précautions à prendre : il se peut que la donnée d'un premier terme et d'une relation de récurrence ne définissent pas correctement une suite.

Par exemple, en posant $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$, on ne définit pas correctement la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: on aurait $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 1$ et u_4 n'est pas défini !

1.2. Opérations sur les suites

On peut définir sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ trois opérations :

Définition 4.

Soit u, v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La **somme** de u et v est la suite notée $(u + v)$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (u + v)_n = u_n + v_n.$$

- La **multiplication interne** de u et v est la suite notée $(u \times v)$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

- La **multiplication externe** de u par λ est la suite notée $\lambda \cdot u$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (\lambda \cdot u)_n = \lambda \cdot u_n.$$

1.3. Suites réelles et relation d'ordre

Définition 5.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **croissante** (resp. **décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) ;
- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) ;
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement croissante ou (strictement) décroissante ;
- **constante** si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n$ (ce qui équivaut à $u_n = u_0$).

Remarque technique 6.

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la principale méthode consiste à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n > 0$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors u est constante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n < 0$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Notons tout de même que lorsque le terme général u_n s'écrit sous forme d'un produit ou d'un quotient de termes strictement positifs, on peut, au lieu d'étudier le signe de différence, étudier la position du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 :

- si $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n > 1$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1}/u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est constante ;
- si $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n < 1$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Exercice d'application 7. Etudier la monotone de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1.$$

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 - 2u_n + 1 - u_n = (u_n - 1)^2 \geqslant 0,$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Exercice d'application 8. Etudier la monotone de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \frac{(n+3)!}{2^n}.$$

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+4)!2^n}{2^{n+1}(n+3)!} = \frac{n+4}{2} \geqslant 1,$$

donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ car u_n est strictement positif.

La méthode de la différence marche toujours, il suffit de mettre en facteur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+4)!}{2^{n+1}} - \frac{(n+3)!}{2^n} = \frac{(n+3)!}{2^n}\left(\frac{n+4}{2} - 1\right) = \frac{(n+3)!}{2^n} \times \frac{n+2}{2} \geqslant 0.$$

Définition 9.

On dit qu'une suite u satisfait la propriété $\mathcal{P}(n)$ **à partir d'un certain rang** s'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 10. La suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (n-2)^2$ est croissante à partir du rang 2.

Définition 11.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = u_n.$$

Exemple 12. La suite $\left(\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est une suite stationnaire : elle stationne à 0 à partir du rang 2.

Définition 13.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **majorée** si elle vérifie
$$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant M\ ;$$
- **minorée** si elle vérifie
$$\exists m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant m\ ;$$
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 14. Une suite positive est une suite minorée par 0. Elle est également minorée par n'importe quel nombre négatif non nul.

Exercice d'application 15. Démontrer qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

$\hookrightarrow$ Soit u une suite bornée à partir d'un certain rang. Alors il existe $(m, M) \in \mathbf{R}^2$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. On a en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n \geqslant \min\{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, m\} \qquad \text{et} \qquad u_n \leqslant \max\{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, M\},$$

donc u est bornée.

Remarque 16. On a aussi montré qu'une suite majorée (resp. minorée) à partir d'un certain rang est majorée (resp. minorée).

Remarque 17. Une suite majorée peut très bien n'être majorée par aucun de ces termes.

Par exemple la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est majorée par 1 mais n'est majorée par aucun de ses termes puisque l'ensemble se ses termes $\left\{1 - \frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbf{N}^\star\right\}$ n'admet pas de plus grand élément.

Proposition 18.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, *i.e.*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Le cas échéant, on dit que u est bornée par M.

Démonstration.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors il existe des réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. Posons $K = \max(|m|, |M|)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$$

donc $|u| \leqslant K$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Alors u est minorée par $-M$ et majorée par M. $\square$

Exercice d'application 19. Démontrer que l'ensemble des suites bornées est stable par somme, produit (ce qui signifie que la somme, resp. le produit, de deux suites bornées est bornée) et produit par un réel (ce qui signifie le produit par un réel d'une suite bornée est bornée).

$\hookrightarrow$ Soit u, v deux suites bornées resp. par M_1 et M_2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. En vertu de l'inégalité triangulaire, on a :
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_1 + M_2,$$
donc $u + v$ est bornée par $M_1 + M_2$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par multiplicativité de $|\cdot|$, on a :
$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant M_1 \times M_2,$$
donc $u \times v$ est bornée par $M_1 \times M_2$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par multiplicativité de $|\cdot|$, on a :
$$|\lambda \cdot u_n| \leqslant |\lambda| \cdot |u_n|,$$
donc $\lambda \cdot u$ est bornée par $|\lambda| \cdot M_1$.

2. Convergence des suites réelles

2.1. Limite finie d'une suite réelle

Définition 20.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si :

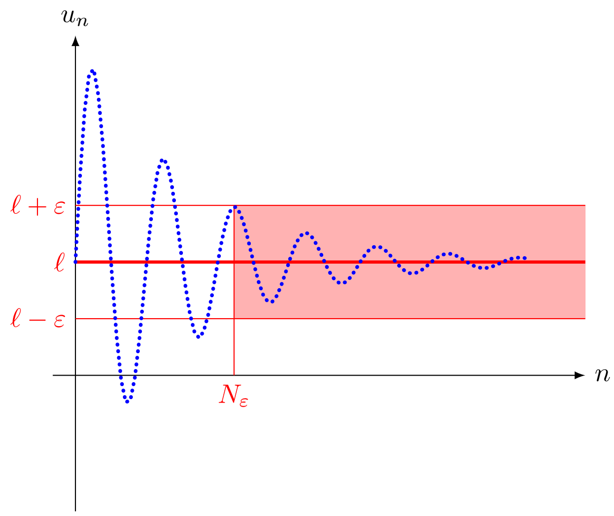
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite **convergente** et le réel ℓ est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

L'assertion de la définition signifie qu'au delà du rang N_ε (qui dépend à priori de ε), tous les termes de la suites appartiennent à l'intervalle $[\ell-\varepsilon\,;\,\ell+\varepsilon]$.

Intuitivement, u converge vers ℓ si u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ au delà d'un certain rang. Graphiquement, toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y=\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Exercice d'application 21. Soit $q \in]-1\,;\,1[$ et $u=(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que u converge vers 0.

$\hookrightarrow$ Soit $\varepsilon>0$.
Recherche au brouillon. On cherche $N\in\mathbf{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant\varepsilon$, *i.e.* $|q|^n\leqslant\varepsilon$, *i.e.* $\ln(|q|)n\leqslant\ln(\varepsilon)$, *i.e.* $n\geqslant\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}$ car $\ln(|q|)<0$ puisque $|q|<1$.
Suite de la rédaction. On pose

$$N=\left\lfloor\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}\right\rfloor+1.$$

Soit $n\geqslant N$. On a en particulier $n\geqslant\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}$, puis $\ln(|q|)n\leqslant\ln(\varepsilon)$, d'où $|u_n|\leqslant\varepsilon$ et ainsi $|u_n|\leqslant\varepsilon$.
Finalement, u converge vers 0.

Remarque 22. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n-\ell|\leqslant c\varepsilon.$$

où c est une constante (ne dépendant ni de n, ni de ε)

Proposition 23.

La limite ℓ d'une suite convergente est unique.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente. Soit $\ell,\ell'\in\mathbf{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell'$. Nous allons montrer que $\ell=\ell'$.

Supposons que $\ell\neq\ell'$ par l'absurde. Posons $\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{4}$ strictement positif.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon\in\mathbf{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ', il existe $N'_\varepsilon\in\mathbf{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N'_\varepsilon,\quad |u_n-\ell'|\leqslant\varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire d'après l'inégalité triangulaire

$$|\ell - \ell'| = |(u_n - \ell') - (u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell'| + |u_n - \ell|$$

Pour tout $n \geqslant \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, on obtient

$$|u_n - \ell'| + |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

donc

$$|\ell - \ell'| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a montré que

$$|\ell - \ell'| \leqslant \frac{|\ell - \ell'|}{2}$$

ce qui est absurde. Finalement $\ell = \ell'$. $\square$

Définition 24.

