

Limites et continuité

1. Propriétés locales d'une fonction

Définition 1.

On appelle **extrémité** d'une partie D de la forme $I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle d'extrémités b et c , avec $(b, c, a) \in (\mathbf{R})^2 \times \mathbf{R}$.

Exemple 2. Les extrémités de $[1; 3[\cup]3; +\infty[$ sont 1, 3 et $+\infty$.

Définition 3.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$. On appellera **voisinage** de a tout intervalle du type $]a - h; a + h[$, avec $h > 0$.
- Cas où $a = +\infty$. On appellera **voisinage** de $+\infty$ tout intervalle du type $]A; +\infty[$, avec $A \in \mathbf{R}$.
- Cas où $a = -\infty$. On appellera **voisinage** de $-\infty$ tout intervalle du type $] -\infty; A[$, où $A \in \mathbf{R}$.

Exemple 4.

- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est supérieure à 1 au voisinage de $\frac{1}{2}$ (sur $]0; 1[$ par exemple) et bornée au voisinage de $+\infty$ sur $]1; +\infty[$ par exemple).
- La fonction logarithme est définie au voisinage de 0 (sur $] -1; 1[\cap \mathbf{R}_+^*$ par exemple).

Définition 5.

Une fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{R})$ admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en $a \in D$ s'il existe un intervalle ouvert V contenant a tel que

$$\forall x \in V \cap D, f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Un **extremum local** de f est un maximum local de f ou un minimum local de f .

Exercice d'application 6. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1 .

$\hookrightarrow$ Il suffit d'étudier les variations de la fonction. On a par exemple que le maximum de $g|_{]-5; 1[}$ est 1.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
g	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

2. Limites

Dans tout ce paragraphe on notera D une partie de $\mathbf{R}$ de la forme I ou $I \setminus \{a\}$, avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et I un intervalle.

2.1. Limite finie d'une fonction en $a \in \overline{\mathbf{R}}$

Définition 7.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

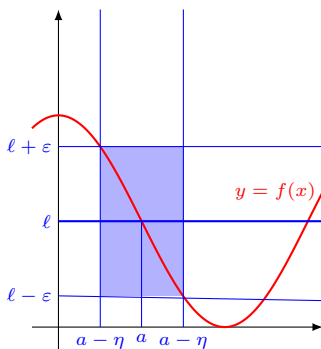
- Cas où $a = +\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, \quad x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

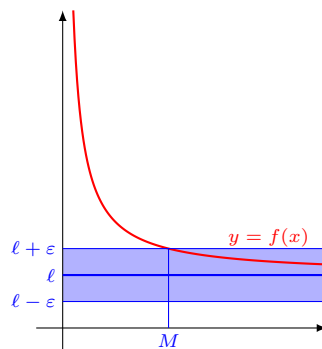
- Cas où $a = -\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, \quad x \leq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

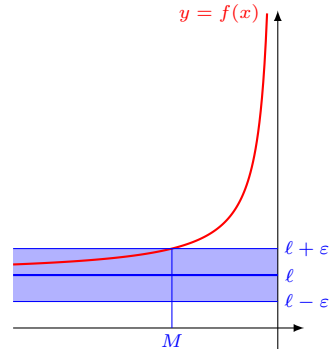
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$



Remarque 8. Comme pour les suites, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges dans la définition. De plus, on peut remplacer ε par $c \cdot \varepsilon$, où $c > 0$ est une constante (indépendante de tous les autres paramètres).

Remarque 9. On peut écrire une définition plus compacte à l'aide des voisinages :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x \in V \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Proposition 10.

Si f possède une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, alors cette limite est unique.
Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_a f = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbf{R}$ (elle s'adapte facilement aux autres cas).

Raisonnons par l'absurde et supposons que f admettent deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes en a . Posons $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$. Par définition de la limite en a , on a

$$\exists \eta_1 > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon,$$

et

$$\exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon,$$

Notons $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta_0$. Alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|.$$

D'où $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, puis $\ell_1 = \ell_2$. □

Exercice d'application 11. Montrer, avec la définition, que la fonction racine carrée tend vers 0 en 0.

↪ La fonction racine carrée est bien définie au voisinage de 0 et, pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^2$ pour avoir

$$\forall x \geq 0, (|x - 0| \leq \eta) \implies (|\sqrt{x} - 0| \leq \varepsilon)$$

Exercice d'application 12. La fonction $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ tend vers 0 en $+\infty$.

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

↪ En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $A = \frac{1}{\varepsilon}$ pour avoir

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, (x \geq A) \implies \left(\left|\frac{1}{x} - 0\right| \leq \varepsilon\right).$$

2.2. Limites infinies

On dit qu'une fonction réelle f tend vers $+\infty$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a .

Définition 13.

- On dit que f **tend vers** $+\infty$ en $a \in \mathbf{R}$ ssi elle vérifie

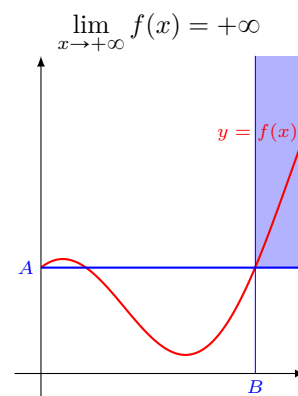
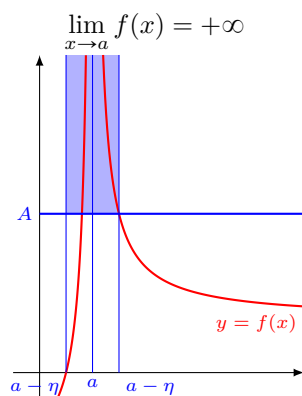
$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \eta) \implies (f(x) \geq A).$$

- On dit que f **tend vers** $+\infty$ en $+\infty$ ssi elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in D, (x \geq B) \implies (f(x) \geq A).$$

- On dit que f **tend vers** $+\infty$ en $-\infty$ ssi elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in D, (x \leq B) \implies (f(x) \geq A).$$



Définition 14.

- On dit que f **tend vers** $-\infty$ en $a \in \mathbf{R}$ ssi elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (|x - a| \leq \eta) \implies (f(x) \leq A).$$

- On dit que f **tend vers** $-\infty$ en $+\infty$ ssi elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists B \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \quad (x \geq B) \implies (f(x) \leq A).$$

- On dit que f **tend vers** $-\infty$ en $-\infty$ ssi elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists B \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \quad (x \leq B) \implies (f(x) \leq A).$$

⚠ Attention ⚠. On utilisera la notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ uniquement après avoir montré que f converge en a , que f diverge vers $+\infty$ en a ou que f diverge vers $-\infty$ en a .

Remarque 15. Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On peut compacter les trois cas de la Définition 14 comme suit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbf{R}, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D, \quad x \in V \implies f(x) \geq A).$$

De même, on peut écrire la Définition 13 de manière plus synthétique :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall A \in \mathbf{R}, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D, \quad x \in V \implies f(x) \leq A).$$

Enfin, on peut regrouper toutes les définitions sur les limites ainsi, où $(a, \ell) \in (\overline{\mathbf{R}})^2$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff (\forall U \in \mathcal{V}(\ell), \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D, \quad x \in V \implies f(x) \in U).$$

Proposition 16 - Unicité de la limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Si une fonction f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en a , alors cette limite est unique. Lorsque $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$, on note encore :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_a f = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Démonstration.

