

Chapitre 13

Dérivabilité

JE me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivée.

Charles Hermite ¹

Dans ce cours, I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ non vides et non réduits à un point.

1. Fonctions dérivables

1.1. Dérivabilité en un point

Définition 1.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I . La fonction f est dite **dérivable en a** si, et seulement si, la fonction τ_a , appelée **taux d'accroissement de f en a** et définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a . Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** , et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. Autrement dit, si les limites ci-dessous existent,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 2. Considérons la fonction $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit $a \in \mathbf{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{a\}$,

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

1. Charles HERMITE, mathématicien français (1822-1901)

Si $a > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$, $\tau_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice d'application 3. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = 0.$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

$$\hookrightarrow \text{Pour tout } x \in \mathbf{R}^*, \quad \tau_0^f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin(1/x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbf{R}^*, \quad \tau_0^g(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $-x \leq \tau_0^g(x) \leq x$. D'après le théorème des gendarmes, $\tau_0^g(x)$ converge vers 0 en 0 donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

1.2. Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- On suppose que f est dérivable en a .

Posons $\varepsilon : I \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La fonction ε vérifie $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ (limite à gauche = limite à droite = valeur au point) et l'on peut écrire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

- Supposons réciproquement qu'il existe une fonction ε définie sur I et un nombre réel α tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$$

donc f est dérivable en a et le nombre dérivé de f en a vaut α .

Proposition 4.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I . La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, il existe un réel α et une fonction ε définie sur I tels que

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, α est nécessairement égal à $f'(a)$ et l'on dit que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a .

Exemple 5. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$ donc on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exp(x) = 1 + x + x\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1.3. Dérivabilité et continuité

Proposition 6.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I .
Si f est dérivable en a **alors** f est continue en a .

Démonstration.

Supposons que f est dérivable en a . Alors, d'après la Proposition 4, il existe une fonction ε définie sur I et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $\lim_a \varepsilon = 0$ et pour tout x dans I , $f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$.

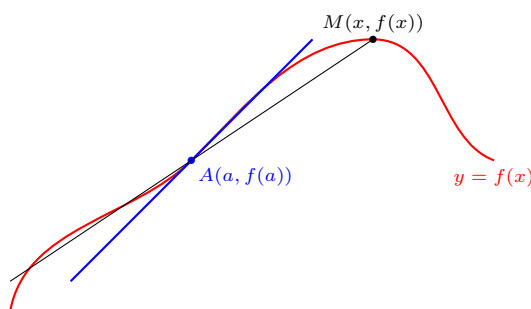
Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a . □

⚠ Attention ⚠. La réciproque de ce résultat est **FAUSSE**. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Alors $\tau_0(x) = \frac{|x|}{x}$. Donc $\tau_0(x) = 1$ si $x > 0$ et $\tau_0(x) = -1$ si $x < 0$, ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = -1$.

Donc $x \mapsto \tau_0(x)$ a une limite à gauche différente de sa limite à droite donc n'admet pas de limite en 0. Donc $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

1.4. Interprétation graphique



Pour tout $x \in I$, la valeur $\tau_a(x)$ représente la pente de la sécante joignant les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ de la courbe représentative de f .

Si f est dérivable, cette sécante a une position limite, que l'on appelle **tangente** à la courbe en A . Le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de cette tangente.

Proposition 7.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I .

- Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f possède une tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$ et une équation cartésienne de celle-ci est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{smallmatrix} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{smallmatrix}$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{smallmatrix} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{smallmatrix}$, la fonction f n'est pas dérivable en a mais la tangente à la courbe en a existe et cette tangente est verticale.

Remarque 8. On peut démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est la meilleure approximation de f au voisinage de a par une fonction affine.

1.5. Fonction dérivée

Définition 9.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I . Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur I** et la fonction $I \rightarrow \mathbf{R}$
 $x \mapsto f'(x)$

est appelée la **fonction dérivée** de f , et se note f' , Df ou $\frac{df}{dx}$.

Proposition 10.

Si f est une fonction dérivable sur I alors elle est continue sur I .

⚠ **Attention** ⚠. La réciproque est **FAUSSE**. Une fonction continue sur un intervalle n'est pas nécessairement dérivable sur cet intervalle.

1.6. Dérivée à droite et à gauche en un point

Définition 11.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I .