On dit qu'une suite est **divergente** ou qu'elle **diverge** lorsqu'elle n'est pas convergente.

2.2. Propriétés des suites convergentes

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ on se ramène souvent à montrer qu'une autre suite tend vers 0 grâce à la proposition suivante :

Proposition 25.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ si et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } \ell &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, |(u_n - \ell) - 0| \leqslant \varepsilon \\
&\iff (u_n - \ell)_{n\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } 0
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 26.

Soit $\ell \in \mathbf{R}$. Soit $(\alpha, u) \in (\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^2$.
Si α converge vers 0 et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \alpha_n,$$

alors u converge vers 0.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque α converge vers 0, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|\alpha_n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$|u_n - \ell| \leqslant v_n \leqslant |v_n| \leqslant \varepsilon,$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque technique 27. D'après la proposition précédente, pour démontrer qu'une suite u converge vers ℓ, on peut tenter de majorer $|u-\ell|$ par une suite qui converge vers 0.

Pour montrer qu'une suite de signe non constant tend vers 0, on se ramène souvent à une suite positive grâce à la valeur absolue :

Proposition 28.

Soit u une suite réelle.

1. Si u converge vers ℓ, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|$.
2. La suite u converge vers 0 si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Démonstration.

1. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on peut écrire d'après la seconde inégalité triangulaire
$$\big||u_n|-|\ell|\big| \leqslant |u_n-\ell|.$$
Soit $\varepsilon>0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon\in\mathbf{N}$ tel que
$$\forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$
Pour tout $n\geqslant N_\varepsilon$, on a donc
$$\big||u_n|-|\ell|\big|\leqslant\varepsilon.$$
Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|$.
2. D'après 1. si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Supposons maintenant que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Puisque pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\big||u_n|\big|=|u_n|$, la définition même de la convergence d'une suite vers 0 assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

$\square$

Attention le résultat précédent n'est juste qu'avec 0. En effet, il existe des suites (u_n) qui ne convergent pas mais telles que la suite $(|u_n|)$ converge.

Par exemple la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge mais la suite $\big(|(-1)^n|\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite constante égale à 1 qui converge vers 1.

Proposition 29.

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a par la seconde inégalité triangulaire,
$$\big||u_n|-|\ell|\big|\leqslant|u_n-\ell|.$$

Par définition de la convergence de la suite vers ℓ, il existe un rang $n_0\in\mathbf{N}$ tel que
$$\forall n\geqslant n_0,\quad |u_n-\ell|\leqslant 1.$$
Pour tout $n\geqslant n_0$, on a donc,
$$|u_n|-|\ell|\leqslant\big||u_n|-|\ell|\big|\leqslant 1,$$
donc
$$|u_n|\leqslant|\ell|+1.$$
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée (cf. Exercice d'Application 15). $\square$

La réciproque de ce résultat est fausse. Par exemple, on montrera plus loin que $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente.

Proposition 30.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite. Soit $m, M \in \mathbf{R}$ tels que $m < \ell < M$.

1. Il existe $N_m \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_m,\ u_n > m$.
2. Il existe $N_M \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_M,\ u_n < M$.
3. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ m < u_n < M$.

Démonstration.
On démontre le 1., la démonstration du 2. est similaire et 3. s'obtient immédiatement avec 1. et 2.
1. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Soit $m' \in \,]m\,;\,\ell[$. On pose $\varepsilon = \ell - m' > 0$. On obtient avec ce qui précède qu'il existe un rang N_m tel que pour tout $\forall n \geqslant N_m,\ u_n \geqslant m' > m$. □

Corollaire 31.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers une limite ℓ.

1. Si $\ell > 0$, u est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Si $\ell < 0$, u est majorée par un réel $M < 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration.
1. On utilise le résultat 1. de la proposition précédente avec $m = \frac{\ell}{2}$.
2. On utilise le résultat 2. de la proposition précédente avec $M = \frac{\ell}{2}$. □

2.3. Opérations sur les limites

Proposition 32.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles qui convergent vers ℓ_1 et ℓ_2 respectivement. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. La somme $u + v$ converge et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2.$$
2. Le produit interne $u \times v$ convergent et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2.$$
3. Le produit externe $\lambda \cdot u$ converge et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot \ell_1.$$
4. Si de plus ℓ_2 est non nul, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ v_n \neq 0$ et la suite $(\frac{1}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{1}{\ell_2}$. Dans ce cas, la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe N_1 et N_2 des entiers tels que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N_2$, on a $|v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$. Par la Proposition 30, il existe $N_3 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_3$, on a $\frac{|\ell_2|}{2} \leqslant |v_n| \leqslant |\ell_2| + 1$. Posons $N_4 = \max(N_1, N_2, N_3)$.

1. Pour tout $n \geqslant N_4$,
$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon.$$
Donc $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$ (cf. Remarque 22).
2. Pour tout $n \geqslant N_4$,
$$|u_n v_n - \ell_1\ell_2| \leqslant |v_n(u_n - \ell_1)| + |\ell_1(v_n - \ell_2)| \leqslant |v_n|\,|(u_n - \ell_1)| + |\ell_1|\,|(v_n - \ell_2)| \leqslant (|\ell_2| + 1 + |\ell_1|)\varepsilon.$$
Donc $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell_1\ell_2$ (cf. Remarque 22).
3. C'est le point 2 appliqué à la suite constante $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ égale à λ.
4. Pour tout $n \geqslant N_4$,
$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell_2}\right| \leqslant \frac{|\ell_2 - v_n|}{|\ell_2 v_n|} \leqslant \frac{\varepsilon}{|\ell_2|\,\frac{|\ell_2|}{2}} \leqslant \frac{2}{\ell_2^2}\varepsilon.$$
Donc $(\frac{1}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{1}{\ell_2}$ (Remarque 22). □

2.4. Suites tendant vers l'infini

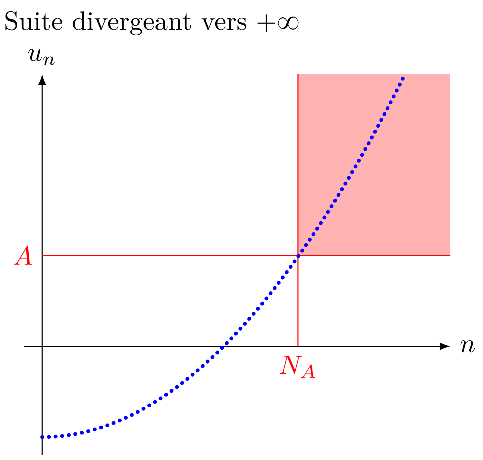
Définition 33.

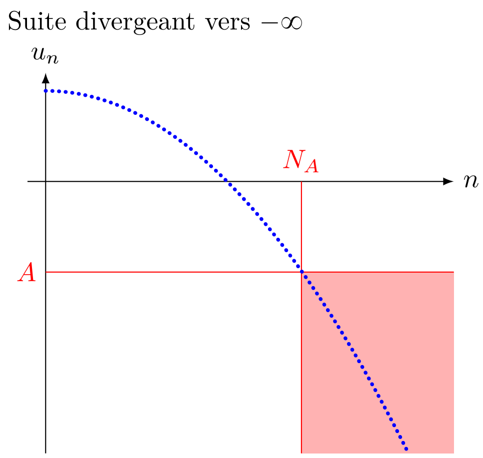
Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. On dit que u **tend vers** $+\infty$ si elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \geqslant A.$$
2. On dit que u **tend vers** $-\infty$ si elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \leqslant A.$$

Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas une suite convergente. On dit qu'elle **diverge** vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ou encore que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.
Si u tend vers $+\infty$, on note :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
On utilise une notation similaire si u tend vers $-\infty$.

Ainsi u diverge vers $+\infty$ si on peut choisir u_n aussi grand que l'on veut au delà d'un certain rang.
La suite u diverge vers $-\infty$ si on peut rendre u_n aussi petit que l'on veut au delà d'un certain rang.





On parle donc de limite d'une suite aussi bien pour une suite convergente que pour une suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$. Lorsque la limite d'une suite existe, cette limite est donc un élément ℓ de $\overline{\mathbf{R}}$.

