

Systèmes linéaires

*Il n'y a donc autant d'équations linéaires qu'il y a d'inconnues à trouver ; les valeurs de ces inconnues seront obtenues par l'élimination ordinaire.
Voyons maintenant si cette élimination est toujours possible, ou si la solution peut quelquefois devenir indéterminée, ou même impossible.*

Carl Friedrich Gauss.

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n et p sont des entiers naturels.

1. Présentation du problème

Définition 1.

On appelle **équation linéaire** à p inconnues toute équation du type

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

d'**inconnues** $x_1, x_2, \dots, x_p$ éléments de $\mathbf{K}$, et avec $a_1, a_2, \dots, a_p, b$ des éléments de $\mathbf{K}$ fixés. On appelle $a_1, a_2, \dots, a_p$ les **coefficients** et b le **second membre**.

- Exemple 2.**
- Prenons $p = 2$, et notons x et y les inconnues, a, b les coefficients réels et $c \in \mathbf{R}$ le second membre. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, dans le plan muni d'un repère orthonormé (direct) $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ est une droite de vecteur directeur $-b\vec{u} + a\vec{v}$ et de vecteur normal $a\vec{u} + b\vec{v}$.
 - Prenons $p = 3$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. L'équation $ax + by + cz = d$ d'inconnue (x, y, z) correspond à l'équation d'un plan si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, de vecteur normal $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, si l'on se place dans un repère orthonormé (direct) $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 3.

On appelle **système** de n équations à p inconnues tout système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \quad (\text{S})$$

où $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{K}$. Un tel système est d'**inconnue** $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$.

Un système dont le second membre est nul est dit **homogène**.

- Exemple 4.**
- Un système linéaire de n équations à 2 inconnues correspond (en général) à l'intersection de n droites du plan. Cette interprétation permet de comprendre qu'un tel système peut n'avoir aucune solution (si les droites sont parallèles), une unique solution (si les droites sont concourantes : la solution est alors le couple de coordonnées du point d'intersection des droites) ou une infinité de solution (si les droites sont confondues : les solutions décrivent les coordonnées de tous les points de cette unique droite).
 - Un système linéaire de n équations à 3 inconnues correspond (en général) à l'intersection de n plans de l'espace, qui peut être vide (si les plans sont parallèles), une droite (si les plans s'intersectent tous en la même droite) ou un plan.

Définition 5.

On peut associer au système (S) un tableau de nombres, appelé **matrice associée** à (S) :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On peut également lui associer un autre tableau, avec le second membre, appelé **matrice augmentée** de (S) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right).$$

- Exemple 6.** Considérons le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2y - 3z = 0 \\ x + y - z = -2 \end{cases}.$$

La matrice qui lui est associée est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice augmentée qui lui est associée est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right).$$

2. Opérations élémentaires

On considérera le système suivant, désignant par $L_1, \dots, L_n$ les différentes lignes du système, de sa matrice ou de sa matrice augmentée :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes du système (resp. de sa matrice, resp. de sa matrice augmentée) toute opération d'un des trois types suivants.

1. Échange de deux lignes i et j , qu'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne i par un nombre non nul $\lambda \in \mathbf{K}^*$, qu'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajout à une ligne i un multiple $\alpha \in \mathbf{K}$ d'une autre $j \neq i$, qu'on note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Exemple 7. On considère le système $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ -x + 5y - z = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Après l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$, le système devient $\begin{cases} 7y + 2z = 7 \\ -x + 5y - z = 1 \end{cases}$.

Définition 8.

- On dit que deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont **équivalents** si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $(S_1) \iff (S_2)$.
- Deux matrices A et B sont dites **équivalentes** si l'on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \underset{L}{\sim} B$.

Proposition 9.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Démonstration.

On suppose que les systèmes ont n lignes pour p inconnues. Soit i et j deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ne change pas l'ensemble des solutions.
- Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Considérons l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Notons S_1 le système initial et S_2 le système obtenu à partir de S_1 par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
 - Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une solution de S_1 . Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,p}x_p = b_k.$$

En particulier, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $k \neq i$,

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,p}x_p = b_k.$$

et pour la ligne i s'écrit

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i,$$

ce qui devient après multiplication par λ ,

$$\lambda a_{i,1}x_1 + \lambda a_{i,2}x_2 + \dots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i.$$

Ainsi, $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie S_2 .

- Le réciproque se mène de manière similaire en considérant plutôt une multiplication par $\frac{1}{\lambda}$.
- L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ est semblable. $\square$

Expliquons sur un exemple :

Exemple 10. On considère le système d'équations d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3 & (2) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 & (3) \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 & (4) \end{cases}$$

On soustrait à la deuxième ligne de (S) deux fois la première ligne. On obtient :

$$(S') : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 & (1') \\ 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 & (2') \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 & (3') \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 & (4') \end{cases}$$

- Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une solution de (S) . Si (1), (2), (3), (4) sont vraies, alors (1'), (3') et (4') sont vraies. De plus,

$$3x_2 - 3x_3 + x_4 = (2x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - 2(x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4) = 3 - 2 \times 1 = 1,$$

donc (2') est vraie aussi.

- Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une solution de (S') . Alors (1), (3) et (4) sont vraies. De plus,

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2(x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4) + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 + 2 \times 1 = 3.$$

donc (2) est vraie aussi.

- Finalement, (S) et (S') sont équivalents.

On écrit cette équivalence à l'aide de matrices comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right),$$

Exemple 11. On a

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ -x + 5y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 7y + 2z = 7 \\ -x + 5y - z = 1 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = 4 - \frac{17}{7}t \\ y = 1 - \frac{2}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(4 - \frac{17}{7}t, 1 - \frac{2}{7}t, t \right) : t \in \mathbf{R} \right\}.$$

3. Méthode de Gauss

3.1. Système triangulaire, matrice échelonnée

[illegible]

Notons que la résolution est encore plus simple si les pivots sont égaux à 1.

Une matrice est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est échelonnée par lignes, si tous ses pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls dans leur colonne.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 13 & 0 & -19 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

1. On commence par réordonner les inconnues du système pour obtenir une écriture similaire à celle de (S). Les inconnues sont donc alignées en « colonnes », chaque colonne ne faisant apparaître qu'une seule inconnue (que des « x », ou que des « y »...).
2. On considère la « colonne » la plus à gauche ne contenant pas déjà un pivot encadré : c'est dans cette colonne que l'on va choisir notre nouveau pivot. La première fois que cette étape a lieu, il s'agit de la première colonne.
3. On choisit comme pivot un coefficient non nul P de cette colonne dans une ligne qui suit celle qui contient le précédent pivot encadré (n'importe où dans la première colonne la première fois que cette étape a lieu), et on encadre ce choix. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément dans la ligne succédant à celle contenant le précédent pivot (on l'amène donc à la première ligne si l'on effectue cette étape pour la première fois). On encadre le pivot.

En pratique, avec des coefficients entiers, on a toujours intérêt à choisir comme pivot un coefficient dont la valeur absolue est la plus petite possible. Les meilleurs pivots sont les 1 et les -1 .

4. Par des opérations élémentaires sur les lignes du type $L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda L_k$ (où k est la ligne du pivot et α est non nul), on fait disparaître les inconnues de la colonne du pivot dans les lignes qui sont **en dessous** de la ligne du pivot. En pratique :
- on réécrit, sans aucune modification, les premières lignes qui contiennent déjà un pivot (celle du nouveau pivot et celles des anciens pivots) ;
 - on calcule les coefficients des dernières lignes du nouveau système à partir des coefficients de l'ancien système.

Dans l'exemple ci-dessous, pour obtenir 0 à la place du coefficient $D_1 x_k$ tout en gardant un système équivalent, il suffit de changer la ligne L_j en la ligne $\boxed{P}.L_j - D_1.L_i$. Le terme Ax_ℓ devient alors Xx_ℓ avec $X = \boxed{P}.A - D_1.D_2$.

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{cccc} \ddots & & \vdots & \ddots \\ & \boxed{P}x_k & D_2x_\ell & (L_i) \\ \dots & & & \\ & D_1x_k & Ax_\ell & (L_j) \\ \ddots & & \vdots & \ddots \end{array} \right\}}_{\text{ancien système avec le nouveau pivot } P} \iff \underbrace{\left\{ \begin{array}{cccc} \ddots & & \vdots & \ddots \\ & \boxed{P}x_k & D_2x_\ell & \\ \dots & & & \\ & 0 & Xx_\ell & \\ \ddots & & \vdots & \ddots \end{array} \right\}}_{\text{nouveau système}}$$

5. S'il reste des lignes qui ne sont pas de la forme $0 = cst$ en dessous du dernier pivot encadré, on reprend le processus à l'étape 2.
6. Lorsqu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot, le processus s'arrête. Le système obtenu est alors échelonné et porte le nom de **réduite de Gauss** du système de départ. Cette réduite n'est pas unique puisqu'elle dépend des pivots choisis.