- Si f est définie à droite de a , on dit que f est **dérivable à droite** en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à droite en a . Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé à droite** de f en a et se note $f'_d(a)$. Autrement dit, si les limites suivantes existent et sont finies,

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Si f est définie à gauche de a , on dit que f est **dérivable à gauche** en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à gauche en a . Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé à gauche** de f en a et se note $f'_g(a)$. Autrement dit, si les limites suivantes existent et sont finies,

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 12. La fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Par contre, elle est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. (cf calcul précédent).

Remarque 13. La courbe représentative d'une fonction f qui admet une dérivée à gauche (resp. à droite) en a possède une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a . Son équation est $y = f(a) + f'_g(a)(x - a)$ (resp. $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$).

Si la fonction τ_a tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ à gauche (resp. à droite) en a , alors la courbe de la fonction f possède une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a .

Proposition 14.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I . Lorsque a n'est pas une extrémité de I , la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a et vérifie $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration.

Comme la fonction τ_a n'est pas définie en a , et comme a n'est pas une extrémité de I , celle-ci admet une limite en a si, et seulement si, elle possède une limite à droite et à gauche en a qui sont égales. $\square$

Exercice d'application 15. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

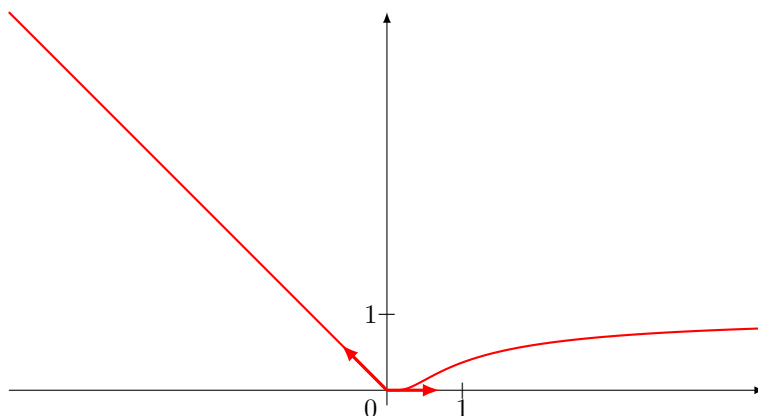
$\hookrightarrow$ Notons τ_0 le taux d'accroissement de f en 0. On a, pour tout $x < 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{e^{-1/x} - 0}{x - 0}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau_0(x) = 0$ par croissances comparées, ce qui signifie que f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 0$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

donc en particulier f est dérivable à gauche en 0, avec $f'_g(0) = -1$.



Puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

Corollaire 16.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I .

Si a n'est pas une extrémité de I alors si f est

- dérivable à droite en a alors f est continue à droite en a .
- dérivable à gauche en a alors f est continue à gauche en a .
- dérivable à droite et à gauche en a alors f est continue en a .

Remarque 17. Dans le troisième point du corollaire précédent, il n'est pas nécessaire que la dérivée à gauche et à droite de f en a soient égales.

2. Opérations sur les dérivées

2.1. Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Proposition 18.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point de I .

1. Si f et g sont dérivables en a alors $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. Si f et g sont dérivables en a alors fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. Si g est dérivable en a et si $g(a) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que g ne s'annule pas sur $I \cap J$, la fonction $\frac{1}{g}$ bien définie sur $I \cap J$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Si de plus f est dérivable en a , alors la fonction $\frac{f}{g}$ bien définie sur $I \cap J$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Démonstration. 1. Si f et g sont dérivables en a : Alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$, on en déduit que $x \mapsto \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a}$ converge vers $f'(a) + g'(a)$ en a . Donc $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2. Si f et g sont dérivables en a : Alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}. \end{aligned}$$

Comme g est dérivable en a , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$. De plus, elle est continue en a donc

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a). \quad f \text{ étant dérivable en } a \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a}$ converge en a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.
Donc fg est dérivable et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.

3. Si g est dérivable en a et $g(a) \neq 0$. g ne s'annule pas sur $I \cap J$. Alors pour tout $x \in I \cap J$, on a

$$\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right) - \left(\frac{1}{g(a)}\right)}{x-a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{-(g(x) - g(a))}{x-a}.$$

Par continuité de g en a , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} = \frac{1}{g(a)^2}$ et par dérivabilité de g en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$.

Donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right) - \left(\frac{1}{g(a)}\right)}{x-a} = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$. Ainsi, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

Si f est également dérivable en a , alors d'après le point 2, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f(a) \frac{-g'(a)}{g(a)^2} + f'(a) \left(\frac{1}{g(a)}\right) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Donc $\frac{f}{g}$ est bien dérivable en a et sa dérivée en a est bien $\frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

□

Corollaire 19.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a , alors pour tous réels λ et μ , l'application $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

Remarque 20. En particulier, il ne faut pas utiliser la formule de dérivation du produit pour dériver une fonction de la forme λf où λ est une constante !!!! (Un chaton meurt à chaque fois que quelqu'un le fait).

Proposition 21.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

1. Si f et g sont dérivables sur I alors $f + g$ est dérivable sur I et

$$(f + g)' = f' + g'.$$

2. Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. Si g est dérivable sur I et si g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{1}{g}$ correctement définie sur I est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

4. Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$, correctement définie sur I , est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Corollaire 22.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Si f et g sont dérivables sur I , alors pour tous réels λ et μ , l'application $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

2.2. Dérivée d'une fonction composée**Proposition 23.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Soit a un point de I .

1. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

2. Si f et g sont respectivement dérivables sur I et $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).$$

Démonstration.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Comme f est dérivable en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$, on a

$\lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a))$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a))f'(a).$$

Donc $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. □

2.3. Dérivée de la bijection réciproque d'une bijection

Proposition 24.

Soit f une bijection **continue** strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J . Soit b un point de J . On pose $a = f^{-1}(b)$.

1. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b , mais sa représentation graphique présente une tangente verticale au point de coordonnées $(b, f^{-1}(b))$.

2. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration.

Soit $x \in J \setminus \{b\}$. On a, en posant $y = f^{-1}(x)$,

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \frac{y - a}{f(y) - f(a)}.$$

D'après le théorème de la bijection, $f^{-1}(x)$ tend vers a quand x tend vers b . Comme f est dérivable en a , on a $\lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(a)$.

• Si $f'(a) \neq 0$, alors $\lim_{y \rightarrow a} \frac{y - a}{f(y) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$, donc $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \frac{1}{f'(a)}$. Ainsi, f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

• Si $f'(a) = 0$, alors $\lim_{y \rightarrow a} \frac{y - a}{f(y) - f(a)} = +\infty$. Donc f^{-1} n'est pas dérivable en b et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(b, f^{-1}(b))$.

Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier à tous les points de I . □

Remarque 25. Ce résultat s'interprète de manière graphique : puisque les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice il en va de même pour leurs tangentes. Les pentes de ces tangentes sont donc inverses l'une de l'autre.

3. Dérivées successives

3.1. Définition

Définition 26.

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I , sa dérivée f' peut elle-même être dérivable sur I . On appelle alors **dérivée seconde** de f la dérivée de f' et on la note f'' . On dit alors que f est deux fois dérivable sur I .

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si f est n fois dérivable sur I , on note $f^{(n)}$ sa dérivée n -ième. Par convention, $f^{(0)}$ désigne la fonction f . Autrement dit, les dérivées successives de f sont définies par récurrence par

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

La dérivée n -ième de f est aussi notée $D^n f$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Définition 27.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur I si f est n fois dérivable sur I **et si sa dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue sur I .**

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.

Par convention, l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur I est aussi noté $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I si f possède des dérivées de tous ordres sur I . Une telle fonction est dite indéfiniment dérivable.

L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$.

Remarque 28. 1. Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont dites *continûment dérivables*.

2. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R}) \subset \dots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R}) \subset \dots \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$.

Exemple 29. Les polynômes, les fonctions cos, sin, exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Exercice d'application 30. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $\forall x \in \mathbf{R}^*, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$.

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?

$\hookrightarrow$ On a déjà vu que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité, f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

f' est donc continue sur $\mathbf{R}^*$ d'après les résultats généraux sur la continuité.

On a vu que $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue en 0. En revanche, $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. En effet, $\frac{1}{x} \rightarrow_{x \rightarrow 0} +\infty$ et cos n'a pas de limite en $+\infty$ (ce qu'on peut voir avec la relation entre suite et limite).

Donc f' n'est pas continue en 0 et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

3.2. Opérations sur les dérivées n -ièmes

Proposition 31.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors la fonction $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

Démonstration.

Par récurrence sur le premier point de la Proposition 21. □

Théorème 32 - Formule de Leibniz.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I , alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration.