Il suffit d'adapter la démonstration de la proposition de l'unicité de la limite finie. □

Exemple 17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$.

2.3. Propriétés des limites

Théorème 18.

Si $a \in D$ et si f admet pour limite le nombre $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en a , alors $\ell \in \mathbf{R}$ et $\ell = f(a)$.

Démonstration.

Supposons par l'absurde que f admette une limite ℓ en a , avec $\ell \neq f(a)$.

- Supposons $\ell = +\infty$. Il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $f(x) \geq f(a) + 1$. En particulier, puisque $a \in D \cap V$, alors $f(a) \geq f(a) + 1$, ce qui est absurde. Ainsi $\ell \neq +\infty$.
- De même, on montre que $\ell \neq -\infty$.
- On a donc $\ell \in \mathbf{R}$, et $\ell \neq f(a)$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - f(a)| > 0$. Puisque f a pour limite ℓ en a , il existe un voisinage V de a tel que, pour $x \in D \cap V$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. En particulier, puisque $a \in D \cap V$, $|f(a) - \ell| \leq \frac{1}{2}|f(a) - \ell|$, ce qui est absurde.

Finalement, $\ell = f(a)$. □

Proposition 19.

Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a .

Démonstration.

Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$. Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Pour $\varepsilon = 1$,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq 1.$$

Ainsi, pour $x \in I \cap [a - \eta; a + \eta]$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$$

donc f est bornée au voisinage de a . □

Proposition 20.

Soit α et β deux nombres réels. Si f possède une limite finie ℓ en a et si $\ell \in]\alpha; \beta[$, alors f prend ses valeurs dans $] \alpha, \beta[$ au voisinage de a .

Démonstration.

Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon < \min\{\ell - \alpha, \beta - \ell\}$ (de sorte que $\alpha < \ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon < \beta$), on obtient pour x au voisinage de a ,

$$\alpha < \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon < \beta.$$

□

Corollaire 21.

Si f possède une limite strictement positive en a alors f est minorée par un nombre strictement positif au voisinage de a .

Démonstration.

Il suffit de prendre $\alpha = \frac{\ell}{2} > 0$ dans la proposition précédente. □

Remarque 22. Le résultat est faux si la limite est nulle. Par exemple $f : x \mapsto x$ possède une limite nulle en 0 mais n'est pas positive au voisinage de 0.

Remarque 23. On peut en déduire que si f admet une limite non nulle en a , alors f est non nulle au voisinage de a : il suffit d'appliquer le corollaire précédent à $|f|$.

Théorème 24 - Passage à la limite dans une inégalité.

Soit f et g deux fonctions réelles définies sur D et a un point ou une extrémité de D . Si f et g admettent une limite en a (finie ou non), et si $f \leq g$ au voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Démonstration.

Démontrons ce résultat par l'absurde : supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) > 0$ donc $f - g$ est strictement positive au voisinage de a ce qui est absurde. □

⚠ Attention ⚠. Le résultat précédent est faux avec des inégalités strictes!!!

Si $f < g$ au voisinage de a , alors $\lim_a f \leq \lim_a g$ mais on n'a pas nécessairement $\lim_a f < \lim_a g$.

Exemple 25. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, g la fonction nulle (c'est-à-dire $g : x \mapsto 0$) et $a = +\infty$, on a $f > g$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Théorème 26 - Caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{R})$ une fonction réelle et a un point ou une extrémité de D .

La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ a pour limite ℓ .

Démonstration.

Traisons le cas où $a \in \mathbf{R}$ (les cas $a = -\infty$ et $a = +\infty$ sont similaires) et $\ell \in \mathbf{R}$.

- Supposons que $\lim_a f = \ell$ et considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a . Puisque $\lim_a f = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, (|x - a| \leq \eta) \implies (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Comme $\lim u_n = a$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - a| \leq \eta.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \implies (|u_n - a| \leq \eta) \implies (|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon)$$

et donc $\lim f(u_n) = \ell$.

- Pour la réciproque, raisonnons par contraposition en supposant que f n'admet pas ℓ pour limite en a , c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists x_\eta \in D, (|x_\eta - a| \leq \eta \text{ et } |f(x_\eta) - \ell| > \varepsilon).$$

En prenant $\eta = \frac{1}{n}$ pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$, on obtient l'existence de $u_n \in D$ (ici $u_n = x_{1/n}$) tel que

$$(|u_n - a| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| > \varepsilon).$$

On voit alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans D ainsi construite vérifie $\lim u_n = a$ et $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ne tend pas vers ℓ .

□

Remarque technique 27. Cette proposition s'utilise souvent pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en $a \in \overline{\mathbf{R}}$: il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tendant vers a telles que les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbf{N}}$ n'ont pas la même limite.

Exercice d'application 28. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Les suites u et v divergent vers $+\infty$, et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sin(u_n) = 0$, $\sin(v_n) = 1$, donc $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice d'application 29. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

↪ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = 1$. Par ailleurs,

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n + \frac{1}{2}}}{n^n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sim \sqrt{n}\sqrt{e}.$$

Ainsi f n'est pas convergente.

2.4. Limite à droite, limite à gauche

Définition 30.

- On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ pour **limite à droite** en a si la restriction de f à $]a; +\infty[\cap D$ admet ℓ pour limite en a . On la note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ pour **limite à gauche** en a si la restriction de f à $] -\infty; a[\cap D$ admet ℓ pour limite en a . On la note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Remarque 31. 1. Dans le cas où ℓ est un réel, ces deux définitions s'écrivent avec des quantificateurs de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \forall \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (0 < x - a < \eta) \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

pour la limite à droite, et

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \forall \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (-\eta < x - a < 0) \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

pour la limite à gauche.

2. Dans la définition précédente, les intervalles $]a; +\infty[$ et $] -\infty; a[$ sont ouverts en a . Autrement dit, la valeur de f en a n'intervient pas dans l'existence et la valeur de la limite à droite ou à gauche.

Exemple 32. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

Exercice d'application 33. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Déterminer les limites à droite et à gauche de la fonction partie entière en m .

↪ Pour tout $x \in]m - 1; m[$, $[x] = m - 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$. De plus, pour tout $x \in]m; m + 1[$, $[x] = m$, d'où $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$.

Proposition 34.

1. Si f admet $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ pour limite en a alors f admet une limite à droite et à gauche en a toutes les deux égales à ℓ (si tant est que f est définie à gauche ou à droite de a).
2. Soit a est un réel en lequel f est définie. Si f est définie à gauche et à droite de a , et si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

alors f tend vers $f(a)$ en a .

⚠ Attention ⚠. Le point 2. de la proposition précédente n'est pas exactement la réciproque du point 1. D'ailleurs, la réciproque de 1. est fausse en général (voir exemple suivant).

Exemple 35. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. La proposition assure que si f admet une limite, celle-ci est nécessairement 0.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, on a $0 = |0 - 0| \leq \eta$, alors que $|f(0) - 0| = 1 > \varepsilon$. f n'admet donc pas 0 comme limite. La proposition assure en outre que f n'a pas de limite en 0.

