Chapitre 14

Probabilités sur un univers fini

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir. Autrement dit : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

Devise des Shadoks

1. Univers et événements

Définition 1.

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on connaît les résultats, appelés **issues**, possibles mais dont on ne peut pas *a priori* prédire lequel va arriver.
On appelle **univers** l'ensemble de toutes les issues possibles. L'univers est souvent noté Ω.

Exemple 2.

- On lance un dé à six faces (sous-entendu, les faces portent les numéros 1,2,3,4,5 et 6, et on considère que le résultat de l'expérience est le numéro qui apparaît sur la face du dessus). On peut choisir comme univers l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (on aurait aussi pu choisir $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 42\}$ même si 42 est un résultat qui n'a « aucune chance » d'être obtenu).
- On lance une pièce de monnaie. On peut choisir comme univers $\Omega = \{\text{pile,face}\}$.
- On met en route une machine et on considère le nombre total de jours de fonctionnement de cette machine avant qu'elle ne tombe en panne. Un univers possible est ici $\Omega = \mathbf{N}^\star$.

Remarque 3. Dans le troisième exemple, l'univers n'est pas un ensemble fini. Cette année, on ne s'intéressera qu'aux expériences pouvant être modélisées par un univers fini (on parle de probabilités finies). L'année prochaine vous vous intéresserez aux probabilités sur des ensembles dénombrables (par exemple $\Omega = \mathbf{N}$) ; on parle alors de probabilités discrètes. On peut aussi considérez le cas où Ω est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbf{R}$, et dans ce cas on parle de probabilités continues.

Pour toute la suite, on considère un univers Ω fini. On se donne également $n \in \mathbf{N}^\star$.

Définition 4.

On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω. À l'issue d'une expérience aléatoire, on dit que l'événement A est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience est un élément de la partie A.

L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 5.

- On lance un dé à 6 faces, et on associe à l'expérience l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$. On considère l'événement $A =$« on obtient un nombre pair ». On a ainsi $A = \{2,4,6\}$, qui est bien une partie de Ω.
- On lance simultanément deux dés à 6 faces distinguables (un rouge et un vert, par exemple). Le résultat de l'expérience est le couple (valeur lue sur le dé rouge, valeur lue sur le dé vert). Un univers possible pour cette expérience est $[\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] = [\![1,6]\!]^2$. On considère les événements $A =$« la somme des points obtenus vaut 7 » et $B =$« le plus petit des nombres obtenus est 3 ».
  Les événements A et B sont les parties suivantes de Ω :
  $A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$ $B = \{(3,3);(3,4);(4,3);(3,5);(5,3);(6,3);(3,6)\}$.

Définition 6.

L'événement Ω est appelé l'événement **certain** (il est toujours réalisé). L'évènement $\varnothing$ est appelé l'événement **impossible** (il n'est jamais réalisé). Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, les singletons $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ sont appelés les **événements élémentaires**.

Exemple 7. Lors d'un lancer de dé à 6 faces, l'événement $A =$« obtenir 6 » est l'événement élémentaire $A = \{6\}$, l'événement $B =$« obtenir un nombre à la fois pair et strictement inférieur à 2 » est l'événement impossible $B = \varnothing$, et l'événement $C =$« obtenir un nombre pair ou un nombre impair » est l'événement certain $C = \Omega$.

Définition 8.

Soient A et B deux événements.

1. $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ est l'**événement contraire** de A.
2. $A \cup B$ est l'événement A **ou** B.
3. $A \cap B$ est l'événement A **et** B.
4. $A \backslash B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$ est l'événement A **mais pas** B.

Exemple 9. Dans le lancer de deux dés à 6 faces (avec $\Omega = [\![1,6]\!]^2$), on considère à nouveau les événements $A =$« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et $B =$« le plus petit des nombres obtenu est 3 ».