Fixons f et g deux fonctions définies sur I . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note (P_n) la proposition : «si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

- Supposons que f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$ sur I , c'est-à-dire continues sur I . On a vu au chapitre précédent que la fonction $f.g$ est continue sur I et la formule de Leibniz est vraie (dans la somme n'apparaît que le terme $f.g$). Donc (P_0) est vraie.
- Fixons $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la propriété (P_n) est vraie.
Supposons que f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Puisque $\mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$, ces deux fonctions sont aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I donc fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et l'on a $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
Ainsi, $(f.g)^{(n)}$ est continuellement dérivable (comme somme de produits de fonctions continuellement

dérivables sur I) donc $f.g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ et

$$\begin{aligned}
 (f.g)^{(n+1)} &= ((f.g)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
 &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
 &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} f^{(\ell)} g^{(n-\ell+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
 &\quad \left(\text{changement d'indice dans la première somme } \ell = k+1 \text{ qu'on note à nouveau } k \text{ ensuite (indice muet)} \right)
 \end{aligned}$$

[changement d'indice dans la première somme $\ell = k+1$ qu'on note à nouveau k ensuite (indice muet)]

$$\begin{aligned}
 (f.g)^{(n+1)} &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
 &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
 &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \quad (\text{formule de Pascal}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
 \end{aligned}$$

La proposition (P_{n+1}) est donc vraie. Par récurrence, la proposition est démontrée.

□

Proposition 33.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I , g ne s'annulant pas sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Démonstration.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n : "Si g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et ne s'annule pas, alors g est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ". Montrons P_n par récurrence.

- Initialisation : C'est le résultat sur la continuité de $\frac{1}{g}$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Soit g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$. g^2 ne s'annule pas et est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . g' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Donc $\left(\frac{1}{g}\right)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $\frac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Donc P_{n+1} est vraie.

Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, si g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et ne s'annule pas alors $\frac{1}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

On applique alors le théorème de Leibniz à f et $\frac{1}{g}$. □

Proposition 34.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f et g deux fonctions respectivement définies sur les intervalles I et J telles que $f(I) \subset J$, et de classe $\mathcal{C}^n$ sur ces intervalles. La fonction $g \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Démonstration.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n : "Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et J (respectivement), alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ". Montrons P_n par récurrence sur n .

- Initialisation : P_0 s'obtient par les résultats sur la continuité des composés.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Soient f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, respectivement sur I et J . Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g'(f)f'$. g' et f' sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et I respectivement. D'après P_n $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ d'après la proposition précédente.

On en déduit que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Donc P_{n+1} est vraie.

D'où le résultat par récurrence. □

Proposition 35.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I . La bijection réciproque f^{-1} de f est également de classe $\mathcal{C}^n$ sur J .

Démonstration.

Soit f une bijection dérivable de I dans J tel que f' ne s'annule pas.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, P_n : "Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J ". Montrons P_n par récurrence sur n .

- Initialisation : P_1 est la Proposition 24 combinée aux résultats sur la continuité des composées et inverses.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I . La bijection réciproque f^{-1} de f est alors de classe $\mathcal{C}^n$ sur J par hypothèse de récurrence. Donc $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ d'après la proposition précédente et ne s'annule pas donc $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur J d'après la Proposition 33. □

Corollaire 36.

Les sommes, produits, composées, quotients de fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

Exercice d'application 37. La fonction $h : x \mapsto x^6 \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Calculer sa dérivée septième.

$\hookrightarrow$ On pose $f : x \mapsto x^6$ et $g : x \mapsto \exp(x)$ définies sur $\mathbf{R}$. Alors $h = fg$ et d'après le théorème de Leibniz, on a

$$h^{(7)} = f^{(0)}g^{(7)} + 7f^{(1)}g^{(6)} + 21f^{(2)}g^{(5)} + 35f^{(3)}g^{(4)} + 35f^{(4)}g^{(3)} + 21f^{(5)}g^{(2)} + 7f^{(6)}g^{(1)} + f^{(7)}g^{(0)}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} h^{(7)}(x) &= (x^6 + 7 \times 5x^5 + 21 \times 30x^4 + 35 \times 120x^3 + 35 \times 360x^2 + 21 \times 720x + 7 \times 720) \exp(x) \\ &= (x^6 + 42x^5 + 630x^4 + 4200x^3 + 12600x^2 + 15120x + 5040) e^x \end{aligned}$$

4. Propriétés des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

4.1. Extrema locaux

Définition 38.

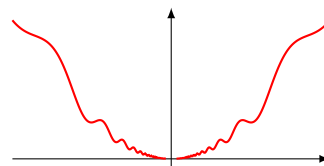
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .

On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap I, f(x) \leq f(a)$.