Proposition 34.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée par un réel strictement positif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement positive au delà d'un certain rang.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée par un réel strictement négatif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement négative au delà d'un certain rang.
4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration.
On fait la démonstration avec $+\infty$, l'autre cas est similaire. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$.

1. On prend $A = 1$. Alors d'après la définition, il existe $N_A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_A$, $u_n \geqslant 1$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang.
2. Cf. Exercice d'Application 15. □

Lemme 35.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

1. Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée (respectivement majorée), alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).
2. Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée (respectivement majorée) au delà d'un certain rang par un nombre strictement positif (respectivement strictement négatif), alors la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Démonstration.
On ne traite que le cas où u tend vers $+\infty$.

1. Si v est minorée, alors il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geqslant m$.
   Soit $A \in \mathbf{R}$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A - m$.
   Alors, pour tout $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant A$ et on a montré que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2. Si v est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif, alors il existe $m > 0$ et $N_1 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_1$, $v_n \geqslant m$.
   Soit $A \in \mathbf{R}$. Par définition de la limite, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_2$, $u_n \geqslant \frac{A}{m}$.
   Puisque $m > 0$, on en déduit que pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $u_n v_n \geqslant A$. □

Proposition 36.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles admettant respectivement $\ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$ et $\ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$ pour limite.

1. Si la forme $\ell_1 + \ell_2$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$,
2. Si la forme $\ell_1 \ell_2$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2$,
3. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^\star$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1$,

où le résultat des opérations précédentes est calculé dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Démonstration.
Le cas où ℓ_1 et ℓ_2 appartiennent tous deux à $\mathbf{R}$ a été vu plus haut (cf. Proposition 32). On traite uniquement le cas où $\ell_1 = +\infty$.

1. Supposons $\ell_2 \in \mathbf{R}$ ou $\ell_2 = +\infty$. Dans les deux cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée et d'après le lemme précédent, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
2.
   - Supposons que $\ell_2 \in \mathbf{R}^{+\star}$ ou $\ell_2 = +\infty$. Alors dans les deux cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée au delà d'un certain rang par un réel strictement positif et le lemme précédent assure que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
   - Supposons que $\ell_2 \in \mathbf{R}^{-\star}$ ou $\ell_2 = -\infty$. Alors on considère la suite $(-v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\ell_2 \in \mathbf{R}^{+\star}$ ou $-\ell_2 = +\infty$. En appliquant ce qui précède, on obtient que la suite $(-u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ donc la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.
3. Il suffit de considérer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda u_n = v_n u_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite constante égale à λ et appliquer le résultat précédent. □

Proposition 37.

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), alors :

1. au delà d'un certain rang $N \in \mathbf{N}$, tous les termes u_n sont strictement positifs (respectivement strictement négatifs) ;
2. la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ converge vers 0.

Démonstration.
On fait la preuve avec $+\infty$, le cas $-\infty$ est similaire.

D'après ce qui précède, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, elle est minorée au delà d'un certain rang par un réel strictement positif donc il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N, u_n > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

On pose $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, N)$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ 0 < \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$$

ce qui implique que la suite $(1/u_n)_{n\geqslant N}$ converge vers 0.

□

Proposition 38.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0,
2. il existe un rang N au delà duquel tous les termes u_n sont strictement positifs (respectivement strictement négatifs),

alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Démonstration.
On traite le cas où les u_n sont strictement positifs au delà d'un certain rang N.

Soit $A>0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, il existe $n_{1/A}\in\mathbf{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant n_{1/A},\ |u_n|\leqslant\frac{1}{A}.$$

On pose $N_A=\max(N,n_{1/A})$. On a alors

$$\forall n\geqslant N_A,\frac{1}{|u_n|}\geqslant A$$

et puisque $\forall n\geqslant N, u_n>0$, on a

$$\forall n\geqslant N_A,\frac{1}{u_n}\geqslant A$$

ce qui prouve bien que la suite $(1/u_n)_{n\geqslant N}$ tend vers $+\infty$.

Le cas où les u_n sont strictement négatifs au delà d'un certain rang se traite de façon similaire. □

2.5. Suites extraites

Définition 39.

On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall(n,m)\in\mathbf{N}^2,\qquad(n<m\Longrightarrow\varphi(n)<\varphi(m)).$$

Remarque 40. Concrètement, pour former une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on ne prend que certains éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en conservant l'ordre d'apparition de ces termes (ce qui explique que φ soit choisie strictement croissante).

Exemple 41. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $v_n=u_{2n}$, est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Plutôt que de changer le nom de suite, on la note souvent $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$.

Les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{p_n})_{n\in\mathbf{N}}$, où p_n désigne le n-ième nombre premier, sont également des sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Par contre, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $w_{2k} = u_{2k+1}$ et $w_{2k+1} = u_{2k}$ (autrement dit pour les premiers termes on a :

$$w_0 = u_1, \quad w_1 = u_0, \quad w_2 = u_3, \quad w_3 = u_2, \quad w_4 = u_5, \quad w_5 = u_4 \dots)$$

n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ car l'ordre d'apparition des termes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas respecté.

Proposition 42.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers ℓ.

Démonstration.
On traite d'abord le cas où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$.

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque la fonction φ est strictement croissante, on peut montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$, on a donc $\forall n \geqslant N_\varepsilon, \ \varphi(n) \geqslant N_\varepsilon$ et donc

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \ |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ vers ℓ.

Les cas où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ se traitent de façon similaire. □

◇◇

Remarque technique 43. Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite, on peut trouver deux sous-suites distinctes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne convergeant pas vers la même limite.

Exercice d'application 44. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\frac{2^n+(-2)^n}{2})_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas.

$\hookrightarrow$ On a, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{2p+1} = 0$, donc $(u_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. De plus, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{2p} = 4^p$, donc $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ est minorée par 1. En particulier, $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0. Il s'ensuit que u n'est pas convergente.

Exercice d'application 45. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\cos(\frac{n\pi}{10}))_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

$\hookrightarrow$ On a, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{20p} = \cos(2p\pi) = 1$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{20(p+1)} = \cos(2p\pi+\pi) = -1$. Donc les suites extraites $(u_{20p})_{p\in\mathbf{N}}$ et $(u_{20(p+1)})_{p\in\mathbf{N}}$ ne convergent pas vers la même limite. En particulier, u diverge.

◇◇

Proposition 46.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration.
Voir TD. □

2.6. Passage à la limite dans une inéquation

Proposition 47.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergentes.
S'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration.
Notons ℓ et ℓ' lest limites respectives de u et v. Supposons par l'absurde $\ell > \ell'$. Posons alors $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{3} > 0$. Par définition de la limite, on a :

$$\begin{array}{ll} \exists N_1 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_1, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_2 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_2, & |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

Posons $M = \max(N, N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant M$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell' + \varepsilon,$$

puis $\ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}(\ell - \ell')$, ce qui est absurde. Finalement, $\ell \leqslant \ell'$. □

Remarque 48. On retiendra que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Corollaire 49.

Soient u et v deux suites convergentes. Soient m et M deux réels.

1. Si $u \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.
2. Si $u \leqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec u et les suites constantes égales à m et M respectivement. □

3. Suites classiques

3.1. Suites arithmétiques et géométriques

Définition 50.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite

1. **arithmétique** si, et seulement si, il existe $r \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.
2. **géométrique** si, et seulement si, il existe $q \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Remarque 51. La raison d'une suite arithmétique est définie de manière unique. La raison d'une suite géométrique u est définie de manière unique, sauf si $u_0 = 0$.

Proposition 52 - Variations.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. Supposons que u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.
   - Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
   - Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
   - Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.
2. Supposons que u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$.
   - Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite est nulle à partir du rang 1.
   - Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
   - Si $q < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est donc pas monotone.
   - Si $q > 0$, la suite est monotone et de signe constant. Plus précisément :
     - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement croissante.
     - Si $u_0 > 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement croissante.

Démonstration. 1. Immédiat en remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
2. Si $q > 0$, on peut s'intéresser à $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Les autres cas sont simples. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Ici il faut bien considérer des suites réelles ! Nous y reviendrons plus loin, mais puisque la notion de croissance est liée à la relation d'ordre $\leqslant$, la notion de suite complexe croissante n'a pas de sens.

