Chapitre 11

Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et (n, p) est un couple d'entiers naturels non nuls.

1. Vocabulaire

Définition 1.

On appelle **matrice** à coefficients dans $\mathbf{K}$ un tableau rectangulaire constitué de nombres appartenant à $\mathbf{K}$ et ayant n lignes, p colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note, de manière condensée, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

L'élément $a_{i,j}$ est appelé **coefficient** de position (i, j) de la matrice A : il est situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne (où $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

Le couple (n, p) est appelé **format** de la matrice. On dit que M est une matrice (n, p) (sous entendu de format (n, p), on dit parfois de taille (n, p)).

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de format (n, p).

Définition 2.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. Si $n = p$ (la matrice a donc le même nombre de lignes et de colonnes), M est dite **matrice carrée** . On note alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Si $n = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule ligne), M est dite **matrice ligne**.
3. Si $p = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule colonne), M est dite **matrice colonne**.

Définition 3.

On appelle **matrice nulle** de format (n,p) la matrice de format (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou 0 si cette notation ne présente pas d'ambiguïté.

Exemple 4. Voici quelques exemples de matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{R}) \quad B = \begin{pmatrix} \pi \\ 1,5 \\ \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \quad C = \begin{pmatrix} 3,1 & -2 \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbf{R}) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

B est une matrice colonne, D est une matrice ligne, C et E sont carrées.
On a par exemple, $a_{3,1} = 9$, $a_{1,3} = 3$, etc.

Exercice d'application 5. Écrire explicitement les matrices suivantes :

$$M = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{\substack{i\in[\![1,3]\!] \\ j\in[\![1,4]\!]}} \qquad N = \left(n_{i,j}\right)_{\substack{i\in[\![1,5]\!] \\ j\in[\![1,3]\!]}} \text{ avec } \forall (i,j) \in [\![1,5]\!] \times [\![1,3]\!], n_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i > j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ On a

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice d'application 6. Soit $P = (p_{i,j})_{i,j\in[\![1,5]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $i,j \in [\![1,5]\!]$, donner la valeur de $p_{i,j}$.

$\hookrightarrow$ On reconnaît le triangle de Pascal, et ainsi $p_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$.

Exercice d'application 7. Combien y-t'il de matrice de format $(2,4)$ dont les éléments sont des 0 ou des 1 ?

$\hookrightarrow$ On a 8 éléments à choisir dans $\{0,1\}$, d'où 2^8 possibilités.

Notation : soit M une matrice (n,p) où n et p désigne deux entiers strictement positifs.

On note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de la matrice M. Ces lignes sont écrites via des matrices-ligne.

On note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de la matrice M. Ces colonnes sont écrites via des matrices-colonne.

Exemple 8. Les lignes et les colonnes de la matrice A de l'Exemple 4 sont

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Calcul matriciel

2.1. Combinaison linéaire

Définition 9.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit les matrices $A+B$ et λA par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

⚠ **Attention** ⚠**.** On ne peut additionner ou multiplier par une constante que des matrices de même format.

Exemple 10. $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} & 3 \\ \ln 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{e} & 4 \\ \ln 2 & 5+\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 11. $i\begin{pmatrix} 1+i & i & 3 \\ \ln 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 & -1 & 3i \\ i\ln 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice d'application 12. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $A+2B$ et $2A-B$.

$\hookrightarrow$ $A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.

Proposition 13 - Propriétés de la somme matricielle.

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

1. Commutativité : $(A+B)+C = A+(B+C)$;
2. Associativité : $A+B = B+A$;
3. Existence d'un élément neutre : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$;
4. Existence d'un opposé : $A + (-1).A = A - A = 0_{n,m}$.

Proposition 14 - Propriétés du produit externe matriciel.