Remarque technique 36. La proposition peut être utile pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (cf. l'exemple précédent ou l'exercice d'application qui suit).

Exercice d'application 37. La fonction $f : x \mapsto \lfloor -|x| \rfloor$ possède-t-elle une limite en 0 ?

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) = \lfloor -x \rfloor = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$. De même, pour tout $x \in]-1; 0[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. Par contre, $f(0) = 0$, ce qui empêche de conclure que f admet une limite en 0. Démontrons que ça n'est pas le cas, c'est-à-dire que f ne converge pas vers -1 (seul candidat possible d'après la proposition) : posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, on a $|0| < \eta$ et $|f(0) + 1| = 1 \geq \frac{1}{2}$. Ainsi f ne converge pas vers -1 en 0, donc f n'admet pas de limite en 0.

Définition 38.

Soit a est un réel en lequel f n'est pas définie, tel que f est définie à gauche et à droite de a . Si f possède une limite à gauche et une limite à droite et si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

alors on dit que f tend vers ℓ en a .

Exercice d'application 39. Déterminer, si elle existe, la limite de $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ en 0.
 $x \mapsto 0$

$\hookrightarrow$ On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

3. Opérations sur les limites

Remarque 40. Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 en posant $x = a + h$: la limite en $a \in \mathbf{R}$ de $x \mapsto f(x)$ existe ssi la limite en 0 de $h \mapsto f(a + h)$ existe et dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h).$$

Proposition 41.

Soit f et g deux fonctions définies sur D et a un point ou une extrémité de D . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ où ℓ et ℓ' sont deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$.

1. Si la forme $\ell + \ell'$ n'est pas indéterminée alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$.
2. Si la forme $\ell \times \ell'$ n'est pas indéterminée alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \ell\ell'$.
3. Si ℓ' est un réel tel que $\ell' \neq 0$, alors la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a donc la fonction $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell'}$.
4. Si $\ell' = +\infty$ ou $\ell' = -\infty$, alors la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a donc la fonction $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0$.
5. Si $\ell' = 0$ et si g est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a , alors la fonction $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = -\infty$).

Démonstration.

On va utiliser les opérations sur les limites de suites et la caractérisation séquentielle de la limite pour étendre ces propriétés aux limites de fonctions. On démontre le point 1. (les autres preuves se mènent de la même manière).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a . Par la caractérisation séquentielle de la limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \ell'$. Par opérations sur les limites de suites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) + g(u_n) = \ell + \ell'$. Or ceci est vrai pour toute suite u qui tend vers a . Par la caractérisation séquentielle de la limite, on a donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$. $\square$

Remarque 42. 1. Les résultats sur la limite de $\frac{f}{g}$ en a se déduisent en combinant le point 2 à l'un des points 3,4, et 5.

2. Dans la proposition précédente, tout reste vrai si l'on remplace la limite en a par la limite à gauche en a ou la limite à droite en a (lorsque cela a un sens).
3. Dans tous les cas « indéterminés », on peut avoir une limite finie, une limite infinie ou pas de limite. Pour trouver la limite dans les cas particuliers il faut « lever l'indétermination », c'est-à-dire transformer l'expression pour ne plus avoir de forme indéterminée.

Pour les indéterminations $(\pm\infty) \pm (\mp\infty)$, $0 \times (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ une méthode consiste à mettre le terme dominant en facteur.

Proposition 43.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{R})$ et a un point ou une extrémité de D . Soit $g \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ et b un point ou une extrémité de E . On suppose que $f(D) \subset E$ de sorte que l'on puisse considérer la fonction $g \circ f$ de $\mathcal{F}(D, \mathbf{R})$. Si f admet pour limite b en a , et si g admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en b , alors $g \circ f$ tend vers ℓ en a .

Démonstration.

On fait la preuve uniquement pour $(a, b, \ell) \in \mathbf{R}^3$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de g ,

$$\exists \nu > 0, \forall y \in E, (|y - b| \leq \nu \implies |g(y) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Ensuite, la définition de la limite de f donne

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \nu).$$

On a donc, pour tout $x \in D \cap [a - \eta; a + \eta]$, $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui permet de conclure. $\square$

Exemple 44. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$.

4. Théorèmes d'existence de limite

Théorème 45 - Théorème d'encadrement.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$, f, g, h trois fonctions réelles définies sur D , a un point ou une extrémité de D et $\ell \in \mathbf{R}$. Supposons que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

(a) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a .

(b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

(c) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Alors g admet une limite en a , et plus précisément $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite :

$$\exists \eta_1, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon),$$

$$\exists \eta_2, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta_1 \implies |h(x) - \ell| \leq \varepsilon),$$

De plus, il existe $\eta_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [a - \eta_3; a + \eta_3]$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Pour tout $x \in I \cap [a - \eta; a + \eta]$,

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon,$$

donc $|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$, et ainsi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$. □

Remarque 46. On notera, qu'au contraire du théorème de passage à la limite dans une inégalité, le théorème d'encadrement

fournit à la fois l'existence d'une limite finie à une fonction et la valeur de sa limite.

Exercice d'application 47. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \frac{x^2 + \sin \sqrt{x}}{2x^2 + 1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Corollaire 48.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ soit f et g deux fonctions définies sur D , a un point ou une extrémité de D , tels que $|f| \leq g$ au voisinage de a . Si g possède une limite nulle en a alors f possède également une limite nulle en a .

Théorème 49 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur D , a un point ou une extrémité de D , tels que $f \leq g$ au voisinage de a .

1. Si f tend vers $+\infty$ en a , alors g tend également vers $+\infty$ en a .
2. Si g tend vers $-\infty$ en a , alors f tend également vers $-\infty$ en a .

Démonstration.

Traisons le cas où $a \in \mathbf{R}$, et ne démontrons que le théorème de minoration. Supposons donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Soit $A > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [a - \eta_1; a + \eta_1]$, $f(x) \geq A$. De plus, il existe $\eta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [a - \eta_2; a + \eta_2]$, $g(x) \geq f(x)$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a, pour tout $x \in D \cap [a - \eta; a + \eta]$, $g(x) \geq A$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. $\square$

Théorème 50 - Théorème de la limite monotone.

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ avec $a < b$, et f une fonction croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $]a; b[$.

1. Si f est majorée (resp. minorée) sur $]a; b[$, alors f possède une limite finie à gauche en b et

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup(\{f(x) : x \in]a; b[\}) \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf(\{f(x) : x \in]a; b[\})).$$

2. Si f est minorée (resp. majorée) sur $]a; b[$, alors f possède une limite finie à droite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf(\{f(x) : x \in]a; b[\}) \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup(\{f(x) : x \in]a; b[\})).$$

3. Si f n'est pas majorée (resp. minorée) sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

4. Si f n'est pas minorée (resp. majorée) sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Démonstration.

Supposons que f est croissante sur l'intervalle $]a; b[$.

1. La fonction f étant majorée, l'ensemble $\{f(x) : x \in]a; b[\}$ est non vide et majoré, ce qui justifie l'existence de $\ell = \sup(\{f(x) : x \in]a; b[\})$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on sait qu'il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq \ell$. Comme la fonction f est croissante et majorée par ℓ , on en déduit que pour tout $x \geq x_0$, $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell$. On a donc démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in]a; b[, \forall x \geq x_0, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

ce qui établit la convergence de f vers ℓ .