Proposition 53 - Terme général.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

1. Si u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$, alors pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $u_n = u_p + (n - p) \times r$.
2. Si u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}$, alors pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration.
Ces résultats s'obtiennent facilement par récurrence, par exemple. □

Proposition 54 - Limites.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. Supposons que u est arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.
   - Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.
   - Si $r > 0$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   - Si $r < 0$, alors la suite (u_n) tend vers $-\infty$.
2. Supposons que u est géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$.
   - Si $u_0 = 0$, alors la suite est nulle et tend vers 0.
   - On suppose maintenant que $u_0 \neq 0$.
     - Si $|q| < 1$, alors la suite (u_n) tend vers 0.
     - Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante, égale à u_0 et converge vers u_0.
     - Si q et u_0 sont réels et si $q > 1$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si $u_0 > 0$ et vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
     - Dans tous les autres cas la suite (u_n) n'a pas de limite.

   On retiendra qu'une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q converge si, et seulement si, $q = 1$ ou $|q| < 1$.

Démonstration.
Il faut utiliser le terme général de la suite dans chaque cas. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Encore une fois la notion de limite est liée à $\leqslant$. Dire qu'une suite de complexe diverge vers $+\infty$ par exemple n'a donc pas de sens (ou pourra tout de même définir la notion de suite complexe convergente).

Proposition 55 - Somme des termes.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :
$$\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$
2. La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 est donnée par
$$(\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$
   Si la raison vaut 1, cette somme vaut plutôt $n \times (\text{premier terme})$.

Démonstration.
On peut le démontrer par récurrence, ou par changement d'indice avec les sommes de référence $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$. □

3.2. Suites arithmético-géométriques

Définition 56.

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple 57. Les suites arithmétiques de raison p sont des suites arithmético-géométriques particulières (pour $a = 1$ et $b = p$). Les suites géométriques de raison q sont des suites arithmético-géométriques (pour $a = q$ et $b = 0$).

Lemme 58.

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. Soit u et v deux suites vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ et $v_{n+1} = av_n + b$. Alors $u - v$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = a(u_n - v_n)$. □

Voici la méthode permettant de déterminer l'expression du terme général u_n lorsque (u_n) est arithmético-géométrique avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

◇◇

Remarque technique 59. On commence par chercher une suite constante $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+1} = ar_n + b$, *i.e.* $r = ar + b$. La suite constante égale à $r = \frac{b}{1-a}$ convient. Dans ce cas, le lemme assure que $(u_n - r)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison a, et a donc pour terme général $u_n - r = (u_0 - r)a^n$, puis, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = r + (u_0 - r)a^n$.

On peut en déduire que l'ensemble des suites u vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{b}{1-a} + \lambda \cdot a^n \right)_{n\in\mathbf{N}} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice d'application 60. Déterminer le terme général de la suite u telle que $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3 - 2u_n$.

$\hookrightarrow$ Soit $r \in \mathbf{R}$. On a $r = 3 - 2r$ si et seulement si $r = 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$u_{n+1} - 1 = -2(u_n - 1),$$

donc

$$u_n - 1 = (u_0 - 1)(-2)^n \quad i.e. \quad u_n = 1 - (-2)^n.$$

◇◇

3.3. Suites linéaires récurrentes doubles

Définition 61.

On appelle **suite linéaire récurrente double** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b)\in\mathbf{K}^2$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n. \tag{$\star$}$$

Une telle suite est entièrement déterminée par la relation $(\star)$ et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.

Proposition 62 - Expression dans le cas complexe.

Soit $(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^\star$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par $(\star)$ et la donnée de $(u_0,u_1)\in\mathbf{C}^2$.
Pour déterminer l'expression du terme général u_n d'une telle suite, on commence par considérer son **équation caractéristique**

$$z^2=az+b \tag{E}$$

et le discriminant Δ de cette équation.

- Si $\Delta\neq 0$, alors (E) a deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=\alpha {z_1}^n+\beta {z_2}^n.$$

- Si $\Delta=0$, alors (E) admet une unique solution z_0 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=(\alpha n+\beta){z_0}^n.$$

Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
- Supposons d'abord que l'équation (E) admette deux solutions z_1 et z_2 distinctes.
  - *Analyse.* Supposons qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\begin{cases}\alpha+\beta & = & u_0\\ \alpha z_1+\beta z_2 & = & u_1\end{cases}$. Ce système admet une unique solution $\left(\frac{u_1-z_2u_0}{z_1-z_2},\frac{u_1-z_1u_0}{z_2-z_1}\right)$. Ainsi, (α,β) est déterminé de manière unique par u_0 et u_1.
  - *Synthèse.* Pour tout $n\in\mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$ », où (α,β) est déterminé dans la phase d'analyse.
    Par définition de (α,β), H_0 et H_1 sont vraies.
    Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$ et $u_{n+1}=\alpha z_1^{n+1}+\beta z_2^{n+2}$, donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & au_{n+1}+bu_n\\ & = & a(\alpha z_1^{n+1}+\beta z_2^{n+1})+b(\alpha z_1^n+\beta z_2^n)\\ & = & \alpha z_1^n(az_1+b)+\beta z_2^n(az_2+b)\\ & = & \alpha z_1^{n+2}+\beta z_2^{n+2}\end{array}$$

    car $z_1^2=az_1+b$ et $z_2^2=az_2+b$. Ainsi H_{n+2} est vraie.
    Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n\in\mathbf{N}$, H_n est vraie.
- Supposons que (E) admette une racine double z_0.

- *Analyse.* Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} \alpha & = & u_0 \\ \alpha z_0 + \beta z_0 & = & u_1 \end{cases}$. Ce système a une unique solution $(\alpha, \beta) = (u_0, \frac{u_1 - z_0 u_0}{z_0})$. Ainsi le couple (α, β) est unique (s'il existe !).
- *Synthèse.* Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$ », où (α, β) est donné dans la phase d'analyse.
  On a H_0 et H_1 vraies par définition de (α, β).
  Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$ et $u_{n+1} = \alpha z_0^{n+1} + \beta(n+1) z_0^{n+1}$. Donc
  $$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1} + b u_n \\ & = & a(\alpha z_0^{n+1} + \beta(n+1) z_0^{n+1}) + b(\alpha z_0^n + \beta n z_0^n) \\ & = & \alpha z_0^n (a z_0 + b) + \beta n z_0^n (a z_0 + b) + \beta z_0^{n+1} a \\ & = & \alpha z_0^{n+2} + \beta(n+2) z_0^{n+2} \end{array}$$
  car $z_0^2 = a z_0 + \beta$ et $z_0 = \frac{a}{2}$. Ainsi H_{n+2} est vraie.
  Finalement le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

□

Proposition 63 - Expression dans le cas réel.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\star$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par $(\star)$ et la donnée de $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$. Notons Δ le discriminant de l'équation polynomiale (E).

- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions x_1 et x_2 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
  $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution x_0 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
  $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\alpha n + \beta) {x_0}^n.$$
- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, et il existe deux constantes α et β réelles telles que
  $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
La démonstration est très proche de celle qui a permis de passer des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants à valeurs complexes aux solutions à valeurs réelles lorsque les coefficients de l'équation sont réels.

- Si $\Delta > 0$, on sait d'après le cas complexe qu'il existe deux constantes α et β, *a priori* complexes, telles que
  $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$
  On a alors $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$. Donc $\alpha = \dfrac{u_1 - x_2 u_0}{x_1 - x_2}$ et $\beta = \dfrac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1}$ (les nombres x_1 et x_2 sont bien différents). Puisque u_0, u_1, x_1 et x_2 sont réels, les deux nombres α et β sont, eux aussi, réels.
- On procède de la même manière si $\Delta = 0$.
- Supposons que $\Delta < 0$. D'après le cas complexe, en notant $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$ les deux solutions complexes conjuguées de (E), où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on sait qu'il existe deux constantes complexes A et B telles que
  $$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = A r^n + B \overline{r}^n = A \rho^n e^{in\theta} + B \rho^n e^{-in\theta}.$$

On sait que $\left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & u_0 \quad (L_1) \\ Ar+B\overline{r} & = & u_1 \quad (L_2) \end{array}\right.$

$(L_2)-\overline{r}(L_1)$ donne $A=\dfrac{u_1-\overline{r}u_0}{r-\overline{r}}$ et $(L_2)-r(L_1)$ donne $B=\dfrac{u_1-ru_0}{\overline{r}-r}=\overline{A}$ (on sait que $\overline{r}\neq r$ car $r\notin\mathbf{R}$).