- L'événement $A \cup B$ est « la somme des nombres obtenue est 7 ou le plus petit des deux est 3 »
  $A \cup B = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1);(3,5);(5,3);(6,3);(3,6);(3,3)\}$
- L'événement $A \cap B$ est « la somme des nombres obtenue est 7 et le plus petit des deux est 3 »
  $A \cap B = \{(3,4);(4,3)\}$
- L'événement $A \backslash B$ est « la somme des nombres obtenue est 7 mais le plus petit des deux n'est pas 3 »
  $A \cap B = \{(1,6);(2,5);(5,2);(6,1)\}$

Définition 10.

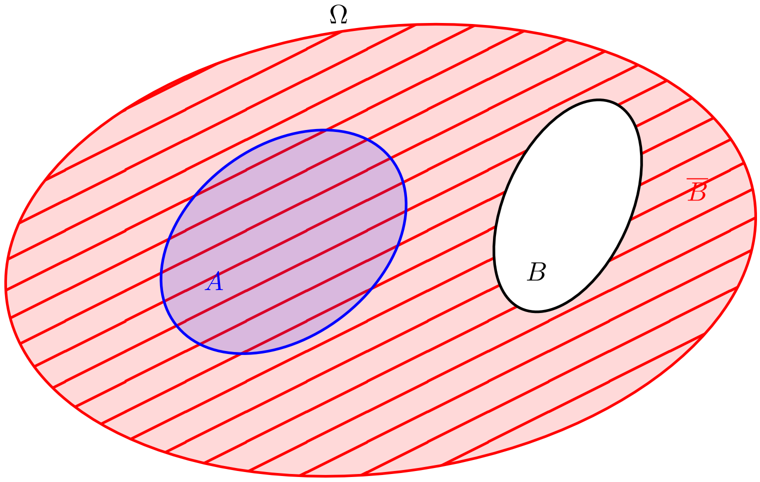
Soient A et B deux événements.

- On dit que A **implique** B lorsque $A \subset B$.
- On dit que A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$. Deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas être tous les deux réalisés à l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemple 11.

- Un événement A et son contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.
- Dans le lancer de deux dés à 6 faces, les événements $A =$« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et $C =$« les deux numéros obtenus sont pairs » sont incompatibles car $A \cap C = \varnothing$.

Remarque 12. Si deux événements A et B sont incompatibles, A implique $\overline{B}$ et B implique $\overline{A}$.



Définition 13.

Soient E_1, $E_2, \dots,$ E_n des événements de Ω. On dit que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est un **système complet d'événements** lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. les événements E_k (où $k \in [\![1, n]\!]$) sont deux à deux incompatibles :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ \big(i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \varnothing\big)$$
2. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

Remarque 14. Si aucun des événements E_k n'est vide, la notion de système complet d'événements coïncide avec celle de partition de Ω.

Exemple 15. Reprenons le lancer de deux dés à 6 faces.

$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. $E_1 = \{$ la somme des deux dés est impaire $\}$.

$E_2 = \{$ les deux dés sont pairs $\}$.

$E_3 = \{(1, 1); (1, 3); (3, 1); (1, 5); (5, 1); (3, 5); (5, 3); (5, 5)\}$.

Alors, $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \varnothing$ et $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

Donc (E_1, E_2, E_3) est un système complet d'évènements.

Exemple 16.

- Un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.
- L'ensemble $\Big\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\dots,\{\omega_n\}\Big\}$ des événements élémentaires de l'univers $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$ est aussi un système complet d'événements.
- On considère une succession de n lancers d'une pièce à pile ou face. Le résultat de cette expérience est un $n-$uplet constitué d'éléments de $\{\text{pile,face}\}$. Par exemple, si $n=4$, le résultat d'une expérience peut être (face,face,pile,face). L'univers est ici $\Omega=\{\text{pile,face}\}^n$.
  Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on considère les événements $E_k=$« j'ai obtenu pile pour la première fois au $k-$ième tirage » et $G=$« j'ai obtenu face à tous les tirages ». On peut dire que l'ensemble $\{E_1,E_2,\dots,E_n,G\}$ est un système complet d'événements.

2. Probabilités

Pour modéliser une expérience aléatoire, on associe à chaque évènement la « chance » qu'il se réalise.