On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap I, f(x) \geq f(a)$.

Remarque 39.

Il ne faut pas croire que si f admet un minimum local en a alors f est décroissante à gauche de a et croissante à droite de a . Par exemple, la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + x^2 \sin^2(1/x)$ définie sur $\mathbf{R}$ admet un minimum local en 0 et n'est ni croissante à droite de 0 ni décroissante à gauche de 0.



Théorème 40.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un point de I **qui n'est pas une extrémité de I** .

Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

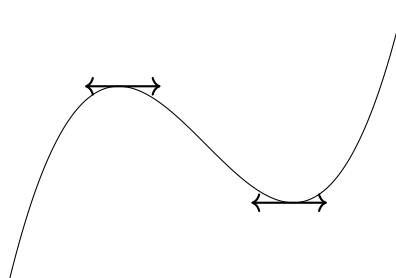
Démonstration.

Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que f admet un maximum local en a . Soit $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap I, f(x) \leq f(a)$.

Soit $x \in]a - \alpha, a[\cap I$. Alors $f(x) \leq f(a)$ et $x < a$. Donc $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Comme f est dérivable en a , $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \tau_a(x) \geq 0$.

Soit $x \in]a, a + \alpha[\cap I$. Alors $f(x) \leq f(a)$ et $x > a$. Donc $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$. Comme f est dérivable en a , $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \tau_a(x) \leq 0$.

Finalement, $f'(a) = 0$. □



Remarque 41.

1. Graphiquement, la tangente en un extremum est horizontale. En effet pour un maximum, les sécantes ont une pente positive puis négative donc à la position limite, la pente est nulle.
2. Ce théorème ne concerne que les fonctions dérivables. Par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ possède un minimum local en 0 et n'est pas dérivable en 0.
3. Ce théorème ne s'applique pas aux extrema locaux qui sont une extrémité du domaine de définition. Une extrémité peut être un extrémum local d'une fonction sans que la dérivée de cette fonction s'annule. Par exemple, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ admet un maximum local en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$.

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & x \end{array}$$
4. Ce théorème n'admet pas de réciproque : si une fonction admet une dérivée nulle en un point a , elle n'admet pas nécessairement un extremum en ce point. Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée s'annule en 0 et 0 n'est pas un extremum local.

4.2. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 42 - Théorème de Rolle.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a; b]$.

- Si f est continue sur le segment $[a; b]$,
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,
- et si $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.

f est continue sur le segment $[a, b]$ donc l'image de $[a, b]$ par f est un segment $[m, M]$ avec $m \leq M$ réels. m est donc le minimum de f sur $[a, b]$ et M son maximum.

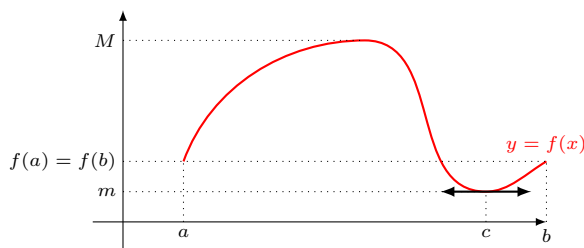
- Si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$ donc sa dérivée est nulle sur tout $]a, b[$.
- Si $m < M$:
 - Si $m \neq f(a)$, alors f prend la valeur m en un point $c \in]a, b[$ donc f est dérivable en c et f a un extrémum local en c donc $f'(c) = 0$.
 - Si $m = f(a)$, on a forcément $M \neq f(a)$ donc f prend la valeur M en un point $c \in]a, b[$ donc f est dérivable en c et f a un extrémum local en c donc $f'(c) = 0$.

□

Remarque 43.

1. Graphiquement, le théorème de Rolle dit que, sous les hypothèses précédentes, le graphe de la fonction f possède au moins une tangente horizontale.
2. En cinématique, le théorème de Rolle nous dit qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a nécessairement vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.

3. Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont indispensables. Si f n'est pas dérivable sur $]a; b[$, le théorème peut être mis en défaut (il suffit de choisir $x \mapsto |x|$ sur $[-1; 1]$). De même, si $f(a) \neq f(b)$, on ne peut pas conclure (considérer $x \mapsto x$ sur $[0; 1]$).



4.3. Égalité des accroissements finis

Théorème 44 - Théorème des accroissements finis.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle définie sur $[a; b]$.

- Si f est continue sur le segment $[a; b]$,
- et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,

alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Démonstration.