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
3. $\lambda(\mu A) = (\mu \times \lambda)A$;
4. $0.A = 0_{n,p}$;
5. $1.A = A$;

Remarque 15. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire (c'est-à-dire une somme pondérée) des matrices $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définies par

$$
\begin{array}{cc}
E_{i,j} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & | & 0 \\ & 0 & \\ 0 — 0 & 1 & 0 —— 0 \\ & 0 & \\ 0 & | & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-ème ligne} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ j\text{-ème colonne} \end{array} &
\end{array}
$$

En effet, toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ s' écrit de manière unique sous la forme :

$$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j}.$$

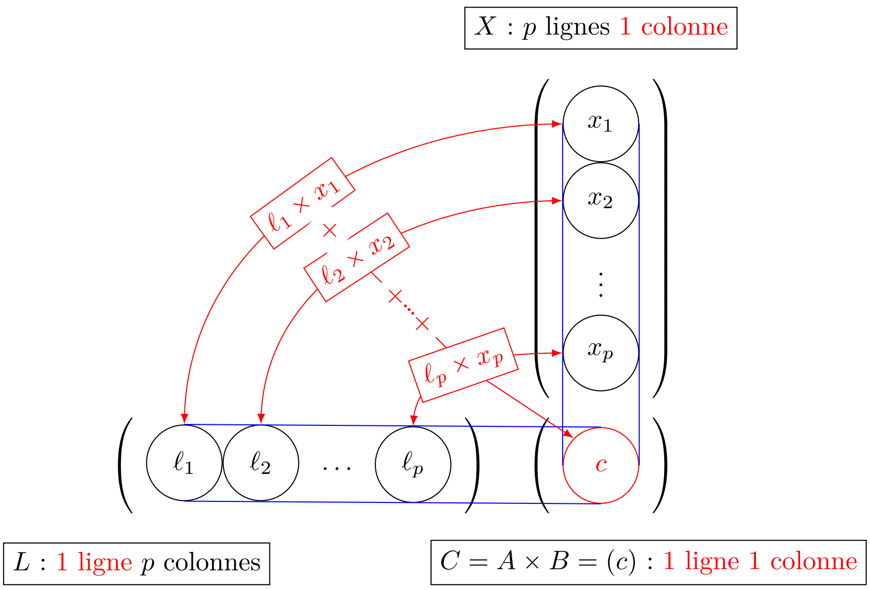
Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{1,2} + 4E_{2,1} - E_{2,2}.$$

2.2. Multiplication matricielle

Soit $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell 2 & \cdots & \ell p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. On définit alors le produit LX comme étant la matrice de taille 1×1 égale à :

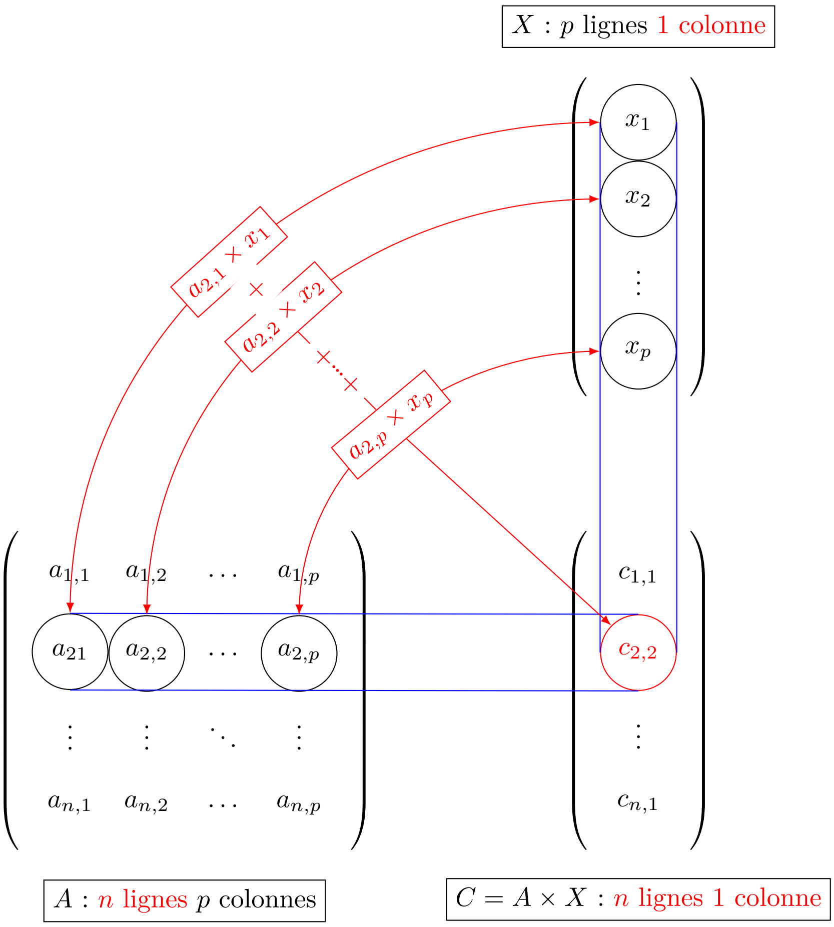
$$LX = \left(\sum_{k=1}^{p} \ell_k x_k \right).$$