2.1. Espaces probabilisés finis

Définition 17.

Soit Ω un univers fini. L'ensemble de tous les événements est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ qu'on notera $\mathcal{T}$ (comme « tribu » des événements, spoiler du cours de spé). Le couple $(\Omega,\mathcal{T})$ est qualifié d'**espace probabilisable fini**.

Définition 18.

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable fini (où $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\Omega)$). On appelle **probabilité** sur $(\Omega,\mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P}:\mathcal{T}\longrightarrow[0\,;\,1]$ qui vérifie

1. $\mathbb{P}(\Omega)=1$;
2. pour tous événements A et B incompatibles, $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

Pour tout événement A, le nombre $\mathbb{P}(A)$ est appelé la « probabilité de A ». Le triplet $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ est qualifié d'**espace probabilisé fini**.

Exemple 19. On considère le lancer d'une pièce de monnaie qui donne pile avec une fréquence $p\in[0\,;\,1]$ et face avec une fréquence $1-p\in[0\,;\,1]$. Pour modéliser fidèlement l'expérience, on considère l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ où $\Omega=\{\text{pile,face}\}$, $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}:\begin{array}{rcl}\mathcal{T}&\longrightarrow&[0\,;\,1]\\ \varnothing&\longmapsto&0\\ \text{pile}&\longmapsto&p\\ \text{face}&\longmapsto&1-p\\ \Omega&\longmapsto&1\end{array}$. On vérifie aisément que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité.

Remarque 20. Dans l'exemple précédent, on a dû donner la probabilité de tous les événements de $\mathcal{T}$. On verra plus loin qu'on peut définir correctement une probabilité $\mathbb{P}$ sans être aussi exhaustif.

2.2. Exemple fondamental : la probabilité uniforme

Définition 21.

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

Définition 22.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini non vide. On appelle **probabilité uniforme** sur Ω l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}: & \mathcal{T} & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & A & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}. \end{array}$$

Proposition 23.

L'application définie ci-dessus est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Démonstration. 1. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $A \subset \Omega$ donc $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(\Omega)$. D'où

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \leqslant 1.$$

Donc $\mathbb{P}$ est bien à valeurs dans $[0\,;1]$.

2. $\mathbb{P}(\Omega) = \dfrac{\mathrm{Card}(\Omega)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1.$
3. Soient A et B incompatibles. Alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$. D'où

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cup B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} + \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

□

Remarque 24. La définition de la probabilité uniforme donne :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

ce qui signifie que tous les événements élémentaires sont équiprobables. On verra plus loin que c'est la seule probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ qui a cette propriété. On pourra retenir qu'en pratique, pour la probabilité uniforme :

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On utilise cette probabilité lorsque toutes les issues de l'expérience on la même « chance » de se produire. Dans les énoncés, cela se traduit par « choix au hasard », « dé non truqué », pièce « équilibrée ». Les calculs avec la probabilité uniforme font appel aux techniques de dénombrement.

Exercice d'application 25. On range au hasard les n tomes ($n \geqslant 1$) d'une encyclopédie sur une étagère. On désire connaître la probabilité que les tomes 1 et 2 soient côte à côte et dans cet ordre.

↪ L'univers Ω est l'ensemble des n-arrangements des n livres. D'après le cours de dénombrement, on sait que $\mathrm{Card}(\Omega) = n!$. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

On note $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 1 \Rightarrow i < n-1 \text{ et } x_{i+1} = 2\}$. Dénombrons A.

1. On a $n-1$ choix possibles pour l'emplacement du tome 1 (il ne peut être en dernière position, puisque le tome 2 doit être à sa suite).
2. On a un seul choix pour l'emplacement du tome 2 : l'emplacement suivant le tome 1.
3. Pour les $(n-2)$ tomes restants, on peut les placer comme on veut dans les $n-2$ emplacements restants, soit $(n-2)!$ possibilités.