On considère la fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$. D'après les hypothèses sur

$$x \longmapsto (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x$$

la régularité de f , g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus

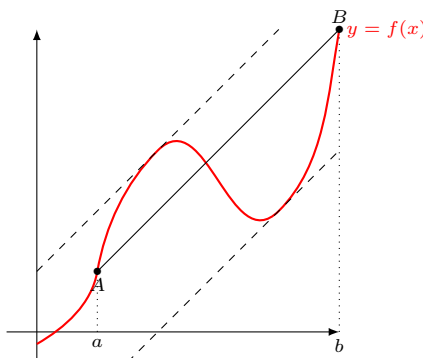
$$g(a) = (b - a)f(a) - (f(b) - f(a))a = b(f(a) - af(b))$$

$$g(b) = (b - a)f(b) - (f(b) - f(a))b = -af(b) + bf(a)$$

Donc, $g(a) = g(b)$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle, qui nous assure de l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a alors :

$$(b - a)f'(c) - (f(b) - f(a)) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



□

Remarque 45.

1. Graphiquement, ce théorème signifie que tout arc de la courbe représentative d'une fonction dérivable possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les extrémités de cet arc.
2. Du point de vue cinématique, un mobile se déplaçant sur un axe pendant un intervalle de temps possède au moins une fois une vitesse instantanée égale à sa vitesse moyenne sur cet intervalle. Ainsi si une voiture réalise un parcours à la moyenne de 90 km/h, il existe un instant du trajet où sa vitesse instantanée a été de 90 km/h.

Définition 46.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $k \in \mathbf{R}_+$. On dit que f est une fonction **k -lipschitzienne** si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

On dit que f est **lipschitzienne** si elle est k -lipschitzienne pour un certain $k \geq 0$.

On peut interpréter graphiquement que f est k -lipschitzienne : pour tous points M et N distincts sur la courbe représentant f , le coefficient directeur de la droite (MN) est compris entre $-k$ et k .

Exercice d'application 47.

Les fonctions suivantes sont-elles lipschitziennes ?

1. Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sur $\mathbf{R}$.
2. $x \mapsto |x|$ sur $\mathbf{R}$.
3. $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
4. $g : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbf{R}^+$.

↪

1. Oui, elles sont a -lipschitziennes.
2. Oui, 1-lipschitzienne d'après l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
3. Non, car pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x$, donc n'est pas borné sur $\mathbf{R}^*$.
4. Non, car pour tout $x > 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc n'est pas borné sur $\mathbf{R}_+^*$.

Théorème 48 - Inégalités des accroissements finis - Version 1.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a; b]$. Soient m et M deux réels tels que $m \leq M$.

- Si f est continue sur le segment $[a; b]$;
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,
- et si pour tout $x \in]a; b[$, $m \leq f'(x) \leq M$,

alors on a :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Démonstration.

D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Comme $c \in [a, b]$, on a $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$, donc

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

□

Théorème 49 - Inégalités des accroissements finis - Version 2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a; b]$. Soit k un réel positif ou nul.

- Si f est continue sur le segment $[a; b]$;
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,
- et si pour tout $x \in]a; b[$, $|f'(x)| \leq k$

alors f est k -lipschitzienne sur $[a; b]$, c'est-à-dire que f vérifie :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Démonstration.

Soient x et y dans $[a, b]$. Quitte à échanger x et y , on peut supposer que $x \geq y$.

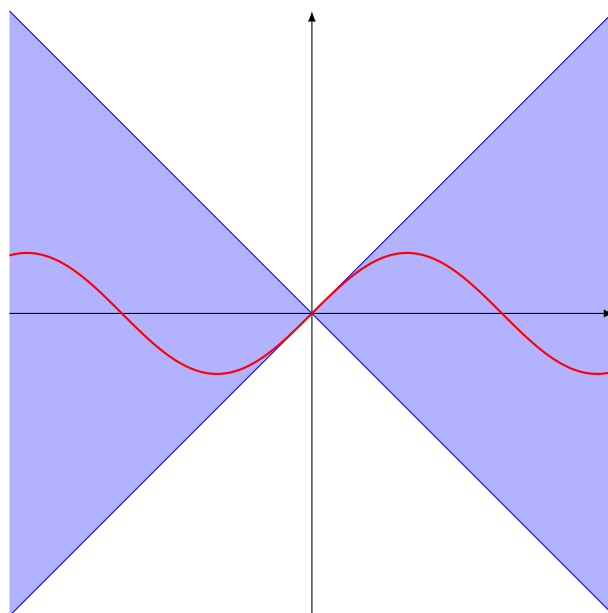
- Si $x = y$, alors $|f(x) - f(y)| = 0 = k|x - y|$.
- Sinon f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Donc, d'après la Version 1 de l'inégalité des accroissements finis,

$$-k(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq k(y - x).$$

On en déduit que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Donc f est k -lipschitzienne. □

Exemple 50. Comme $\cos$ est bornée par 1, $\sin$ est 1-lipschitzienne.