Exemple 16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-2) + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = -1.$

Remarque 17. Le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne correspond au produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si les coordonnées de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) sont stockées dans la matrice ligne (resp. la matrice colonne).

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Le produit AX est la matrice colonne de taille $n \times 1$ dont la i-ème ligne est le produit de la i-ème ligne de A par X, à savoir $\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k\right)$.



Exemple 18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Remarque 19. On a

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} x_k \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} x_k \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix},$$

et on remarque que AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Notons par ailleurs que, si $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation matricielle

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est équivalent à au système d'équations linéaires

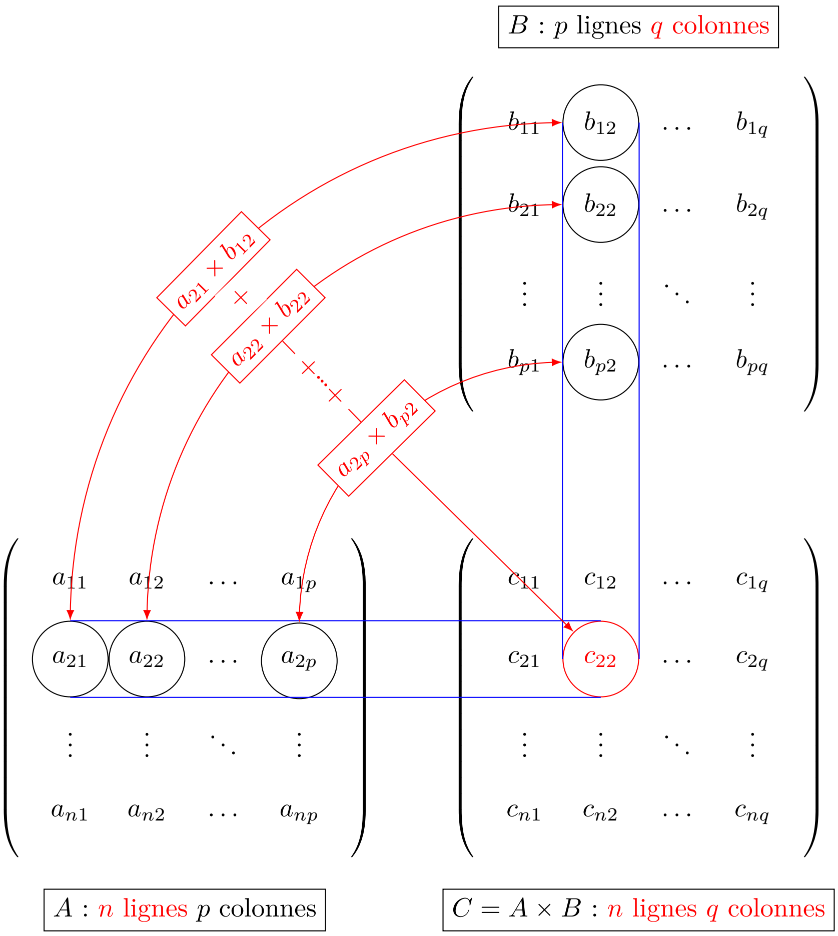
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

La matrice A est alors la matrice du système linéaire, tandis que $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ correspond à la matrice augmentée.

Définition 20.