D'après le principe multiplicatif, on a au total $(n-1)\times(n-2)! = (n-1)!$ possibilités. Finalement,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

2.3. Propriétés

Proposition 26.

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
3. $\mathbb{P}(B\backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B\backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
5. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$. On dit que la probabilité est une application croissante pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{T}$.

Démonstration. 1. $A \cup \overline{A} = \Omega$ est une union disjointe donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
D'où $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $\varnothing = \overline{\Omega}$ et$\mathbb{P}(\Omega) = 1$, d'où le résultat d'après le premier point.
3. $B = (B\cap A) \cup (B\backslash A)$ est une union disjointe.
4. C'est un cas particulier du cas précédent : si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$.
5. $\mathbb{P}(B\backslash A) \geqslant 0$, donc $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

□

◇◇◇

Remarque technique 27. La propriété 1. s'appelle le « passage au contraire ». Elle est bien pratique lorsque l'on cherche la probabilité d'un événement qui est décrit par la locution « au moins un » ou « au plus un ».

Exercice d'application 28. On lance deux dés à 6 faces discernables et non pipés. Déterminer la probabilité qu'un des deux au moins donne un chiffre pair.

↪ L'univers est $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 6^2 = 36$. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

On note A l'évènement « Au moins un des deux dés donne un chiffre pair ».

Ainsi, $\overline{A}$ est l'évènement « Les deux dés donnent un chiffre impair » .

Chaque dé a 3 possibilités d'être impair, donc par le principe multiplicatif, $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 3^2 = 9$. D'où $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\overline{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$. Ainsi $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice d'application 29. Le jeu de carte Uno™ contient 108 cartes, dont 32 cartes « spéciales ». Lorsqu'on pioche une main de sept cartes au hasard, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une carte spéciale parmi les sept ?

↪ Notons C l'ensemble des 108 cartes. Alors l'univers est $\Omega = \{A \in \mathcal{P}(C), \mathrm{Card}(A) = 7\}$. D'après le cours de dénombrement, $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{108}{7}$.

Soit A l'évènement « La main tirée contient au moins une carte spéciale ». Alors $\overline{A}$ est « La main ne contient aucune carte spéciale ».

En note $S \subset C$ l'ensemble des 76 cartes non-spéciale du paquet, $\overline{A}$ est donc l'ensemble des parties de S à 7 éléments. On sait que son cardinal est $\binom{76}{7}$.

Finalement,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\mathrm{Card}(\overline{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{\binom{76}{7}}{\binom{107}{7}} \approx 0,92.$$

◇◇

Proposition 30.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration.
Le résultat se démontre à l'aide d'une simple récurrence, en utilisant le fait que si $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont deux à deux incompatibles $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ et A_{n+1} sont aussi incompatibles. □

Corollaire 31.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) = 1$.
2. Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$, autrement dit la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Démonstration.
1. On utilise la proposition précédente, avec $\Omega = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k$.
2. On utilise le fait que les événements élémentaires forment un système complet. □

Proposition 32 - Formule de Poincaré.

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration.
$B \subset A \cup B$, donc $\mathbb{P}((A \cup B)\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$ d'après la Proposition 26.

Or, $(A \cup B)\backslash B = A\backslash B$, d'où $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$. Toujours d'après la Proposition 26, $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$, donc :

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B).$$

□

Corollaire 33.

Soit $A_1, ..., A_n$ des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons H_n : « pour tous événements $A_1, ... A_n$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ ».
H_1 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que H_n soit vraie. Soient $A_1, ..., A_n, A_{n+1}$ des événements. Notons $B = A_1 \cup ... \cup A_n$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(B \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) \leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}).$$

Donc H_{n+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure. □

2.4. Construction de probabilités sur un univers fini

Proposition 34.

Soient $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini et $p_1, \ldots, p_n$ des nombres réels.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$;

(ii) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Le cas échéant, la probabilité $\mathbb{P}$ est unique et on a :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k.$$

Démonstration.