3. Soit $A \in \mathbf{R}$. Comme f n'est pas majorée, le nombre A n'est pas un majorant de f , c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que $f(x_0) \geq A$. Comme f est croissante, on en déduit que pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \geq A$. On a donc démontré que

$$\forall A > 0, \exists x_0 \in]a; b[, \forall x \geq x_0, f(x) \geq A,$$

ce qui démontre la divergence de f vers $+\infty$ quand x tend vers b .

Le cas où f est décroissante se déduit en considérant $-f$ à la place de f . Les points 2. et 4. se déduisent de 1. et 3. en considérant $x \mapsto f(-x)$ à la place de f . $\square$

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 51.

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ monotone, et $a \in D$ tel que a ne soit pas une borne de D . Alors f admet des limites finies à gauche et à droite en a . Plus précisément,

1. Si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
2. Si f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Démonstration.

Montrons le résultat dans le cas où f est croissante, et notons c et d les bornes de D . L'application $f|_{]c; a[}$ est croissante, et pour tout $x \in]c; a[$, $f(x) \leq f(a)$, donc cette fonction est majorée. Ainsi elle admet une limite en a^- . De plus, pour tout $x \in]c; a[$, $f(x) \leq f(a)$ et en passant à la limite quand x tend vers a^- , on obtient $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a)$.

De même, en considérant $f|_{]a; d[}$, on montre que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe et est supérieure ou égale à $f(a)$. $\square$

Remarque 52. Ces deux inégalités peuvent être strictes (penser à la fonction partie entière). On verra dans un paragraphe suivant l'on peut établir la continuité d'une fonction si les inégalités sont des égalités.

Exercice d'application 53. On considère $F : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$. Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$\hookrightarrow$ On remarque que F est croissante comme primitive d'une fonction positive. Il suffit donc d'établir qu'elle est majorée. On a, pour tout $t \in [0; 1]$, $e^{-t^2} \leq 1$ et $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ si $t \geq 1$. Ainsi, pour tout $x \geq 1$,

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 dt + \int_1^x e^{-t} dt = 1 + e^{-1} - e^{-x} \leq 1 + e^{-1}.$$

Ainsi F est croissante, majorée par $1 + e^{-1}$: elle admet donc une limite finie en $+\infty$ (on peut établir, mais c'est plus difficile, qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

5. Relations de comparaison : cas des fonctions

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Dans ce paragraphe, on considère des fonctions f , g et h définies au voisinage de a .

5.1. Présentation

Définition 54.

Pour cette définition, g peut s'annuler au voisinage de a . On dit que f est :

1. **dominée** par g au voisinage de a s'il existe une fonction ϕ bornée au voisinage de a telle que $f = \phi \times g$. On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.
2. **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe ϕ de limite nulle en a telle que $f = \phi \times g$. On note $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.
3. **équivalente** à g au voisinage de a s'il existe ϕ de limite égale à 1 en a telle que $f = \phi \times g$. On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 55. 1. $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x = \frac{1}{x} \times x^2$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 = x \times x$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Remarque 56. • f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} O(1)$.

- f converge vers 0 en a si et seulement si $f \underset{a}{=} o(1)$.
- $f \underset{a}{=} o(g) \implies f \underset{a}{=} O(g)$.

A partir de la définition, on obtient immédiatement la proposition suivante :

Proposition 57.

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a ,

- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a ;
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$;
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

Démonstration.

Il suffit de choisir $\phi = \frac{f}{g}$ dans la définition. □

On supposera pour toute la suite que les fonctions f , g et h ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a). Autrement dit, on suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ et $h(x) \neq 0$.

Exemple 58. 1. $x^2 \sin(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^2)$. En effet $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 \sin(x^3)$ sont définies sur $\mathbf{R}^*$ et, pour tout

$$x \in \mathbf{R}^*, \left| \frac{x^2 \sin(x^3)}{x^2} \right| \leq 1.$$

2. Si $p < q$, $x^p \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^q)$ et $x^q \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$. En effet $x \mapsto x^p$ et x^q sont définies sur $\mathbf{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x^q} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^q}{x^p}$.

3. $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$. En effet, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$.

Exercice d'application 59. Soit $p \in \mathbf{N}$, $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^*$ et $f : x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k$. Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0, puis au voisinage de $+\infty$.

$\hookrightarrow$ Notons $K = \min \{k \in \llbracket 0, p \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$ (l'ensemble est non vide car $a_p \neq 0$ et est fini). On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_K x^K$.

Puisque $\frac{f(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{\frac{a_k}{x^{p-k}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_p x^p$.

Par exemple, $2x^3 + 4x^2 + \pi x \underset{x \rightarrow 0}{=} \pi x$ et $2x^3 + 4x^2 + \pi x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x^3$.

5.2. Propriétés

Les propriétés données ci-après sont très semblables à celles données dans le chapitre sur les suites (mise à part la Proposition 69). Les preuves sont similaires.

Proposition 60 - Transitivité.

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} O(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Proposition 61 - Somme.

- Si $f \underset{a}{=} O(h)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} O(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.

⚠ **Attention** ⚠. On ne somme jamais des équivalents !

Proposition 62 - Produit.

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies au voisinage de a et qui ne s'annulent pas au voisinage de a , sauf peut-être en a .

- Si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$.
- Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
- Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.

Proposition 63 - Quotient.

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies au voisinage de a et qui ne s'annulent pas au voisinage de a , sauf peut-être en a .

Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$, sous réserve de définition des quotients.

Proposition 64 - Puissances.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Proposition 65 - Symétrie.

On a $f \underset{a}{\sim} g \iff g \underset{a}{\sim} f$.

Théorème 66.

On a $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g)$.

En particulier, si $h \underset{a}{=} o(f)$, alors $f + h \underset{a}{\sim} f$.

Théorème 67.

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe strict au voisinage de a .

Théorème 68.

Si $f \sim_a g$, alors f a une limite en a si et seulement si g a une limite en a . Le cas échéant, $\lim_a f = \lim_a g$.

Proposition 69 - Changement de variable dans un équivalent.

Si $f \sim_a g$ et ϕ est une fonction de limite a en b , alors $f \circ \phi \sim_b g \circ \phi$ (en prenant garde à ce que ϕ et les composées soient bien définies).

Démonstration.

On a $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et $\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$ donc, par composition de limite, on obtient le résultat. □

5.3. Comparaison des fonctions usuelles**Théorème 70.**

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b) \in \mathbf{R}^6$ avec $0 < \alpha < \beta$, $0 < \gamma < \delta$ et $1 < a < b$.

- Comparaison des « infiniment grands » usuels en $+\infty$.

$$|\ln(x)|^\gamma \ll |\ln(x)|^\delta \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x \ll x^x.$$

- Comparaison des « infiniment petits » usuels en $+\infty$.

$$\frac{1}{x^x} \ll \frac{1}{b^x} \ll \frac{1}{a^x} \ll \frac{1}{x^\beta} \ll \frac{1}{x^\alpha} \ll \frac{1}{|\ln(x)|^\delta} \ll \frac{1}{|\ln(x)|^\gamma}.$$

- Comparaison des « infiniment grands » usuels au voisinage de 0.

$$|\ln(x)|^\gamma \ll \frac{1}{x^\alpha} \ll \frac{1}{x^\beta}.$$

- Comparaison des « infiniment petits » usuels au voisinage de 0.

$$x^\beta \ll x^\beta |\ln(x)|^\gamma \ll x^\alpha.$$

5.4. Équivalents classiques**Proposition 71 - Équivalents classiques.**

- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

- $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$

- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x.$

- $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

- $1 - \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$

- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

Démonstration.