Soit $(n,p,q) \in (\mathbf{N}^\star)^3$, $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de sorte que le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B (c'est pour cette raison que l'indice de colonne de A est le même que l'indice de ligne de B).
On peut alors définir le **produit matriciel** de A par B, noté AB, comme la matrice $(c_{i,k})$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall (i,k) \in [\![1;n]\!] \times [\![1,q]\!], \qquad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \cdots + a_{i,p}b_{p,k}.$$



Exemple 21. 1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -11 \\ -1 & -9 & 37 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. On ne peut pas multiplier $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans cet ordre.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

⚠ **Attention** ⚠**.** Il faut être très prudent avec le produit matriciel : les règles du produit sur $\mathbf{K}$ ne s'appliquent pas toutes aux matrices. Par exemple, on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. De plus, le produit matriciel n'est pas commutatif *a priori* : en général, $AB \neq BA$ (où A et B sont des matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, sinon un de ces produits n'est même pas défini).

Remarque 22. 1. Dans le cas où A est une matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$, alors AB est une combinaison linéaire des lignes de B :

$$AB = a_1 \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,r} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,r} \end{pmatrix} + \cdots + a_p \begin{pmatrix} b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,r} \end{pmatrix}.$$

2. Dans le cas général, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{K})$, alors la i-ième ligne de AB est le produit de la i-ième ligne de A avec B.

Proposition 23.

Soit $(n,p,q,r) \in (\mathbf{N}^\star)^4$. Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- Le produit matriciel est **associatif** :
$$(AB)C = A(BC)\,;$$
- Le produit matriciel est **distributif** par rapport à l'addition :
$$A(B+B') = AB + AB' \qquad \text{et} \qquad (A+A')B = AB + A'B\,;$$
- Le produit matriciel et le produit par les scalaires « **commutent** » :
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Démonstration. 1. $AB = (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$

De plus, $(AB)C = (\sum_{\ell=1}^{q} (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell}) c_{\ell,j}) \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{K})$.

Par associativité sur $\mathbf{K}$, $(AB)C = (\sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j}) = (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} (\sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell} c_{\ell,j})) = A(BC)$.

□

L'associativité du produit nous permet d'écrire ABC à la place de $(AB)C$ ou $A(BC)$.

⚠ **Attention** ⚠**.** Il faut être très prudent avec le produit matriciel : les règles du produit sur $\mathbf{K}$ ne s'appliquent pas toutes aux matrices. Par exemple, on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. De plus, le produit matriciel n'est pas commutatif *a priori* : en général, $AB \neq BA$ (où A et B sont des matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, sinon un de ces produits n'est même pas défini).

Exemple 24. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

2.3. Transposition

Définition 25.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La **transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ notée ${}^tA$ ou A^T dont le coefficient de position (i,j) est $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Les éléments de le i-ème ligne de ${}^tA$ sont donc les éléments de la i-ème colonnes de A et vice-versa.

Exemple 26.
- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \pi \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$
- La transposée d'une matrice-ligne est une matrice-colonne et vice-versa.

Proposition 27.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad {}^t({}^tA) = A$.
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbf{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA \quad .$

Démonstration.
1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Notons ${}^tA = (a'_{i,j})$ et ${}^t({}^t(A)) = (a''_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. On a par définition $a''_{i,j} = a'_{j,i} = a_{i,j}$, d'où le résultat.
2. Soit $(\lambda, A, B) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})^2$. Notons $(\lambda A + B) = (c_{i,j})$, ${}^t(\lambda A + B) = (c'_{i,j})$, ${}^tA = (a'_{i,j})$ et ${}^tB = (b'_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. On a $c'_{i,j} = c_{j,i} = \lambda a_{j,i} + b_{j,i} = \lambda a'_{i,j} + b'_{i,j}$, d'où le résultat.
3. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{m,q}(\mathbf{K})$. Notons ${}^tA = (a'_{i,j})$, ${}^tB = (b'_{i,j})$, $AB = (c_{i,j})$ et ${}^t(AB) = (c'_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$$c'_{i,j} = c_{j,i} = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{m} a'_{k,j} b'_{i,k} = \sum_{k=1}^{m} b'_{i,k} a'_{k,j}$$

d'où le résultat. □

L'une des principales propriétés de la transposition est la conservation du rang.

Proposition 28.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, le rang de ${}^tA$ est égal au rang de A.