- (i)$\Longrightarrow$(ii). Si une telle probabilité existe, alors les p_k sont positifs ou nuls puisque ce sont des probabilités d'événements, et d'après le Corollaire 31, $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$.
- (ii)$\Longrightarrow$(i). Supposons les deux points de la condition vérifiés. On raisonne par analyse-synthèse.
  Analyse : Supposons qu'on ait trouvé une telle probabilité $\mathbb{P}$. Soit A un événement. On peut écrire A comme réunion d'événements élémentaires qui sont deux à deux incompatibles :

$$A = \bigcup_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \{\omega_k\}.$$

  Puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité, on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k$$

  donc pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}$ est définie de manière unique à partir des nombres p_k et donc un tel candidat-probabilité $\mathbb{P}$ est unique.

Synthèse : On définit pour tout $A \in \mathcal{T}$ le nombre $\mathbb{P}(A)$ par $\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k$.

Puisque pour tout $A \in \mathcal{T}$, $0 \leqslant \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \underbrace{p_k}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, l'application $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k \end{array}$ est correctement définie (l'ensemble d'arrivée est effectivement $[0\,;\,1]$). Il reste à vérifier qu'elle répond bien aux exigences et que c'est bien une probabilité.

Tout d'abord, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a bien $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in \{\omega_i\}}} p_k = p_i$.

Ensuite, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in \Omega}} p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Enfin, pour tous événements A et B incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A \cup B}} p_k$$

et puisque $A \cap B = \varnothing$, les ensembles $\{\, k \in [\![1,n]\!] \mid \omega_k \in A\}$ et $\{\, k \in [\![1,n]\!] \mid \omega_k \in B\}$ sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k + \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in B}} p_k = \mathbb{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Finalement, $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. □

Corollaire 35.

Pour définir complètement une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chacun des événements élémentaires.

Exemple 36. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. L'unique probabilité telle que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Exercice d'application 37. On considère $\Omega = [\![1,n]\!]$. Montrer qu'on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$, en posant, pour tout $k \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2} \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^3}{n^2(n+1)^2} &= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ &= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, par la Proposition 34, on peut définir $\mathbb{P}$ telle que proposée dans l'énoncé.

3. Probabilités conditionnelles

3.1. Définitions et propriétés

Exercice d'application 38. Dans un grand lycée, il y a 200 élèves de PCSI, et trois langues sont proposées en LV1. La répartition est donnée dans le tableau ci-après.

LV1	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
Hommes	55	18	17	90
Femmes	58	23	29	110
Total	113	41	46	200

On choisit un élève au hasard parmi les étudiants de PCSI.

1. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une femme germaniste ?
3. On croise une étudiante de PCSI dans le couloir. Quelle est la probabilité qu'elle soit germaniste ?
4. On sélectionne un élève au hasard parmi tous les germanistes. Quelle est la probabilité que cet étudiant soit une femme ?

$\hookrightarrow$ On note Ω l'ensemble des élèves, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

1. Notons $F =$ « L'élève choisi est une femme ». On a alors $\mathbb{P}(F) = \dfrac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{110}{200} = 0,55$.
2. Notons $A =$ « L'élève choisi apprend l'allemand ». On a $\mathbb{P}(A \cap F) = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{23}{200} = 0,115$.
3. Ici l'expérience aléatoire n'est plus la même que dans les deux questions précédentes. En effet, on *sait* que la personne sélectionnée est une femme, il faut donc calculer la probabilité qu'un élève suive la LV1 allemand *sachant* que c'est une femme. Il faut donc considérer la probabilité uniforme sur l'ensemble des femmes, qu'on note $\mathbb{P}_A$.
   La valeur cherchée est alors $\mathbb{P}_F = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(F)} = \dfrac{23}{110}$.
4. Encore une fois, l'expérience aléatoire change, puisqu'on sait maintenant que l'étudiant est germaniste. On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}_A$ sur l'ensemble des étudiants germanistes.
   La valeur cherchée est alors $\mathbb{P}_A = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{23}{41}$.