Ainsi, on a pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n(Ae^{in\theta}+\overline{A}e^{-in\theta}) \\ &= \rho^n(Ae^{in\theta}+\overline{Ae^{in\theta}}) \\ &= \rho^n\ 2\ \Re e(Ae^{in\theta}) \\ &= \rho^n(2\,\Re e(A)\cos(n\theta)-2\Im m(A)\sin(n\theta)) \\ &= \rho^n(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta)) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha=2\,\Re e(A)$ et $\beta=-2\Im m(A)$. On remarque que α et β sont des réels.

□

Exercice d'application 64. On considère la **suite de Fibonacci** $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Déterminer le terme général de F.

$\hookrightarrow$ L'équation $x^2-x-1=0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le **nombre d'or**). D'après la proposition précédente, on peut donc dire qu'il existe un unique couple de réels (α,β) tel que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad F_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n.$$

Les cas $n=0$ et $n=1$ conduisent à résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 0 \\ \alpha r_1+\beta r_2 & = & 1 \end{array}\right.$. Or

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\beta \\ \alpha(r_1-r_2) & = & 1 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right..$$

On a donc, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Exercice d'application 65. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0=1$, $u_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_{n+2}=-u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$.

$\hookrightarrow$ On trouve, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=(1-3n)(-2)^{-n}$.

Exercice d'application 66. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0=1$, $u_1=-1$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$.

$\hookrightarrow$ On trouve, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\sqrt{2}^n(\cos(\frac{n\pi}{4})-2\sin(\frac{n\pi}{4}))$.

4. Théorèmes d'existence d'une limite

4.1. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration

Théorème 67 - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que

$$\exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant N,\quad u_n\leqslant v_n\leqslant w_n.$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $(N_1, N_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que

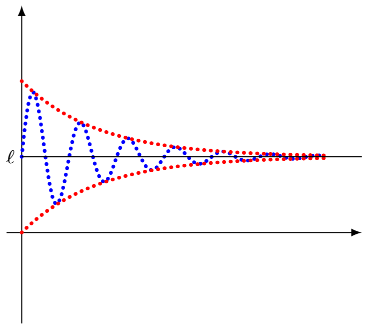
$$\begin{aligned} \forall n \geqslant N_1, \quad & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon, \\ \forall n \geqslant N_2, \quad & |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $n \geqslant \max(N_1, N_2, N)$. On a

$$-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \varepsilon,$$

donc $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et l'on vient de démontrer que v converge vers ℓ. □

<u>Illustration du théorème d'encadrement</u>. Une suite est ici encadrée par deux suites qui convergent vers ℓ.



Exercice d'application 68. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ (pour le voir, on factorise les dénominateurs des expressions par n et n^2 respectivement). Le théorème d'encadrement assure alors que u converge vers 1.

Exercice d'application 69. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, posons $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Déterminer, si elle existe, la limite de u.

↪ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Or la suite constante égale à x et la suite $\left(x - \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers x, donc le théorème d'encadrement permet de conclure que u converge vers x.

Exercice d'application 70. Démontrer que le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 converge vers 0.

↪ Soit u une suite bornée et v une suite convergente. Il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $|u| \leqslant M$, donc, $|uv| \leqslant M|v|$. Or $M|v|$ converge vers 0. Le théorème d'encadrement permet de conclure $u \cdot v$ converge vers 0.

Théorème 71 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend aussi vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbf{R}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $N_A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_A,\ u_n \geqslant A$. On a alors pour tout $n \geqslant N_A$, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

2. Même méthode. □

Exercice d'application 72. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Puisque, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La somme de droite étant égale à $\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème de minoration assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice d'application 73. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Étudier la limite de $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et de $\left(\dfrac{H_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$.

↪ On a pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

d'où, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$. Donc le théorème de minoration fournit $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et, avec le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$.

4.2. Convergence des suites monotones bornées

Théorème 74 - Théorème de la limite monotone.

Soit u une suite réelle.

1. Supposons u croissante.
   (a) Si u est majorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
   $$\ell = \sup\{u_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
   (b) Si u n'est pas majorée, alors u diverge vers $+\infty$.
2. Supposons u décroissante.
   (a) Si u est minorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
   $$\ell = \inf\{u_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant \ell$.
   (b) Si u n'est pas minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration.
On ne traite que le cas où u est croissante.

(a) Supposons u majorée. Notons $A = \{u_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$. A est non vide car il contient u_0, et majoré (car u est majorée). Ainsi A admet une borne supérieure, notée ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $\ell - \varepsilon < x$. Comme $x \in A$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x = u_N$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geqslant N$, $\ell - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell$ (car ℓ majore A). Ainsi $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et on a montré que u converge vers ℓ.

(b) Supposons u non majorée. Ainsi,
$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N}, \quad u_n > M.$$
Soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N > A$. Puisque la suite u est croissante, on en déduit que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$ et on a montré que u tend vers $+\infty$.

□

Corollaire 75.

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Notons que le théorème de la limite monotone permet de démontrer qu'une suite admet une limite, mais il ne permet pas de calculer celle-ci !

Exercice d'application 76. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Étudier la convergence de la suite u.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, donc u est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,
$$u_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} + 1 \leqslant 2.$$
Donc la suite u est majorée par 2. Le théorème de la limite monotone assure alors que u converge.

Remarque : On peut calculer (mais c'est plus difficile) la limite de cette suite. Elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

4.3. Suites adjacentes

Définition 77.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont **adjacentes** si, et seulement si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (ou l'inverse).
2. La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Lemme 78.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $w_n = v_n - u_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}),$$

et, comme v est décroissante et u est croissante, $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ (somme de deux nombres négatifs). Ainsi w est décroissante.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque w est décroissante, on a pour tout $k \geqslant n$, $w_k \leqslant w_n$ puis, en faisant tendre k vers $+\infty$, $w_n \geqslant 0$. □

Théorème 79 - Convergence des suites adjacentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles avec u croissante et v décroissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes alors :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent ;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (on note ℓ cette limite commune) ;
3. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration.

1. Avec le lemme et les variations de u et v, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0. \tag{$\star$}$$
Ainsi u est croissante et majorée donc, d'après la théorème de la limite monotone, elle converge vers ℓ_1. De même, v est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ_2.
2. Par opération, $u - v$ converge vers $\ell_1 - \ell_2$. Or, $u - v$ converge vers 0 par hypothèse. Par unicité de la limite, on conclut que $\ell_1 - \ell_2 = 0$, *i.e.* $\ell_1 = \ell_2$.
3. Le théorème de la limite monotone assure par ailleurs que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. □

Exemple 80. Pour $x \in \mathbf{R}$, les suites des valeurs approchées par défaut et par excès de x, définies par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n},$$

forment deux suites adjacentes convergeant vers x.

Exercice d'application 81. Justifier que les suites u et v définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

convergent vers une même limite.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ &\quad - \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc u est croissante. De plus,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leqslant 0,$$

donc v est décroissante. Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $u - v$ converge vers 0. Ainsi u et v sont adjacentes. On en déduit que u et v convergent vers la même limite.

5. Suites de nombres complexes

Définition 82.

Une **suite de nombres complexes** est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$. On la note souvent $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbf{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, adjacentes... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes, de même que les théorème de la limite monotone et d'encadrement !). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 83.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est **bornée** si, et seulement si, la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Proposition 84.

Si une suite complexe converge, alors sa limite est unique.

Démonstration.
On utilise la même démonstration que pour les suites réelles, en remplaçant valeur absolue par module. □

Définition 85.

On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0,$$

(c'est la limite d'un module, donc d'une suite réelle). Autrement dit, z converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque 86. Dire qu'une suite complexe tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a pas de sens.

Proposition 87.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbf{C}$.
La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$.

Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $b = \mathfrak{Im}(\ell)$.

- Supposons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$|\mathfrak{Re}(z_n) - a| = |\mathfrak{Re}(z_n - \ell)| \leqslant |z_n - \ell|$$
et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathfrak{Re}(z_n) - a| = 0$ c'est-à-dire que la suite $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a. On montrerait de même que $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers b.
- Supposons que les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire
$$|z_n - (a+ib)| = |(\mathfrak{Re}(z_n) - a) + i(\mathfrak{Im}(z_n) - b)| \leqslant |\mathfrak{Re}(z_n) - a| + |\mathfrak{Im}(z_n) - b|.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathfrak{Re}(z_n) - a| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\mathfrak{Im}(z_n) - b| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - (a+ib)| = 0$ donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. □

Remarque 88. Les résultats obtenus sur les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbf{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes. Par exemple, les opérations sur les limites restent valables : on le démontre de la même manière que pour les suites réelles, en remplaçant les valeurs absolues par des modules.

Proposition 89.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ un nombre complexe.

1. La suite $(\overline{z_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.
2. La suite $(|z_n|^2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|^2$.
3. La suite z est bornée.

Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $b = \mathfrak{Im}(\ell)$.

1. Les suites $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{Re}(\overline{z_n}) = \mathfrak{Re}(z_n)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z_n}) = -\mathfrak{Im}(z_n)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{Re}(\overline{z_n}) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{Im}(\overline{z_n}) = -b$. D'après la proposition précédente, on a $\lim_{n\to+\infty} \overline{z_n} = a - ib = \overline{\ell}$.
2. La suite $(z_n\overline{z_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell\overline{\ell}$ par produit et en utilisant 1.
3. On utilise la même démonstration que pour les suites réelles, en remplaçant valeur absolue par module. □

6. Relations de comparaison pour les suites

6.1. Domination et négligeabilité

Définition 90.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes. On dit que :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **dominée** par la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée et un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n b_n$.
   On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et on lit «u_n est un grand O de v_n».
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varepsilon_n$.
   On note alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et on lit «u_n est un petit o de v_n».

On peut, de manière immédiate, réécrire ces définitions comme dans la proposition suivante (ces nouvelles caractérisations sont à connaître car elles sont très utiles en pratique) :

Proposition 91 - Caractérisation de o et O.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.

1. (a) u est dominée par v si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M|v_n|$.
   (b) Si de plus v ne s'annule pas au delà d'un certain rang n_1, alors u est dominée par v si et seulement si pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$.
2. Si v ne s'annule pas au delà d'un certain rang n_1, alors u es négligeable devant v si et seulement si $\dfrac{u}{v}$ converge vers 0.

Remarque 92.
- $u_n = \mathrm{O}(1)$ signifie que (u_n) est bornée.
- $u_n = \mathrm{O}(0)$ signifie que u est une suite nulle à partir d'un certain rang.
- $u_n = \mathrm{o}(1)$ signifie que u converge vers 0.
- $u_n = \mathrm{o}(0)$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang.

Exemple 93.

- $n = \mathrm{o}(n^2)$ et $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Plus généralement, si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ avec $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$.
- On a $n^{3/2}\cos(1/n) = \mathrm{O}(n^{3/2})$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^{3/2}}\right| = |\cos(1/n)| \leqslant 1$.

- On a $n^{3/2}\cos(1/n) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^2} = \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} = 0$ puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

6.2. Propriétés des o et O

La relation O :

- est réflexive (pour tout $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 \times v_n$ et $(1)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc $u_n = \mathrm{O}(u_n)$) ;
- n'est pas symétrique ($n = \mathrm{O}\big(n^2\big)$ mais $n^2 \neq \mathrm{O}(n)$) ;
- n'est pas antisymétrique ($\frac{n}{2} = \mathrm{O}\big(\frac{2n}{3}\big)$ et $\frac{2n}{3} = \mathrm{O}\big(\frac{n}{2}\big)$, mais $\frac{n}{2} \neq \frac{2n}{3}$ pour $n \in \mathbf{N}$) ;
- est transitive (si $u, v, w \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ avec $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors il existe (α_n) et (β_n) bornées telles que, pour n assez grand, $u_n = \alpha_n \times v_n$ et $v_n = \beta_n \times w_n$, donc $u_n = (\alpha_n\beta_n) \times w_n$, donc $(\alpha_n\beta_n)$ est bornée, puis $u_n = \mathrm{O}(w_n)$).

La relation o :

- n'est pas réflexive ($1 \neq \mathrm{o}(1)$ car $\frac{1}{1}$ ne tend pas vers 0) ;
- n'est pas symétrique ;
- n'est pas antisymétrique ;
- est transitive.

Proposition 94.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Démonstration.
Laissé en exercice. □

Proposition 95.

Soient $u, v, w, t \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

1. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{O}(w_n)$.
   Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{o}(w_n)$.
2. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{O}(w_n t_n)$.
   Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n t_n)$.

Exercice d'application 96. Montrer que $n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(n) = \mathrm{O}(n)$.

$\hookrightarrow$ On a $\ln(n) = \mathrm{o}(n)$ donc $\ln(n) = \mathrm{O}(n)$. Comme $n\sin(\frac{1}{n}) = \mathrm{O}(n)$, on peut écrire $n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(n) = \mathrm{O}(n)$.

Exercice d'application 97. Montrer que $n\ln(n)\sin(\frac{1}{n}) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$.

$\hookrightarrow$ $n\sin(1/n) = \mathrm{O}(n)$ et $\ln(n)\mathrm{o}(n)$ donc $n\ln(n)\sin(1/n) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$.

Proposition 98 - Croissances comparées.

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, soit $q \in]1\,;+\infty[$. Alors

$$q^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\ln^\beta n\right), \quad \ln^\beta n = \mathrm{o}(n^\alpha), \quad n^\alpha = \mathrm{o}(q^n), \quad q^n = \mathrm{o}(n!), \quad n! = \mathrm{o}(n^n).$$

Remarque 99. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (notation privilégiée dans d'autres sciences), on a donc

$$\frac{1}{n!} \ll q^{-n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Démonstration.
Toutes ces relations sont des réécritures du théorème de croissance comparée (en notant que $q = \mathrm{e}^{\ln(q)}$), sauf $q^n = \mathrm{o}(n!)$, avec $q > 1$ et $n! = \mathrm{o}(n^n)$.

- Posons $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Une récurrence aisée permet alors de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u_N}{2^{n-N}}$. Puisque $\dfrac{u_N}{2^{n-N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient par encadrement que u converge vers 0.

- De même, posons $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < \frac{1}{2}.$$

  Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On conclut alors comme précédemment.

□

Exemple 100.

- $n^2 = \mathrm{o}(n^4)$
- $\dfrac{1}{n^3} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- $(-1)^n = \mathrm{o}(n)$.
- $(\ln(n))^3 = \mathrm{o}(n)$
- $n^3 = \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$.

Corollaire 101.

Pour tout $\gamma > 0$, et tout $\beta > 0$, $n^\beta = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\gamma n})$ et $\mathrm{e}^{-\gamma n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

6.3. Suites équivalentes

Définition 102.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et un rang n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n a_n$.
On note alors $u_n \sim v_n$, on lit «u_n est équivalente à v_n».

On obtient immédiatement la caractérisation suivante, très utile en pratique :

Proposition 103 - Caractérisation de $\sim$.

Soit $u, v \in \mathbf{K}^N$ telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1.$$

⚠ **Attention** ⚠. Écrire $u_n \sim 0$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang !! Donc si vous trouvez qu'une suite est équivalente à 0, **il y a de très (TRÈS) fortes chances qu'il y ait une erreur**.

Exemple 104.

On a $n + \ln(n) \sim n$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+\ln(n)}{n} = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice d'application 105. Montrer que $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ puis $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$.

Proposition 106 - Lien avec o et O.

Soit $u, v \in \mathbf{K}^\mathbf{N}$ avec v qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1. $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$.

Démonstration.
Notons n_0 le rang à partir duquel v ne s'annule pas.