Puisque $\sin$ est dérivable en 0 avec $\sin'(0) = 1$, on a $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Or $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$. On a donc $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$, puis $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1} = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}(x) + 1}$. Or $\operatorname{sh}^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch}(x) + 1) = 2$, d'où $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Les autres équivalents sont laissés en exercice. $\square$

Remarque technique 72. On peut obtenir des équivalents en d'autre point qu'en 0, en faisant un changement de variable (cf. Proposition 69).

Exercice d'application 73. Déterminer un équivalent au point a , pour chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(x)$ en $a = 1$;
2. $x \mapsto \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ en $a = +\infty$;
3. $x \mapsto \cos(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$;
4. $x \mapsto \sqrt{\cos(x)} - 1$ en $a = 0$;
5. $x \mapsto \tan(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$.

$\hookrightarrow$

1. On a, pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \ln(1 + (x - 1))$ avec $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$, d'où $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$.
2. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
3. On a $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$.
4. $\sqrt{\cos(x)} - 1 = \sqrt{\cos(x) - 1 + 1} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}(\cos(x) - 1)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0$. On en déduit $\sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 = -\frac{x^2}{4}$.
5. $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$.

6. Continuité

Dans toute la suite, I sera un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point. a est un élément de $\overline{\mathbf{R}}$ et soit $a \in I$, soit a est une extrémité de I .

6.1. Continuité en un point

Définition 74.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (|x - a| \leq \eta) \implies (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue en** a .

⚠ Attention ⚠. Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie !! Ainsi, il n'y a **aucun sens** à étudier la continuité en 0 de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_+^* &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

puisque celle-ci n'est pas définie en 0.

En faisant le lien avec la notion de limite, on obtient immédiatement la caractérisation suivante.

Proposition 75 - Caractérisation avec les limites.

La fonction f est continue en a si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche en a et que ces limites sont égales à $f(a)$.

Exemple 76. • $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$.

- Soit $m \in \mathbf{Z}$. La fonction partie entière n'est pas continue en m puisqu'elle n'admet pas de limite finie en un tel point (la limite à gauche de la fonction partie entière en m n'est pas égale à $[m]$).

Exercice d'application 77. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbf{R}^+$ par $\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x > 0, g(x) = e^{-1/\sqrt{x}} \end{cases}$ est continue en 0.

$\hookrightarrow g$ est définie en 0 et $g(0) = 0$. g est définie à droite de 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} -1/\sqrt{x} = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g admet $g(0) = 0$ pour limite en 0, donc est continue en 0.

Définition 78.

On dit que la fonction f est **continue à gauche en a** (respectivement **continue à droite en a**) lorsqu'elle admet une limite à gauche en a vérifiant $\lim_{a^-} f = f(a)$ (respectivement lorsqu'elle admet une limite à droite en a vérifiant $\lim_{a^+} f = f(a)$).

Exemple 79. Soit $m \in \mathbf{Z}$. La fonction partie entière est continue à droite en m mais n'est pas continue à gauche en ce point.

En effet, pour tout $x \in]m, m+1[$, $[x] = m$, donc $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$. Comme $[m] = m$, on en déduit que E est continue à droite en m .

$\forall x \in]m-1, m[$, $[x] = m-1$, donc $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m-1 \neq [m]$. Donc $[\cdot]$ n'est pas continue à droite en m .

Proposition 80.

La fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a .

Exercice d'application 81. On pose $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x + (x - [x])^2$. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Étudier la continuité de f en m .

$\hookrightarrow f(m) = m + (m - m)^2 = m$.

Pour tout $x \in]m, m+1[$, on a $f(x) = x + (x - m)^2$. On a donc $\lim_{x \rightarrow m^+} f(x) = m = f(m)$ et f est continue à droite en m .

Pour tout $x \in]m-1, m[$, on a $f(x) = x + (x - (m-1))^2$. On a donc $\lim_{x \rightarrow m^-} f(x) = m+1 \neq f(m)$ et f n'est pas continue à droite en m .

f n'est pas continue à droite en m donc f n'est pas continue en m

En faisant le lien entre les notions de limites à gauche et à droite, et la notion de limite, on obtient le résultat suivant.

Proposition 82.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite.

6.2. Prolongement par continuité**Définition 83.**

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est prolongeable par continuité au point a s'il existe une fonction $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ telle que $g|_{I \setminus \{a\}} = f$ et g est continue en a . On dit alors que g est un **prolongement par continuité** de f .

Exemple 84. Considérons

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^* &\longrightarrow \mathbf{R} & \text{et} & & g: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{x} & & & x &\longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

g est un prolongement de f par construction. Il reste à voir que g est continue en 0.

On sait que $\sin \sim x$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. De même, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$, et $g(0) = 1$. Ainsi g est continue en 0.

Théorème 85.

Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a . Le cas échéant, ce prolongement par continuité est unique et est défini par :

$$\begin{aligned} g: I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_a f & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. • Supposons f prolongeable par continuité en a . Soit g un prolongement par continuité de f en a . g est continue en a , donc admet une limite finie en a : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

Pour $x > a$, $g(x) = f(x)$, donc f est une limite finie à droite en a . De même, f admet une limite finie à gauche en a , et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

f a donc une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$. Donc

$$\begin{aligned} g: I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_a f & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

On vient de montrer que si g existe, elle est unique (et définie comme avant).

• Réciproquement, supposons que f a une limite finie en a . Considérons

$$\begin{aligned} g: I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_a f & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Alors g est un prolongement de f . De plus, g est continue en a . Donc f est prolongeable par continuité. $\square$

Exercice d'application 86. Montrer qu'on peut prolonger la fonction $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ par continuité en 0.

$$x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$$

$\hookrightarrow \forall x > 0, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, f admet 0 pour limite à droite en 0.

$\mathbf{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(-x) = (-x)^2 \sin(1/(-x)) = -x^2 \sin(1/x) = -f(x)$. Donc f est impaire, d'où l'on déduit que f admet 0 pour limite à gauche en 0.

Donc f n'est pas définie en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^-} = 0$, donc f peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Exercice d'application 87. La fonction $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

$$x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$\hookrightarrow$ On a $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ donc, par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Ainsi f a une limite finie en 0. Donc f est prolongeable par continuité en 0, et ce prolongement est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6.3. Opérations

Proposition 88.

Soit f et g deux fonctions définies sur I , à valeur dans $\mathbf{R}$ et continues en a . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. $f + g$ est continue en a .
2. λf est continue en a .
3. $f \times g$ est continue en a .
4. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a .

Démonstration.

Ces résultats proviennent directement des résultats sur les opérations de limites.

1. Par continuité de f en a , on sait que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$. De même, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. On en déduit que $f + g$ converge en a avec $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$, ce qui entraîne que $f + g$ est continue en a . $\square$

Proposition 89.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{F}(I, R)$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbf{R})$. On suppose que $f(I) \subset J$.

Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration.

Puisque f est continue en a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. De même, $\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a))$. Ainsi, par composition de limite, $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a))$ et par conséquent $g \circ f$ est continue en a . $\square$

6.4. Image d'une suite convergente

Proposition 90.

Si la fonction f est continue en a , alors pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers a ,

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a).$$

Démonstration.

C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la limite. $\square$

Remarque technique 91. La contraposée de ce résultat permet de justifier la discontinuité d'une fonction en un point a . Il suffit de trouver une suite (u_n) tendant vers a telles que la suite $(f(u_n))$ ne tende pas vers $f(a)$.

Exercice d'application 92. Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \sin(1/x) \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

$\hookrightarrow$ Pour tout n entier naturel non-nul, on pose $u_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$. Alors la suite u ainsi définie tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = \sin(1/u_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$.

Donc la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. Or $f(0) = 0$ donc par la contraposée de la Proposition 90 f n'est pas continue en 0.

Corollaire 93.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur le $[a; b]$. On suppose que $[a; b]$ est stable par f (i.e. $f([a; b]) \subset [a; b]$). On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un élément ℓ de $[a; b]$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$, autrement dit, ℓ est un point fixe de la fonction f sur $[a; b]$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : « u_n est bien défini et $u_n \in [a, b]$ ».

u_0 est fixé dans $[a; b]$, donc P_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Alors $u_n \in [a; b]$, donc $f(u_n)$ a un sens et u_{n+1} est bien défini. Comme $f([a; b]) \subset [a; b]$, $u_{n+1} \in [a; b]$. Donc P_{n+1} est vraie. D'où P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Comme la suite u est minorée par a et majorée par b , sa limite est dans $[a; b]$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers une limite ℓ , $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ en tant que suite-extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. D'après la proposition précédente, $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$, donc $f(\ell) = \ell$. $\square$

7. Fonctions continues sur un intervalle

7.1. Ensemble des fonctions continues sur I

Définition 94.

On dit que f est **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I . On note $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Exemple 95. • Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbf{R}$. Plus généralement, une fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.

- Pour tout $m \in \mathbf{Z}_+$, la fonction $x \mapsto x^m$ est continue sur $\mathbf{R}^*$. En particulier, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$.
- $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbf{R}$. $\tan$ est continue sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ où $k \in \mathbf{Z}$.
- $\exp$ est continue sur $\mathbf{R}$.
- $\ln$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Proposition 96.

Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}(I, \mathbf{R}))^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .

Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Démonstration.

C'est une conséquence directe de la continuité ponctuelle. □

Proposition 97.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbf{R})$. On suppose que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$.

Démonstration.

C'est une conséquence directe de la proposition sur la continuité ponctuelle d'une composée de fonctions. □

Exemple 98. Si f est continue sur I , alors $|f|$ est continue sur I .

7.2. Image d'un intervalle

Théorème 99 - Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I . On suppose qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $a \leq b$ et $f(a)f(b) \leq 0$ (c'est-à-dire tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Il existe alors un élément $c \in [a; b]$ vérifiant $f(c) = 0$.

Démonstration (procédé de dichotomie).

On se place dans le cas où $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.

On va construire par récurrence deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ de telle façon qu'elle soient adjacentes et convergentes vers le c de l'énoncé. Plus précisément, on va les construire de telle sorte que :

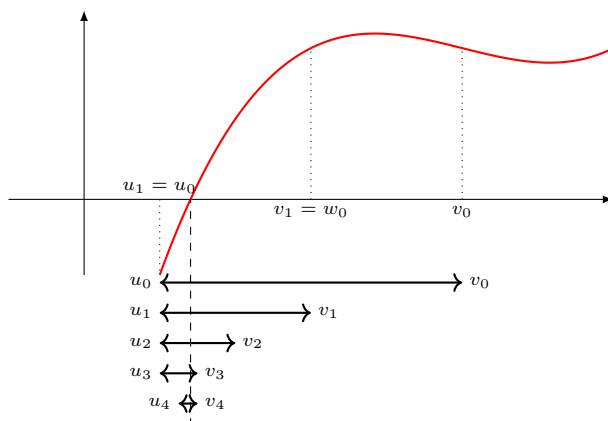
1. $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit croissante.
2. $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_n) \leq 0$ et $f(v_n) \geq 0$.

Pour tout n , on pose P_n : "Les suites u et v sont bien définies jusqu'au rang n et vérifient les 4 propriétés ci-dessus jusqu'à ce rang".

Initialisation : On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Alors on a bien $f(u_0) \leq 0$, $f(v_0) \geq 0$ et $v_0 - u_0 = b - a$. Donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose P_n , c'est à dire que les suites u et v sont construites jusqu'au rang n .

On pose $w_n = \frac{u_n + v_n}{2}$, qui est donc le milieu du segment $[u_n, v_n]$.



- Si $f(w_n) \leq 0$, on pose $u_{n+1} = w_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
Alors $u_{n+1} \geq u_n$, $v_{n+1} \leq v_n$, $f(u_{n+1}) = f(w_n) \leq 0$, $f(v_{n+1}) = f(v_n) \geq 0$ et

$$v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + v_n) = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

- Si $f(w_n) > 0$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = w_n$.
Alors $u_{n+1} \geq u_n$, $v_{n+1} \leq v_n$, $f(u_{n+1}) = f(u_n) \leq 0$, $f(v_{n+1}) = f(w_n) \geq 0$ et

$$v_{n+1} - u_{n+1} = w_n - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Dans les deux cas, on a bien défini u_{n+1} et v_{n+1} tels que les 4 propriétés soient vérifiées jusqu'au rang $n+1$. Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$. u est croissante, v est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$, donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers une limite commune $c \in [u_0, v_0] = [a, b]$.

f étant continue sur $[a, b]$, elle est continue en c . Ainsi, d'après la Proposition 90, $f(u_n) \rightarrow f(c)$ et $f(v_n) \rightarrow f(c)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f(u_n) \leq 0$ et $f(v_n) \geq 0$ donc, par passage à la limite, $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$. Donc $f(c) = 0$.

Dans le cas où $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$, on applique cette preuve à $-f$. □

⚠ Attention ⚠. Le théorème des valeurs intermédiaires **ne donne pas l'unicité** du point d'annulation de la fonction.

Pour obtenir l'unicité, on utilise le théorème de la bijection (et il faut donc montrer la stricte monotonie en plus de la continuité). Voir Théorème 107.

Les hypothèses « I est un intervalle » et « f est continue sur I » sont essentielles.

Exemple 100. • $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$, $f(-1) < 0$ et $f(1) > 0$, mais f ne s'annule pas sur $] -1; 0[\cup]0; 1[$.

- La fonction $f : [0; 2] \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie sur un segment avec $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ et

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
 pourtant cette fonction ne s'annule pas.

La contraposée de ce théorème fournit également un énoncé remarquable.

Corollaire 101.

Si une fonction continue sur un intervalle ne s'y annule pas, alors elle y garde un signe constant.

Corollaire 102 - Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I tels que $a \leq b$.
 Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration.