Notons qu'une légère modification de l'algorithme précédent permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite (par exemple, on peut normaliser tous les pivots (les rendre égaux à 1, en faisant des divisions sur les lignes). Plus précisément l'**algorithme de Gauss-Jordan**¹ renvoie une matrice échelonnée réduite :

```

r ← 0      # r est l'indice de ligne du dernier pivot trouvé
pour j de 1 jusqu'à m      # k décrit tous les indices de colonnes
  rechercher max(|Ai,j| : r + 1 ≤ i ≤ n)
  noter k l'indice de ligne du maximum      # Ak,j est le pivot
  si Ak,j ≠ 0 alors
    r ← r + 1
    diviser la ligne k par Ak,j      # on normalise la ligne du pivot
    si k ≠ r alors
      échanger les lignes k et r      # on place la ligne du pivot en position r
    fin si
    pour i de 1 jusqu'à n      # on simplifie les autres lignes
      si i ≠ r alors
        soustraire à la ligne i la ligne r multipliée par Ai,j      # pour annuler Ai,j
      fin si
    fin pour
  fin si
fin pour

```

Théorème 20 - Théorème de Gauss-Jordan.

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Démonstration.

L'algorithme de Gauss-Jordan fournit le résultat. □

Exemple 21 (suite de l'Exemple 10).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

1. Camille JORDAN, mathématicien français (1838-1922)

$$\begin{array}{c} \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{11} \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{14}{22} \end{array} \right) \end{array}$$

4. Résolution des systèmes linéaires

Définition 22.

Un système linéaire est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit qu'il est **incompatible**.

On appelle **condition de compatibilité** du système la condition qui permet de rendre le système compatible.

Remarque 23. Un système homogène est toujours compatible.

Exemple 24. Le système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$ est incompatible. Le système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = a - 1 \end{cases}$ est compatible si et seulement si $a = 1$ (la condition de compatibilité est donc $a = 1$).

Définition 25.

On appelle **rang** d'un système linéaire le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite en ligne équivalente à la matrice en lignes du système.

Exercice d'application 26. Déterminer le rang de (S) : $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 3y + z = 1 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$.

↔ La matrice associée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Définition 27.

Les inconnues correspondants aux colonnes des pivots sont appelées **inconnues principales**. Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires** (ou **paramètres**).

Exemple 28. Dans l'Exercice d'application 26, x et y sont les inconnues principales, alors que z est un paramètre.

Définition 29.

On appelle **système de Cramer**² un système linéaire de n équations à n inconnues et de rang n .

↔ Le système n'admet pas de solution (les détails du calcul sont laissés en exercice).

Remarque technique 36. Il faut être vigilant lorsque le système comporte des paramètres. Puisqu'il est interdit de choisir un pivot nul, on peut être amené à discuter suivant la valeur des paramètres.

Exercice d'application 37. Soit $a \in \mathbf{R}$. Résoudre le système (S) suivant, d'inconnue (x_1, x_2, x_3) .

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ 2x_2 + 5x_3 &= a + 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2a \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

↔ On applique la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 2 & \boxed{5} & 3 & a+1 \\ 1 & 1 & \boxed{4} & 2a \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \underset{\tilde{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3a - \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} - a \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a - 1 \end{array} \right)$$

Le système (S) est compatible si et seulement si $a = 1$. Lorsque $a = 1$, le système admet une seule solution $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Exercice d'application 38. Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère

$$(S) : \begin{cases} x - ay + (a+1)z &= 1 \\ ax - y + 2az &= a+2 \\ x - y + (1-a)z &= 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (S) soit compatible.

↔ On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ a & -1 & 2a & a+2 \\ 1 & -1 & 1-a & 0 \end{array} \right) \underset{\tilde{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & -1+a^2 & a-a^2 & 2 \\ 0 & -1+a & -2a & -1 \end{array} \right)$$

- Supposons $a \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a(a-1) & 2 \\ 0 & \boxed{-1+a} & -2a & -1 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3a(a+1) & a+3 \\ 0 & \boxed{a-1} & -2a & -1 \end{array} \right) \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & \boxed{a-1} & -2a & -1 \\ 0 & 0 & 3a(a+1) & a+3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, le choix du dernier pivot est possible et le système est compatible.

- Si $a = 1$, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

et le système est incompatible.

- Si $a = 0$, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

et le système est incompatible.

- Si $a = -1$, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

et le système est incompatible.

Finalement, (S) est compatible si et seulement si $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.

[illegible]

Proposition 39 - Structure de l'ensemble des solutions.

Si le système (S) est compatible, alors toute solution de (S) s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène.

Démonstration.

Puisque le système est compatible, il admet une solution $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$. Soit $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbf{K}^p$.

$$\begin{aligned}
(y_1, \dots, y_p) \text{ est solution de (S)} &\iff \begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,p}y_p = b_1 \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \dots + a_{2,p}y_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{n,p}y_p = b_n \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,p}y_p = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \dots + a_{2,p}y_p = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{n,p}y_p = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{cases} \\
&\iff (x_1 - y_1, \dots, x_p - y_p) \text{ est solution du système homogène} \\
&\iff \text{il existe une solution homogène } (h_1, \dots, h_p) \text{ telle que} \\
&\quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i - y_i = h_i
\end{aligned}$$

1