Définition 39.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement A, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant E** et on note $\mathbb{P}_E(A)$ (ou $\mathbb{P}(A \mid E)$) le nombre

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}.$$

Remarque 40.
1. $A \mid E$ n'est pas un événement.
2. Si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$, $\mathbb{P}_E$ est la probabilité uniforme sur $(E, \mathcal{P}(E))$ (cf. Exercice d'application 38).

⚠ **Attention ⚠.** Il ne faut pas confondre $\mathbb{P}_E(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap E)$.

Proposition 41.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_E(A) \end{array}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ appelée la **probabilité conditionnelle sachant** E.

Démonstration.
$\mathbb{P}_E$ est bien à valeurs dans $[0, 1]$.

$E \subset \Omega$, donc $E \cap \Omega = E$. D'où $\mathbb{P}_E(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E)} = 1$.

Soient A et B des évènements incompatibles de Ω. Alors $(A \cup B) \cap E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$. De plus, $A \cap E$ et $B \cap E$ sont incompatibles. Donc

$$\mathbb{P}_E(A \cup B) = \frac{\mathbb{P}((A \cup B) \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap E) \cup (B \cap E))}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap E) + \mathbb{P}(B \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}_E(B).$$

□

Exercice d'application 42. Un homme rend visite a une famille qui compte deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille. Il sonne et un des deux enfants ouvre.

1. Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?
2. C'est une fille qui ouvre à l'homme. Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?
3. Le père rejoint sa fille à l'entrée, et il dit à l'homme : « je vois que vous avez rencontré mon aînée ». Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?

$\hookrightarrow$ Chaque composition de la famille peut être représentée par le couple (x, y), avec $(x, y) \in \{F, G\}^2$, x représentant l'aîné et y le second enfant. On a donc $\Omega = \{F, G\}^2$, que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On considère les événements :

- $A =$« l'aînée est une fille »$= \{(F, G), (F, F)\}$;
- $B =$« les deux enfants sont des filles »$= \{(F, F)\}$;
- $C =$« il y a au moins une fille ».

1. La probabilité vaut $\dfrac{1}{2}$.
2. On a $\mathbb{P}_C(B) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$.
3. On a $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Corollaire 43.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle. Soient A et B deux événements.

1. $\mathbb{P}_E(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_E(A)$.
2. $\mathbb{P}_E(B \backslash A) = \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.
3. $\mathbb{P}_E(A \cup B) = \mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.

Démonstration.
Tout cela découle immédiatement du fait que $\mathbb{P}_E$ est une probabilité. □

Exercice d'application 44. Reprendre la question 2. de l'Exercice d'application 42 en modélisant la situation ainsi : on note F_i l'événement « le i-ième enfant est une fille » pour $i \in [\![1, 2]\!]$, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

$\hookrightarrow$ Si on sait que l'un des deux enfants est une fille, la probabilité que l'autre enfant soit une fille également est donnée par :

$$\mathbb{P}_{F_1 \cup F_2}(F_1 \cap F_2) = \frac{\mathbb{P}((F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cap F_2))}{\mathbb{P}(F_1 \cup F_2)} = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

3.2. Conditionnement

Pour évaluer la probabilité de « E et A », il est souvent plus simple d'évaluer la probabilité de E (la « cause ») et la probabilité de A sachant E (la « conséquence ») puis d'utiliser le résultat suivant :

Proposition 45.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement A, $\mathbb{P}(E \cap A) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(A)$.

Démonstration.
Cette formule découle directement de la définition de $\mathbb{P}_E(A)$. □

◇◇

Remarque technique 46. On utilise cette formule lorsqu'il y a un lien de cause à effet entre E et A (E est une cause qui peut expliquer la réalisation de A, qui en est une conséquence).