1. $$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \\ &\iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)\,. \end{aligned}$$
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 1, alors $\dfrac{u}{v}$, donc u, est non nulle à partir d'un certain rang n_1 et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_1}$ converge vers 1, donc $\dfrac{u}{v}$ est bornée. □

Remarque 107. On peut aussi démontrer la proposition précédente sans supposer que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang (mais c'est un peu plus pénible à écrire). Par exemple, pour le point numéro 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 1, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = v_n a_n \\ &\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 1, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = (1-a_n)v_n \\ &\iff \exists (\epsilon)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = \epsilon_n v_n \\ &\iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n) \end{aligned}$$

Pour toute la suite, on suppose que les suites manipulées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Notation 108. Si le terme général d'une suite (u_n) s'écrit $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n = \mathrm{o}(v_n)$, on peut écrire $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ (et on a alors $u_n \sim v_n$).

Exemple 109. $\ln(n) = \mathrm{o}(n)$ donc $n + \ln(n) \sim n$.

Proposition 110.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. Soient $u, v, w \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

- Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et, par opération sur les limites, $\dfrac{v_n}{w_n} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \cdot \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim w_n$. □

Proposition 111 - Opérations avec $\sim$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}, (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ quatre suites réelles.

1. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$.
2. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{x_n}$.
3. Si (u_n) et (v_n) sont strictement positives au delà d'un certain rang, et si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration.

1. On a $\dfrac{u_n \cdot v_n}{w_n \cdot x_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \cdot \dfrac{v_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. On a $\dfrac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{x_n}} = \dfrac{u_n}{v_n} \cdot \dfrac{x_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. On a $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où le résultat. □

Exercice d'application 112. Montrer que $\dbinom{n}{6} \sim \dfrac{n^6}{720}$.

$\hookrightarrow$ Soit $j \in \mathbf{N}$. On a $n - j \sim n$, donc

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^{5} (n-j) \sim \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^{5} n = \frac{n^6}{720}.$$

Remarque : En DS il faudrait rédiger mieux que cela ☺.

⚠ **Attention** ⚠. Les remarques suivantes sont extrêmement importantes. Les maîtriser vous évitera bien des erreurs !

1. **On ne peut ni ajouter, ni soustraire, les équivalents.**
   Par exemple, $n + 1 \sim n + 2$ et $-n \sim -n$, et pourtant 1 n'est pas équivalent à 2.
2. **On ne compose pas les équivalents**.
   Si f est une fonction (même continue sur $\mathbf{R}$) et si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$. Posons par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$ et $f = \exp$. On a $u_n \sim v_n$, mais

   $$\frac{f(u_n)}{f(v_n)} = \mathrm{e}^{n^2+n-n^2} = \mathrm{e}^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   donc $f(u_n) \neq f(v_n)$.

3. **Lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant.**
Par exemple, $1+\dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ n'est pas équivalent 1 (en effet, grâce à la limite classique $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$, on a donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$).

Proposition 113.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites équivalentes.

1. Si la suite (v_n) est strictement positive (respectivement négative) au delà d'un certain rang, alors (u_n) est strictement positive (resp. négative) au delà d'un certain rang.
2. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. 1. Comme u et v sont équivalentes, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$, et u et v ont même signe strict.

2. Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On a $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par opérations sur les limites. □

6.4. Équivalents classiques

Proposition 114.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_n \sim \ell$.

Proposition 115.

Si $P : x \longmapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est une fonction polynomiale dont le coefficient a_p est non nul, alors $P(n) = a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 \sim a_p n^p$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 = \mathrm{o}(a_p n^p)$. □

Les équivalents donnés dans la proposition suivante sont à connaître **par cœur !**

Proposition 116 - Équivalents classiques.

Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas au delà d'un certain rang. Alors chacune des suites suivantes est bien définie au delà d'un certain rang, et

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $1-\cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
- $\operatorname{sh}(u_n) \sim u_n$.
- $1-\operatorname{ch}(u_n) \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

Démonstration.
On utilise le fait que si pour une fonction f, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$. □

Exercice d'application 117. Déterminer la limite de $\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

↪ On a $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n})}$ et $-\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{1}{n}$, donc $n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \sim -1$, puis
$n\ln\left(n-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Or $\lim_{x\to-1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1}$.
Donc, par composition des limites, $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Remarque 118. Attention, dans l'exercice précédent il peut être tentant de composer des équivalents (ce qui est interdit !!!). Vous remarquerez que nous ne l'avons pas fait : nous avons composé des limites, ce qui est licite.

Exercice d'application 119. Déterminer un équivalent simple de $(\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})))_{n\in\mathbf{N}}$.

↪ On a :

$$\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) = \ln\left(\mathrm{e}^{-n}\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-n}) + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = -n + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right).$$

Or $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(\mathrm{e}^{-n}) \sim \mathrm{e}^{-n}$ puis $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}} = 1$, et ensuite $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right)}{-n} = 0$, d'où $\ln\left(\dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = \mathrm{o}(-n)$. Ainsi $-n + \ln\left(\dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = -n + \mathrm{o}(-n)$. Finalement, $\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) \sim -n$.

Remarque 120. Dans l'exercice précédent, il peut être tentant d'ajouter des équivalents (ce qui est interdit !!!). Vous remarquerez que nous ne l'avons pas fait : nous avons utilisé un petit o. Une méthode alternative aurait été de factoriser l'expression :

$$\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) = -n\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right)\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n}))}{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

7. Etude des suites récurrentes

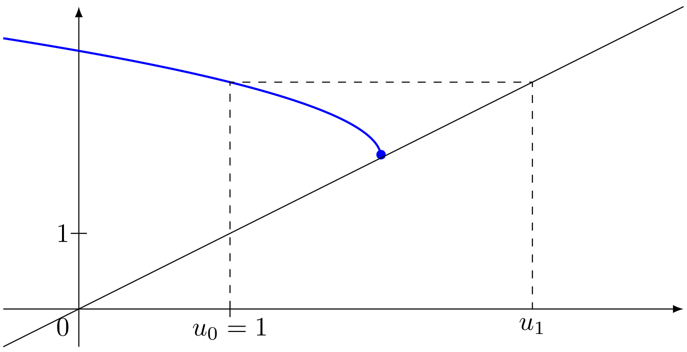
Dans ce paragraphe, nous allons étudier les suites définies par la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \qquad (\star)$$

où f est une fonction réelle.

7.1. Stabilité

Il n'est pas du tout automatique que la suite définie par $(\star)$ existe. La définition par récurrence nécessite qu'à chaque étape le terme u_n soit dans le domaine de définition de f. Par exemple, on ne peut pas définir de suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{2 - u_n}$. En effet, on aurait $u_1 = f(u_0) = 3$ et la relation ne permet pas de définir u_2 puisque $f : x \longmapsto 2 + \sqrt{2 - x}$ n'est pas définie en 3.



Définition 121.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$. Une partie I de D est dite **stable** par f si, et seulement si, $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall x \in I,\ f(x) \in I.$$

Exemple 122.

- L'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$ est stable par la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ car pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$.
- L'intervalle $[0\,;\,1]$ est stable par la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ car pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1.$$

Proposition 123.

Si I est une partie stable par f et si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et tous ses termes appartiennent à I.

Démonstration.
Pour le démontrer, on procède par récurrence :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété « u_n existe **et** $u_n \in I$ ».

- u_0 existe et $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. $u_n \in I \subset D$ donc $f(u_n)$ est bien défini et u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n \in I$, $u_{n+1} \in f(I)$ donc $u_{n+1} \in I$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n \in I$. $\square$

Remarque 124. Il est évident que si f est définie sur $\mathbf{R}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

Exercice d'application 125. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+$ et la relation : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$, est bien définie et que tous ses termes sont positifs ou nuls.

$\hookrightarrow$ Soit $I = [0, +\infty[$ et $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, donc I est une partie stable par f.

Comme $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont dans I, donc sont positifs ou nuls.

Exercice d'application 126. Montrer qu'il existe une et une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + \sqrt{u_n}).$$

$\hookrightarrow$ D'une part, $2 \in \mathbf{R}_+$. D'autre part, l'intervalle $\mathbf{R}_+$ est stable par la fonction $x \longmapsto \ln(1+\sqrt{x})$ car pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $1 + \sqrt{x} \geqslant 1$, donc $\ln(1+\sqrt{x}) \in \mathbf{R}_+$.