Exercice d'application 51. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}^{+\star}$. Alors $\ln$ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. De plus, pour tout $y \in]x, x+1[$, $f'(y) = \frac{1}{y}$, donc $\frac{1}{x+1} \leq f'(y) \leq \frac{1}{x}$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1}(x+1-x) &\leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}(x+1-x) \\ \frac{1}{x+1} &\leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4.4. Applications des théorèmes des accroissements finis

Variations d'une fonction dérivable

Théorème 52.

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I .
La fonction f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
La fonction f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration.

Traisons le premier cas, le deuxième s'en déduisant en considérant $-f$.

Si f est supposée croissante sur I , pour tout $x_0 \in I$, le taux d'accroissement de f en x_0 est une fonction positive ou nulle et sa limite est donc positive ou nulle.

Réciproquement, supposons que $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I vérifiant $x_1 < x_2$. Comme, d'après les hypothèses, la fonction f est continue sur $[x_1; x_2]$ et dérivable sur $]x_1; x_2[$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis sur le segment $[x_1; x_2]$: il existe donc un nombre réel c appartenant à $]x_1; x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0$ et, par suite, $f(x_2) \geq f(x_1)$. La fonction f est donc croissante sur I .

Une fonction est constante sur I si, et seulement si, elle est croissante et décroissante sur I . $\square$

Remarque 53.

1. Ce résultat n'est valable **que sur un intervalle**. Si l'on considère par exemple la fonction $f : x \mapsto 1/x$ sur $\mathbf{R}^*$, la négativité de la dérivée f' entraîne la décroissance de f sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbf{R}^*$, puisque cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^* : f(-1) \leq f(1)$.

2. Si l'on a $\forall x \in I, f'(x) > 0$ (respectivement $\forall x \in I, f'(x) < 0$), on peut en déduire que la fonction est strictement croissante mais la réciproque est fautive ! **Il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée n'est pas strictement positive**

(considérer $x \mapsto x^3$ sur $\mathbf{R}$).

Corollaire 54.

Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I .
 f est strictement monotone sur I si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :

- i) la dérivée de f est de signe constant ;
- ii) il n'existe pas d'intervalle, contenant au moins deux points, inclus dans I sur lequel f' est nulle.

Remarque 55. Dans la pratique, on utilise le fait que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I .

Démonstration.

La condition (i) étant équivalente à la monotonie de f sur I , il suffit de montrer que pour une fonction f monotone dérivable, la stricte monotonie est équivalente à la condition (ii).

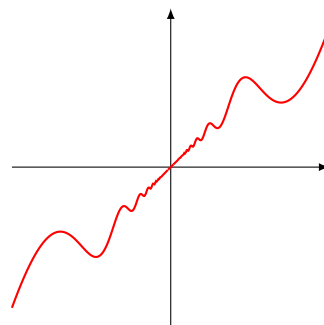
Or, en tant que fonction monotone, f n'est pas strictement monotone si, et seulement si, f est constante sur un intervalle contenant au moins deux points, c'est-à-dire si, et seulement si, f' est nulle sur un tel intervalle. $\square$

Remarque 56.

Il ne faut pas croire non plus que la positivité stricte de f' en un point donné suffit à justifier la stricte monotonie de f au voisinage de ce point. Considérons par exemple, la fonction

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ et pourtant f' ne garde un signe constant dans aucun intervalle autour de 0



Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 57 - Théorème de la limite de la dérivée.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I .

On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$,

- si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;
- si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell = +\infty$ ou $-\infty$, alors le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a et f n'est pas dérivable en a . Dans ce cas, la courbe représentative de f présente une tangente verticale au point d'abscisse a .

Démonstration.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

D'après l'égalité des accroissements finis, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe c_x strictement compris entre a et x tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Comme c_x est entre a et x , on a $0 < |c_x - a| < |x - a|$. $\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow a} |c_x - a| = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} f'(c_x) = \ell$, et donc que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$

- si $\ell \in \mathbf{R}$, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie en a donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;
- si $\ell = \pm \infty$, alors le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a et f n'est pas dérivable en a . Dans ce cas, la courbe représentative de f présente une tangente verticale au point d'abscisse a .