Soit y réel entre $f(a)$ et $f(b)$. On pose $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors g est continue sur I .

$$x \longmapsto f(x) - y$$

Comme y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(a) - y$ et $f(b) - y$ sont de signes opposés. Donc $g(a)g(b) \leq 0$. Alors, d'après le Théorème 99, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = y$. $\square$

Exercice d'application 103. Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

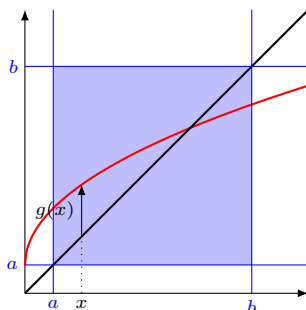
$\hookrightarrow$ Soit n un entier impair, $a_n \in \mathbf{R}^*$ et $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

f est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$ et $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n$. Donc f est du signe de a_n au voisinage de $+\infty$ et du signe de $-a_n$ au voisinage de $-\infty$. Il existe donc $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(A)f(B) \leq 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f(c) = 0$, d'où le résultat.

Exercice d'application 104. Soit $f : [a; b] \longrightarrow [a; b]$ une fonction continue.

Montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = c$.

$\hookrightarrow$



On pose $g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors g est continue sur $[a, b]$. $g(a) = a - f(a) \leq 0$ car $f(a) \in [a, b]$. De même,

$$x \longmapsto x - f(x)$$
 $g(b) = b - f(b) \geq 0$ car $f(b) \in [a, b]$. Donc $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = c$.

Une conséquence topologique du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 105.

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Démonstration.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur I .

Soient z_1 et z_2 dans $f(I)$ tels que $z_1 \leq z_2$. Par définition de $f(I)$, il existe y_1 et y_2 dans I tels que $f(y_1) = z_1$ et $f(y_2) = z_2$.

Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $z_1 \leq x \leq z_2$, cela signifie que x est compris entre $f(y_1)$ et $f(y_2)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $w \in I$ tel que $f(w) = x$. Donc $x \in f(I)$.

Ainsi, on a montré que pour tout z_1 et z_2 de $f(I)$, on a $\{x \in \mathbf{R}, | z_1 \leq x \leq z_2\} \subset f(I)$. Donc $f(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$. $\square$

On peut se demander si le type d'un intervalle (c'est-à-dire fermé, borné, semi-ouvert, ...) est conservé par une application continue. Nous allons voir que la réponse est positive dans le cas d'un segment. Par contre, pour les huit autres types d'intervalles, sans autre hypothèse que la continuité, le type d'intervalle n'est pas conservé.

7.3. Image d'un segment par une fonction continue**Théorème 106.**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{R})$. Alors $f([a; b])$ est un segment : f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes.

Autrement dit,

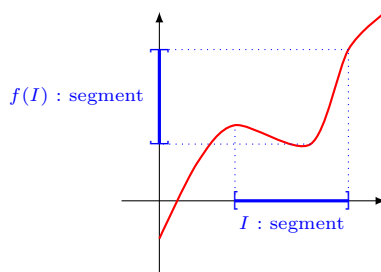
$$\exists c_1 \in [a; b], \quad f(c_1) = \inf_{[a; b]} f = \min_{[a; b]} f \quad \text{et} \quad \exists c_2 \in [a; b], \quad f(c_2) = \sup_{[a; b]} f = \max_{[a; b]} f.$$

et

$$f([a; b]) = \left[\min_{[a; b]} f; \max_{[a; b]} f \right].$$

Démonstration.

Admis. $\square$



L'hypothèse « $[a; b]$ est un segment » est essentielle. Prenons

$$f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x}$$

On a $f \in \mathcal{C}([1; +\infty[)$ et pour tout $x \geq 1$, $0 < \frac{1}{x} \leq 1$. Ainsi f est bien bornée, mais elle n'a pas de minimum.

7.4. Théorème de la bijection

Théorème 107 - Théorème de la bijection.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors

- (i) $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .
- (ii) f réalise une bijection de I sur $f(I)$: la fonction $\tilde{f} : \begin{matrix} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{matrix}$ est une bijection.
- (iii) La bijection réciproque $\tilde{f}^{-1}$ de $\tilde{f}$ est continue sur $f(I)$ et $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f .

Démonstration.

Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante.

- (i) $f(I)$ est un intervalle d'après le Corollaire 105. On a montré dans le chapitre précédent que les bornes supérieures et inférieures de cet intervalle sont justement les limites de f aux bornes de I .
- (ii) La fonction $\tilde{f}$ est surjective par définition. Montrons qu'elle est injective. Soient x et x' dans I tels que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x')$. La fonction f étant strictement croissante, $\tilde{f}$ l'est aussi. Si $x > x'$, alors $\tilde{f}(x) > \tilde{f}(x')$ par stricte croissance. Si $x < x'$, alors $\tilde{f}(x) < \tilde{f}(x')$. Ces deux possibilités sont absurdes, donc $x = x'$.
 $\tilde{f}$ est bien injective, donc elle est bijective.

- (iii) • Montrons que $\tilde{f}^{-1}$ est strictement croissante. Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. On pose $x_1 = \tilde{f}^{-1}(y_1)$ et $x_2 = \tilde{f}^{-1}(y_2)$. Si $x_1 \geq x_2$, alors par croissance de $\tilde{f}$, on a $y_1 \geq y_2$. C'est absurde. Donc $x_1 < x_2$. C'est à dire $\tilde{f}^{-1}(y_1) < \tilde{f}^{-1}(y_2)$. Donc $\tilde{f}^{-1}$ est strictement croissante.

• Soit $y_0 \in f(I)$. Montrons que $\tilde{f}$ est continue en y_0 . On note $x_0 = \tilde{f}^{-1}(y_0)$.

Soit $\epsilon > 0$.

- Si x_0 n'est pas une extrémité de I : On pose $\epsilon' \in]0, \epsilon]$ tel que $[x_0 - \epsilon', x_0 + \epsilon'] \subset I$. Un tel ϵ' existe car I est un intervalle dont x_0 n'est pas une extrémité. On pose $x_1 = x_0 - \epsilon'$, $x_2 = x_0 + \epsilon'$, $y_1 = \tilde{f}(x_1)$, $y_2 = \tilde{f}(x_2)$. Alors, par stricte croissance de $\tilde{f}$, on a $\tilde{f}(x_1) < \tilde{f}(x_0) = y < \tilde{f}(x_2)$. On pose $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$. On a bien $\eta > 0$.

Pour tout $y \in f(I)$, si $|y - y_0| \leq \eta$, alors $y \in [y_1, y_2]$. Donc, par stricte croissance de $\tilde{f}^{-1}$, $\tilde{f}^{-1}(y_1) < \tilde{f}^{-1}(y) < \tilde{f}^{-1}(y_2)$, c'est à dire $x_1 < \tilde{f}^{-1}(y) < x_2$ et donc $\tilde{f}^{-1}(y_0) - \epsilon' < \tilde{f}^{-1}(y) < \tilde{f}^{-1}(y_0) + \epsilon'$. D'où

$$|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y_0)| \leq \epsilon' \leq \epsilon.$$

- Si x_0 est une extrémité de I . Supposons que x_0 est la plus petite extrémité de I . Alors y_0 est la plus petite valeur prise par $\tilde{f}$. (Le cas où x_0 est la plus grande extrémité est similaire)

On pose $\epsilon' \in]0, \epsilon]$ tel que $[x_0, x_0 + \epsilon'] \subset I$. Un tel ϵ' existe car x_0 est l'extrémité gauche de I . On pose $x_2 = x_0 + \epsilon'$, $y_2 = \tilde{f}(x_2)$.