Démonstration.
Admis. □

En pratique, ce résultat signifie que dans la recherche du rang, on peut indifféremment travailler sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice, puisque les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$ et vice versa.

3. Les matrices carrées

Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $A+B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les produits AB et BA sont tous les deux possibles, et de plus $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ mais on a vu qu'en général $AB \neq BA$.

L'ensemble des matrices carrées de taille n est donc muni de deux opérations : l'addition et la multiplication.

3.1. Matrices triangulaires supérieures ou inférieures, diagonales

Définition 29.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est :

- **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i > j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}.$$
Les $*$ désignent ici des scalaires quelconques.
- **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i < j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$
- **diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i \neq j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Cette matrice se note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
- **scalaire** s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Remarque 30. Les matrices diagonales sont triangulaires inférieures et triangulaires supérieures

Définition 31.

On appelle **matrice identité de taille** n la matrice notée I_n et définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I_n est donc une matrice scalaire : $I_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

La matrice identité vérifie

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Proposition 32.

Soit $(A, B, \lambda) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \times \mathbf{K}$.

1. Si A et B sont diagonales, alors $A + B$, λA et AB aussi, et on a :
   - $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n) + \mathrm{diag}(b_1, ..., b_n) = \mathrm{diag}(a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$;
   - $\lambda\,\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n) = \mathrm{diag}(\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$;
   - $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n) \times \mathrm{diag}(b_1, ..., b_n) = \mathrm{diag}(a_1 b_1, ..., a_n b_n)$.
2. Si A et B sont triangulaires supérieures, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.
3. Si A et B sont triangulaires inférieures, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.

3.2. Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 33.

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite :

1. **symétrique** lorsque ${}^tA = A$;
2. **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Remarque 34. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. A est symétrique si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
A est antisymétrique si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,i} = 0$ et pour $j \neq i$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$.

Exemple 35.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -\mathrm{e} \\ -12 & 0 & -i \\ \mathrm{e} & i & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Le produit de deux matrices symétriques peut ne pas être symétrique, comme le montre l'exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 36.

La somme de deux matrices symétriques de même taille est une matrice symétrique.

Théorème 37.

Toute matrice carrée de taille n s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Voir TD. $\square$

3.3. Puissance d'une matrice carrée

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A \times A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On peut itérer et définir les puissances de A.

Définition 38.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on définit la matrice A^k par récurrence :

$$A^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ A^{k+1} = A^k \times A.$$

Ainsi, $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, etc. Remarquons que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k$.

Exercice d'application 39. Calculer A^3 où $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$ On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$.

Proposition 40 - Cas des matrices diagonales.

Soit $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ une matrice diagonale. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k) = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons H_k : « $A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k)$ ».
H_0 est vraie puisque $A^0 = I_n$ par définition.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que H_k soit vraie. On a

$$A^{k+1} = A \times A^k = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \times \mathrm{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k) = \mathrm{diag}(a_1^{k+1}, \dots, a_n^{k+1}).$$

d'après la Proposition 32. Ainsi H_{k+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure. □

Définition 41.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Exemple 42. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. A et I_n commutent car $A \times I_n = A = I_n \times A$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, A et A^k commutent car $A \times A^k = A^{k+1} = A^k \times A$.

Proposition 43.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$. Si A et B commutent, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, A et B^k commutent.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons H_k : « $AB^k = B^k A$ ».
On a $AB^0 = AI_n = A = I_n A = B^0 A$, donc H_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que H_k soit vraie. On a

$$\begin{array}{rcll} AB^{k+1} & = & AB^k B & \\ & = & B^k AB & \text{d'après } H_k \\ & = & B^k BA & \text{car } A \text{ et } B \text{ commutent} \\ & = & B^{k+1} A & \end{array}$$

Ainsi H_{k+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure. □

Proposition 44 - Formule du binôme pour les matrices.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que A et B commutent. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Démonstration.
Pour tout $N \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$ ».

$(A+B)^0$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = A^0 B^0 = I_n$, donc H_0 est vraie.

Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que H_N soit vraie.

$$\begin{array}{rcll}
(A+B)^{N+1} & = & (A+B)\times(A+B)^N & \\
 & = & A\times(A+B)^N + B\times(A+B)^N & \\
 & = & A\times\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k} + B\times\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k} & \text{d'après } H_k \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k+1}B^{N-k} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k+1} & \text{car } A \text{ et } B \text{ commutent} \\
 & = & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N+1}\binom{N}{\ell-1}A^{\ell}B^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k+1} & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}\right)A^kB^{N-k+1} + A^{N+1} + B^{N+1} & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\binom{N+1}{k}A^kB^{N+1-k} + A^{N+1} + B^{N+1} & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}A^kB^{N+1-k}, &
\end{array}$$

ce qui montrer H_{N+1}. Le principe de récurrence permet de conclure. □

⚠ **Attention** ⚠. $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'étant pas commutatif, on ne peut appliquer pas toujours la formule du binôme de Newton. Notamment, pour toute matrice A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$ et pour certaines matrices A et B (en fait, la plupart) $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

Exercice d'application 45. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Développer $(I_n+A)^N$.

$\hookrightarrow$ $(I_n+A)^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}I_n^{N-k}A^k = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^k = I_n + NA + \frac{N(N-1)}{2}A^2 + ... + NA^{N-1} + A^N.$

4. Méthode du pivot de Gauss et calcul matriciel

On a vu que le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

traduit l'égalité matricielle $AX = B$, où $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice des coefficients, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des inconnues et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des seconds membres.

Nous allons voir dans cette partie que les opérations sur les lignes dans l'algorithme du pivot de Gauss correspondent elles aussi à un calcul matriciel.

4.1. Matrices élémentaires

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit les trois matrices élémentaires suivantes.

Définition 46.

On appelle **matrice de dilatation** une matrice de la forme

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\alpha} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

où $\alpha \in \mathbf{K}^\star$ et tous les coefficients de cette matrice sont égaux, sauf celui de position (i,i).

La matrice $D_i(\alpha)$ est la matrice obtenue à partir de I_n en faisant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \alpha L_i$.

Définition 47.

On appelle **matrice de transposition** une matrice $P_{i,j}$ obtenue à partir de I_n en échangeant deux lignes i et j :

$$P_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \boxed{1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{1} & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Définition 48.

On appelle **matrice de transvection** une matrice obtenue à partir de I_n en ajoutant λ fois (où $\lambda \in \mathbf{K}$) la ligne j à la ligne i : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$:

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \boxed{\lambda} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

4.2. Méthode du pivot de Gauss

Proposition 49.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbf{K}^\star \times \mathbf{K}$.

1. $D_i(\alpha) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
2. $P_{i,j} \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.
3. $T_{i,j}(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Les opérations élémentaires sur les lignes de A se traduisent ainsi par des produits à gauche par des matrices élémentaires.

Nous avons vu lors du chapitre sur la résolution des systèmes linéaires que pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite en ligne R telle que $A \sim_L R$. D'après ce qui précédente, cela signifie :

Proposition 50.

Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui est produit de matrices élémentaires, telle que $E \times A = R$.

4.3. Opérations sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Faire des opérations élémentaires sur les colonnes de A revient à faire des opérations élémentaires sur les lignes de ${}^tA$. Puisque ${}^t \times {}^t A = A \times {}^t E$, les opérations élémentaires sur les colonnes de A se traduisent par des produits à droites par des matrices élémentaires.

Proposition 51.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbf{K}^\star \times \mathbf{K}$.

1. $A \times D_i(\alpha)$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \alpha C_i$.
2. $A \times P_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$.
3. $A \times T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

On note $A \sim_C B$ lorsqu'on passe de A à B par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les colonnes.

5. Matrices carrées inversibles

5.1. Présentation

Définition 52.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices inversibles s'appelle le **groupe linéaire** d'ordre n et il est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$.

⚠ **Attention** ⚠**.** Pour être inversible, une matrice doit d'abord être carrée !!

Proposition 53.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Cette matrice est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

Démonstration.
Notons B et C deux inverse de A.

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

□

Exemple 54. I_n est inversible, et $I_n^{-1} = I_n$.
$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
La matrice nulle n'est pas inversible. En effet, pour tout matrice B, $B \times 0 = 0$.