Pour la suite de ce cours, on suppose que la partie I de $\mathbf{R}$ est stable par f et que $u_0 \in I$ (et donc que tous les termes de la suite (u_n) sont dans I).

7.2. Convergence

Parfois, c'est simple !

◇◇◇

Remarque technique 127. Pour déterminer la limite d'une suite définie par $(\star)$ (une fois qu'on a démontré que cette suite est bien définie, avec un argument de stabilité !), on pourra essayer d'adopter la stratégie suivante :

1. déterminer le sens de variation de u ;
2. appliquer le théorème de la limite monotone et supposer que la suite converge (en espérant obtenir soit une contradiction, soit la valeur de la limite).

Exercice d'application 128. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$, diverge vers $+\infty$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} \geqslant 0$, donc u est croissante et possède une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone. Par l'absurde, faisons l'hypothèse que $\ell \in \mathbf{R}$. On a $\lim\limits_{x\to\ell} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^\ell$, donc $\ell = \lim_{n\to+\infty}(u_n + \mathrm{e}^{u_n}) = \ell + \mathrm{e}^\ell$ et ainsi $\mathrm{e}^\ell = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $\ell = +\infty$.

Exercice d'application 129. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ converge vers 0.

$\hookrightarrow$ L'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$ est stable par $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et $u_0 = 1 \in \mathbf{R}_+^\star$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} \leqslant 0.$$

Ainsi u est décroissante et positive, donc elle converge vers une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone. On a alors :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n^2} = \frac{\ell}{1+\ell^2},$$

donc

$$\ell - \frac{\ell}{1+\ell^2} = \frac{\ell^3}{1+\ell^2} = 0,$$

et ainsi $\ell = 0$.

Si c'est plus compliqué, on pourra utiliser les résultats suivants.

Proposition 130.

Soit $f : I \longrightarrow I$ (de sorte que I soit stable par f) et u définie par $(\star)$.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant x$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Démonstration. 1. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ puisque I est stable par f). Il s'ensuit que u est croissante. □

Proposition 131.

Soit $f : I \longrightarrow I$ et u définie par $(\star)$.
Si u converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un **point fixe** de f, *i.e.*

$$f(\ell) = \ell.$$

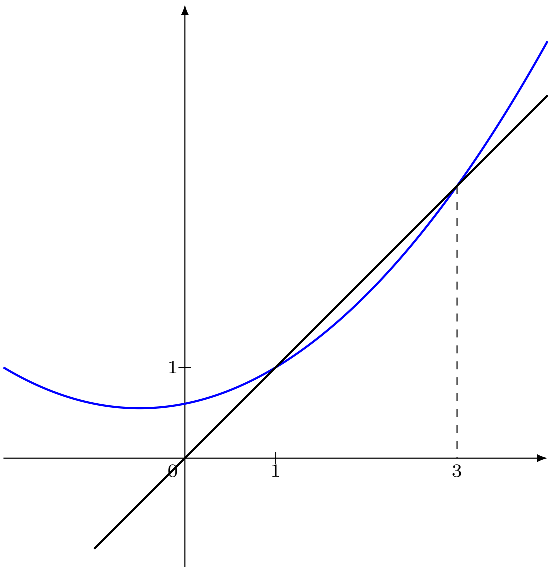
Démonstration.
A lire après avoir fait le chapitre sur la continuité.
Comme f est continue en ℓ, $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Enfin pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc en effet $f(\ell) = \ell$. □

Exercice d'application 132. Soit u une suite pour laquelle, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n + 3}{5}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\mathbf{R}_+$ est stable par f.
2. Déterminer la nature de u et sa limite éventuelle.

$\hookrightarrow$

1. On a f strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ en tant que somme de fonctions strictement croissante. Par ailleurs f est continue et $f(0) = \frac{3}{5}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc le théorème de la bijection assure que $f(\mathbf{R}_+) = \left[\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$.
2. Avant de commencer, on peut s'aider d'un graphique et faire quelques conjectures sur le comportement de la suite.



Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On remarque que

$$f(x) - x = \frac{(x-1)(x-3)}{5}.$$

Il s'ensuit

x	0		1		3		$+\infty$
f	$\frac{3}{5}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit beaucoup d'informations sur ce tableau : le signe de $x \longmapsto f(x) - x$, mais aussi que les intervalle $[0\,;\,1[$, $]1\,;\,3[$ et $]3\,;\,+\infty[$ sont stables par f (essentiel pour pouvoir lier le signe de $f - \mathrm{Id}$ à la monotonie de u). Ceci nous conduit à distinguer les cas suivants :

- Supposons $u_0 \in [0\,;\,1[$. Puisque $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [0\,;\,1[$ et $[0\,;\,1[$ est stable par f, on a u croissante. Or u est majorée par 1, donc u converge. Les seuls points fixes de f étant 1 et 3, on en déduit que u converge vers 1 par continuité de f.
- Si $u_0 = 1$, alors la suite est constante égale à 1. En particulier, elle converge vers 1.
- Supposons $u_0 \in]1\,;\,3[$. Puisque $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in]1\,;\,3[$ et $]1\,;\,3[$ est stable par f, on obtient que u est décroissante. De plus u est minorée par 1, donc u converge vers $\ell \in [1\,;\,3[$ d'après le théorème de la limite monotone. Donc, par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_0 = 3$, alors la suite est constante égale à 3. En particulier, elle converge vers 3.
- Supposons $u_0 > 3$. On a $]3\,;\,+\infty[$ stable par f et pour tout $x > 3$, $f(x) \geqslant x$, donc u est croissante. Le théorème de la limite monotone assure alors que u admet une limite $\ell > 3$ (par croissance de u). Comme f ne possède pas de point fixe dans $]3\,;\,+\infty[$, on en déduit que $\ell = +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

En résumé, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u_0 \in [0\,;\,3[\\ 3 & \text{si} \quad u_0 = 3 \\ +\infty & \text{si} \quad u_0 > 3 \end{cases}.$

En dernier recours, on pourra s'intéresser aux résultats suivants (qui sont à démontrer à chaque utilisation, par récurrence).

Proposition 133.

Soit $f : I \longrightarrow I$ et u définie par $(\star)$.

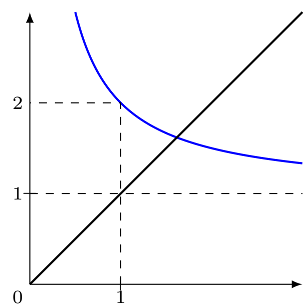
1. Si f est croissante, alors u est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.
2. Si f est décroissante sur D, $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones de sens contraire. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2.

Démonstration.

1. Supposons f croissante et $u_0 \geqslant u_1$. Montrons par récurrence que u est croissante, en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».
$u_0 \geqslant u_1$ par hypothèse, donc H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vrai. On a $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ par croissance de f et en utilisant H_n. Par conséquent, H_{n+1} est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.
Si cas $u_0 \leqslant u_1$ est similaire.
2. Supposons f décroissante avec $u_0 \leqslant u_2$. Alors $f \circ f$ est croissante et $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante d'après le point précédent.
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et en utilisant la décroissance de f : $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$, donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Le cas $u_0 \geqslant u_2$ est similaire. □

Exercice d'application 134. On note u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{u_n}$. Donner la nature de u.

$\hookrightarrow$ Posons $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.



- L'intervalle $[1\,;\,2]$ est stable par f et $u_0 \in [1\,;\,2]$, donc la suite u est bien définie (et bornée par 1 et 2).
- Ensuite, f est décroissante sur le domaine stable $[1\,;\,2]$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones de sens contraires. La démonstration est donnée avant. Bornées, ces deux suites sont ainsi convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'.

  Notons qu'ici le sens des variations des suites n'est pas utile. Mais on pourrait facilement l'obtenir avec le signe de $u_2 - u_0$.
- A présent, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ étant récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$, leurs limites ℓ et ℓ' sont des points fixes de $f \circ f$. Soit $x \in [1\,;\,2]$.

$$f \circ f(x) = x \iff 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x \iff x^2 - x - 1 \iff x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$. On en déduit finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.