Alors, par stricte croissance de $\tilde{f}$, on a $y = \tilde{f}(x_0) < \tilde{f}(x_2)$. On pose $\eta = y_2 - y$. On a bien $\eta > 0$.

Pour tout $y \in f(I)$, si $|y - y_0| \leq \eta$, alors $y \in [y_0, y_2]$. Donc, par stricte croissance de $\tilde{f}^{-1}$, $\tilde{f}^{-1}(y_0) < \tilde{f}^{-1}(y) < \tilde{f}^{-1}(y_2)$, c'est à dire $x_0 < \tilde{f}^{-1}(y) < x_2$ et donc $\tilde{f}^{-1}(y_0) < \tilde{f}^{-1}(y) < \tilde{f}^{-1}(y_0) + \epsilon'$. D'où

$$|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y_0)| \leq \epsilon' \leq \epsilon.$$

Dans tous les cas, on a montré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in f(I), |y - y_0| \leq \eta \Rightarrow |\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y_0)| \leq \epsilon.$$

Donc $\tilde{f}^{-1}$ est continue en y_0 . Cela est vrai pour tout $y_0 \in f(I)$, donc $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

□

Exercice d'application 108. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, on note $f(\alpha)$ l'unique solution sur $\mathbf{R}^*$ de l'équation d'inconnue réelle x

$$(E) \quad \alpha x^3 + \alpha x - 1 = 0$$

Montrer que f est bien définie et donner ses variations.

$\hookrightarrow$ On pose $g : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$. Alors $\alpha x^3 + \alpha x - 1 = 0$ si et seulement si $g(x) = \alpha$. g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g'(x) = -\frac{3x^2 + 1}{(x^3 + x)^2} < 0$.

Donc g' est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}_+^*$. La fonction f est la bijection réciproque de g donc est bien définie et est strictement croissante.

8. Fonctions à valeurs complexes

8.1. Limite d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

On peut étendre aux fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ toutes les propriétés des fonctions réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ (il ne sera plus question de fonction croissante, décroissante, majorée, minorée). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 109.

Soit I une partie de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.

On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbf{C}$ en $a \in \mathbf{R}$ lorsqu'elle est définie au voisinage de a et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad \underbrace{(|t - a| \leq \eta)}_{\text{val. abs.}} \implies \underbrace{(|f(t) - \ell| \leq \varepsilon)}_{\text{module}}.$$

On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbf{C}$ en $+\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $+\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in I, \quad (t \geq A) \implies (|f(t) - \ell| \leq \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbf{C}$ en $-\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $-\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in I, \quad (t \leq A) \implies (|f(t) - \ell| \leq \varepsilon).$$

On peut synthétiser :

Définition 110.

Soit $\ell \in \mathbf{C}$, $a \in I \cup \{\inf I, \sup I\}$. On dit que f a pour limite ℓ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad \forall x \in I, \quad x \in V \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Comme dans le cas réel, la limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

Pour les fonctions à valeurs complexes, seules les limites finies ont un sens. Une fonction à valeur dans $\mathbf{C}$ ne peut pas admettre $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Les résultats suivants restent valables.

Proposition 111.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1. Une fonction à valeurs complexes qui admet une limite en a est bornée au voisinage de a (cela signifie que son module $|f|$ est une fonction réelle majorée au voisinage de a).
2. Si f et g sont deux fonctions à valeurs complexes qui possèdent une limite en a , alors
 - la somme $f + g$ possède une limite en a et $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$,
 - le produit fg possède une limite en a et $\lim_a (fg) = \lim_a f \times \lim_a g$,
 - si $\lim_a g \neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est défini au voisinage de a , possède une limite en a et $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$.

Le théorème suivant est fondamental. Il établit que l'existence d'une limite pour une fonction complexe équivaut à l'existence d'une limite pour sa partie réelle et pour sa partie imaginaire.

Théorème 112.

Une fonction complexe f tend vers $\ell \in \mathbf{C}$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$ si, et seulement si, les fonctions à valeurs réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$ admettent respectivement $\Re(\ell)$ et $\Im(\ell)$ pour limite en a .

Démonstration.

Si les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ tendent respectivement vers les réels α et β en a , alors la somme $f = \Re(f) + i\Im(f)$ tend vers $\ell = \alpha + i\beta$ en a , d'après la proposition précédente.

Supposons réciproquement qu'une fonction f , définie sur une partie I de $\mathbf{R}$, tend vers $\ell = \alpha + i\beta$ en a , où α et β sont deux réels.

(on fait la démonstration lorsque $a \in I$ est un nombre réel. On l'adaptera facilement aux cas où $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.)

Soit $\varepsilon > 0$. Le fait que f tend vers ℓ en a assure qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on a :

$$\forall t \in I \cap]a - \eta, a + \eta[, |f(t) - \ell| = |(\Re(f)(t) - \alpha) + i(\Im(f)(t) - \beta)| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[$,

$$|\Re(f)(t) - \alpha| \leq |(\Re(f)(t) - \alpha) + i(\Im(f)(t) - \beta)| \leq \varepsilon$$

et

$$|\Im(f)(t) - \beta| \leq |(\Re(f)(t) - \alpha) + i(\Im(f)(t) - \beta)| \leq \varepsilon.$$

On a donc démontré que $\Re(f)$ et $\Im(f)$ tendent respectivement vers α et β en a . □

8.2. Continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

Définition 113.

Soit I une partie de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.

- On dit que f est **continue en** $a \in I$ si et seulement si f tend vers $f(a)$ en a .
- On dit que f est **continue sur** I si et seulement si f est continue en tout point de I .

Proposition 114.

Soit I une partie de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.

La fonction f est continue en $a \in I$ (respectivement sur I) si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues en $a \in I$ (respectivement sur I).

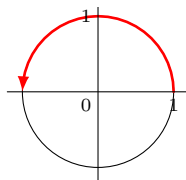
La somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), de deux fonctions à valeurs complexes continues sur I est continue sur I .

Le théorème des valeurs intermédiaires, et le théorème de la bijection faisant appel aux propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, ils n'existent pas pour les fonctions à valeurs complexes.

Exemple 115. La fonction $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}$ est continue.
$$x \longmapsto e^{ix}$$

On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$, mais f ne s'annule jamais !

Le théorème des valeurs intermédiaires ne peut pas s'appliquer ici.



8.3. Notion de fonctions bornées

Définition 116.

Soit $a \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$. On dit que f est **bornée** au voisinage de a lorsque

$$\exists A \in \mathbf{R}, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I, \quad x \in V \implies |f(x)| \leq A.$$

Proposition 117.

Si f admet une limite au voisinage de a , alors f est bornée au voisinage de a .

8.4. Relations de comparaisons

Les notions de fonctions négligeables, dominées, équivalentes s'étendent aux fonctions à valeurs complexes (excepté les notions en lien avec la positivité).