Exercice d'application 55. Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

$\hookrightarrow$ Posons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix},$$

ne peut jamais être égal à l'identité. Donc A n'est pas inversible.

Proposition 56.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$. Si A et B sont inversibles, alors AB aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration.
On a

$$(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

et de même,

$$(B^{-1}A^{-1}) \times (AB) = I_n.$$

□

Remarque 57. On peut en déduire, à l'aide d'une simple récurrence, que si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. Cette dernière matrice est notée A^{-k}.

Remarque 58. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Supposons que l'on ait trouvé une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ (respectivement $BA = I_n$). Du fait que la multiplication matricielle n'est pas commutative, on ne peut pas affirmer *a priori* que cet inverse à gauche (respectivement à droite) est la matrice inverse de A. Ce résultat est cependant *vrai dans le cas des matrices* et nous le démontrerons plus tard.

Proposition 59.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est inversible, alors ${}^tA$ aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.
On a
$$({}^tA) \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \times A) = {}^tI_n = I_n$$
et de même
$${}^t(A^{-1}) \times ({}^tA) = I_n.$$
□

Théorème 60 - Caractérisation de l'inversibilité.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$.

(ii) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{n,1}$.

(iii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

(iv) $A \sim_L I_n$.

(v) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ admet une unique solution.

(vi) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ admet au moins une solution.

Démonstration.
On montre que (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(i) pour commencer.

- (i)$\Longrightarrow$(ii). Supposons $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $AX = 0_{n,1}$. On a $A^{-1}AX = A0_{n,1}$, d'où $I_nX = 0_{n,1}$ puis $X = 0_{n,1}$.
- (ii)$\Longrightarrow$(iii). L'assertion (ii) signifie que le système est de Cramer (il admet au plus une solution, et 0 est une solution évidente, donc il admet exactement une solution) ce qui signifie que $\mathrm{rg}(A) = n$.
- (iii)$\Longrightarrow$(iv). Si le système est de rang n, alors l'algorithme de Gauss-Jordan assure qu'il est équivalent par lignes à I_n.
- (iv)$\Longrightarrow$(i). Si le système est équivalent par lignes à I_n, il existe E un produit de matrices élémentaires tel que $EA = I_n$. On a admis que cette égalité suffisait à caractériser que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ (on pourrait aussi démontrer sans trop de difficulté que $E \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ pour conclure).

Montrons pour conclure (i)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(iv).

- (i)$\Longrightarrow$(v). Supposons $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B.$$
- (v)$\Longrightarrow$(vi). Evident.
- (vi)$\Longrightarrow$(iv). Si l'équation $AX = B$ admet une solution pour tout B que la matrice augmentée associée au système ne contient pas de ligne du type $\left(\begin{array}{c|c} 0 \cdots 0 & cst \end{array}\right)$. En particulier, un pivot a pu être choisi pour chaque ligne et $\mathrm{rg}(A) = n$. □

5.2. Calcul pratique de l'inverse

Pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss. On écrit à gauche la matrice A, et à droite la matrice I_n. On applique l'algorithme du pivot sur A pour la réduire à I_n (ce qui est possible puisqu'on a vu dans le Théorème 60 que $A \sim_L I_n$). On fait les mêmes opérations sur la matrice de droite. A la fin, on doit donc avoir I_n à gauche. La matrice à droite est l'inverse de A.

Exemple 61. On veut calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{array}{cc|c}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_n} \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{L}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{L}{\sim} & \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{I_n} & \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}
\end{array}$$

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 62. On peut interpréter l'inversion de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ en terme de réciproque d'application de $\mathbf{K}_n$ sur lui-même. Le calcul précédente prouve que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, 2x + 4y - z, -2x - 5y + 3z) \end{array}$$

est bijective, de réciproque

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (7a - b + 2c, -4a + b - c, -2a + b) \end{array}$$

En effet, si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'application f peut se décrire plus simplement sous la forme $f : X \longmapsto AX$, et g par $g : x \longmapsto A^{-1}X$. Il est alors immédiat que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Nous reviendrons très précisément sur cela dans un chapitre ultérieur.