Exercice d'application 47. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne et on lui ajoute une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

$\hookrightarrow$ On note N_i (pour $i \in \{1, 2\}$) l'événement « on tire une boule noire au i-ième tirage ». On obtient

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7},$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

◇◇

◇◇

Remarque technique 48. Dans de nombreuses situations, on peut rassembler les données de l'énoncé dans un **arbre de probabilité**. Ce qui apparaît au bout de chaque branche d'un tel arbre *doit être un événement.*

Construction d'un arbre de probabilités : on se donne des *événements* $E_1, \ldots, E_n$ et $A_1, \ldots, A_p$, les probabilités des E_k n'étant pas nulles (le plus souvent, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ et $\{A_1, \ldots, A_p\}$ sont des systèmes complets d'événements).

Les événements $E_1, \ldots, E_n$ sont « les causes », et les $A_1, \ldots, A_p$ sont « les conséquences ». Les probabilités conditionnelles écrites sur les branches reliant E_k à A_i s'appellent « **les probabilités de transition** ».

Lorsque $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements, la somme des probabilités sur les branches issues de Ω vaut 1. Lorsque $\{A_1, \ldots, A_p\}$ est un système complet d'événements, la somme des probabilités de transition sur les branches issues d'un même nœud E_k vaut 1 également.

À l'extrémité de chaque branche de l'arbre, on peut obtenir la probabilité $\mathbb{P}(E_k \cap A_i) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}_{E_k}(A_i)$.

Exercice d'application 49. Avant de commencer la correction de ses copies, le professeur M. regarde un match de tennis : trois fois sur cinq il regarde Federer, un quart du temps il regarde Djokovic et le reste du temps il regarde Nadal.

Après avoir vu jouer Federer, il est joyeux 9 fois sur 10 ; après avoir vu Djokovic, il est grognon (c'est-à-dire non joyeux) une fois sur 3 ; lorsqu'il se contente de Nadal, il est grognon 4 fois sur 5.

Construire l'arbre illustrant l'énoncé.

$\hookrightarrow$ On note les évènements suivants :

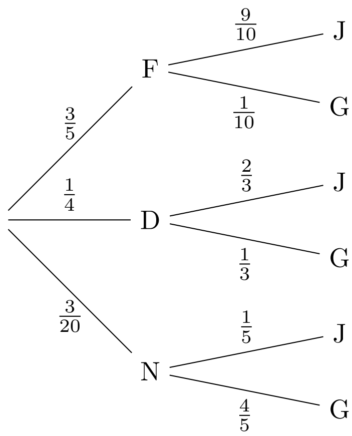
F=« Le professeur M. regarde Federer »

D=« Le professeur M. regarde Djokovic »

N=« Le professeur M. regarde Nadal »

G=« Le professeur M. est grognon »

J=« Le professeur M. est joyeux » $= \overline{G}$.



Il se peut que l'arbre de probabilités possède plus de deux générations de branches (imaginez que l'on connaisse la probabilité que le professeur M. soit très sensible à la rédaction lorsqu'on connaît son état (grognon ou joyeux) et ce qu'il vient de regarder).

On utilise alors la formule suivante :

Proposition 50 - Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $n \in \mathbf{N}$.
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.
Si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors les événements A_1, $A_1 \cap A_2$, $\dots$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$ sont de probabilité non nulle et

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration.
On procède par récurrence.

L'initialisation est simplement $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose H_n vraie. Montrons H_{n+1}.

Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des évènements. On note $E = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Supposons que $\mathbb{P}(E) \neq 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E \subset A_1 \cap \cdots \cap A_i$, donc $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_i) \geqslant \mathbb{P}(E) > 0$.

Alors, $\mathbb{P}(E \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(A_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\mathbb{P}(E \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \times \mathbb{P}_E(A_{n+1}).$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1}).$$

D'où l'hérédité. On conclut par récurrence. □

3.3. Formule des probabilités totales

Lemme 51 - Formule de filtration.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement. On a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_k).$$

Démonstration.
$\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements donc pour tout $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, $E_i \cap E_j = \varnothing$.

$A \cap E_k \subset E_k$ pour tout k, donc $(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = \varnothing$.