□

Remarque 58.

Attention, la proposition précédente n'est qu'une condition suffisante. Il se peut que $f'(a)$ existe sans que la fonction f' soit continue en a . En effet, la fonction

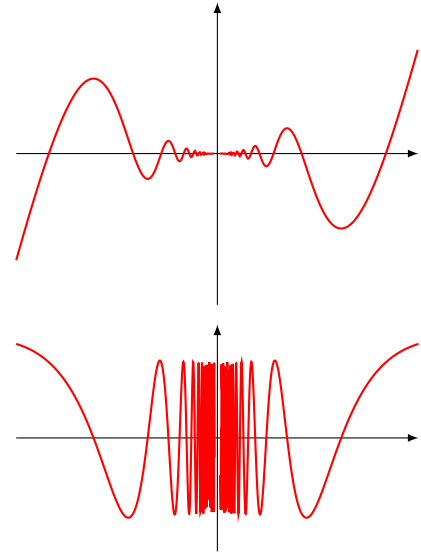
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ d'après les théorèmes généraux et dérivable en 0 de dérivée nulle car son taux d'accroissement en 0 tend vers 0 en 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$).

Or la fonction

$$f' : x \longmapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas continue en 0 car
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(1/(2n\pi)) = -1 \neq f'(0).$



5. Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

La définition de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes en un point est la même que celle des fonctions à valeurs réelles :

Définition 59.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite **dérivable en** $a \in I$ si, et seulement si, la fonction $\tau_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, appelée **taux d'accroissement** de f en a et définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall t \in I \setminus \{a\}, \quad \tau_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite (obligatoirement finie) quand t tend vers a . Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a , et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dt}(a)$. Autrement dit :

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

On définit de même la fonction dérivée :

Définition 60.

Lorsque la fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur** I et la fonction à valeurs complexes définie sur I par $t \longmapsto f'(t)$ est appelée **fonction dérivée** de f , et se note f' , Df ou $\frac{df}{dt}$.

Proposition 61.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a (resp. sur I) si, et seulement si, les deux fonctions à valeurs réelles $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont dérivables en a (resp. sur I). Dans ce cas on a de plus

$$f' = (\mathcal{R}e(f))' + i (\mathcal{I}m(f))'$$

Remarque 62. En pratique, avec les fonctions à valeurs complexes, on dérive comme dans le cas réel avec les règles habituelles.

Exemple 63. Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La fonction $f : t \mapsto \exp((a + ib)t)$ est dérivable sur $\mathbf{C}$. En effet, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\exp((a + ib)t) = \exp(at) \cos(bt) + i \exp(at) \sin(bt),$$

donc la partie réelle et imaginaire sont dérivables sur $\mathbf{C}$ et le calcul donne pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f'(t) = (a + ib) \exp((a + ib)t).$$

Remarque 64. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis deviennent faux dans le cas des fonctions à valeurs complexes.

Considérons par exemple la fonction $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ qui est dérivable sur $[0, 2\pi]$ donc a fortiori

$$x \mapsto e^{ix}$$

continue sur ce segment et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$. On a $f(0) = f(2\pi) = 1$ et pourtant, pour tout $c \in]0, 2\pi[$, $f'(c) = ie^{ic} \neq 0$!

Remarque 65.

D'un point de vue cinématique, cela implique qu'un point mobile dans le plan complexe peut revenir à son point de départ sans que sa vitesse instantanée ne se soit annulée à aucun instant.

Par contre, une certaine forme de l'inégalité des accroissements finis est conservée.

Théorème 66.

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ (dérivable à dérivée continue sur $[a, b]$).

S'il existe un réel $k \geq 0$ tel que : $\forall t \in [a; b]$, on a $\underbrace{|f'(t)|}_{\text{module}} \leq k$, alors pour tout $x, y \in [a; b]$, on

$$\text{a } \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\text{module}} \leq k \underbrace{|x - y|}_{\text{val. abs.}}$$

Démonstration.

Sera démontré dans le chapitre «Intégration». □

L'une des conséquences immédiates de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes est donnée dans l'énoncé suivant (qui reste valable si f est seulement dérivable sur $[a, b]$).

Corollaire 67.

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f' est nulle sur $[a; b]$, alors f est constante sur $[a; b]$.