Donc $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k$ est une union disjointe. De plus, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = A \cap \Omega = A$. Donc, en utilisant la Proposition 30, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_k).$$

□

Si A est une conséquence possible des causes possibles E_1, E_2, ..., E_n, on calcule chacun des $\mathbb{P}(A \cap E_k)$ en conditionnant par l'événement E_k : $\mathbb{P}(A \cap E_k) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}_{E_k}(A)$. Cela montre la formule des probabilités totales.

Théorème 52 - Formule des probabilités totales.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement. On a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$$

en adoptant la convention que le produit $\mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$ vaut 0 si $\mathbb{P}(E_k) = 0$.

Remarque 53. La convention est nécessaire car si $\mathbb{P}(E_k) = 0$, alors $\mathbb{P}_{E_k}(A)$ n'est pas défini.

Exercice d'application 54. On reprend l'Exercice d'application 49. Calculer la probabilité que le professeur soit grognon.

$\hookrightarrow$ L'ensemble $\{F, D, N\}$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(G) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G)\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{20}\times\frac{4}{5}\\ &= \frac{18+25+36}{300}\\ &= \frac{79}{300}.\end{aligned}$$

Exercice d'application 55. Soit $(a, b) \in \,]0\,;\,1[^2$. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbf{N}^\star$), alors il a le probabilité a de toujours fonctionner à la date n ;
- s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbf{N}^\star$), alors il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n

On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.

1. Déterminer p_n pour $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

$\hookrightarrow$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminons une relation de récurrence entre p_{n-1} et p_n. On applique la formule des probabilités totales. On a, si $0 < \mathbb{P}(M_{n-1}) < 1$:

$$\mathbb{P}(M_n) = \mathbb{P}_{M_{n-1}}(M_n)\mathbb{P}(M_{n-1}) + \mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(M_n)\mathbb{P}(\overline{M_{n-1}}).$$

Par hypothèse, $\mathbb{P}_{M_{n-1}}(M_n) = a$ et $\mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(\overline{M_n}) = b$, d'où $\mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(M_n) = 1-b$. On obtient donc

$$p_n = ap_{n-1} + (1-b)(1-p_{n-1}) = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b.$$

Cette égalité reste vérifiée si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 0$ (car $\mathbb{P}(M_n \cap M_{n-1}) = 0 = ap_{n-1}$). De même si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 1$.
La suite (p_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Soit $r \in \mathbf{R}$.

$$r = (a+b-1)r + 1 - b \iff (a+b-2)r = b-1 \iff r = \frac{b-1}{a+b-2}$$

car $a+b-2 \neq 0$. Posons $r = \dfrac{b-1}{a+b-2}$. La suite $(p_n - r)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $a+b-1$. On obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_n - r = (a+b-1)^n(p_0 - r)$, *i.e.* $p_n = \dfrac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^n\dfrac{1-a}{2-a-b}$.

2. Comme $a+b-1 \in \,]-1\,;\,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+b-1)^n = 0$. La suite (p_n) converge vers $\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

3.4. Formule de Bayes

On a un système d'événements $\{E_1, \dots, E_n\}$ (les « causes ») et un événement A (une « conséquence »). On connaît les probabilités $\mathbb{P}(E_1), \dots, \mathbb{P}(E_n)$ ainsi que les probabilités de transitions $\mathbb{P}_{E_1}(A), \dots, \mathbb{P}_{E_k}(A)$.

On cherche à savoir, lorsqu'on a observé que A s'est produit, avec quelle probabilité c'est l'événement E_k qui en est à l'origine ; autrement dit, on cherche à calculer $\mathbb{P}_A(E_k)$.

Exercice d'application 56. On reprend l'Exercice d'application 49. On voit que le professeur M. est grognon. Quelle est la probabilité qu'il ait regardé un match de Nadal ?

$\hookrightarrow$ Par définition des probabilités conditionnelles, on a $\mathbb{P}_G(N) = \dfrac{\mathbb{P}(G \cap N)}{\mathbb{P}(G)}$.

On a $\mathbb{P}(G \cap N) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G)$. De plus, on peut calculer $\mathbb{P}(G)$ comme on l'a fait avec la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(G)$. D'où

$$\mathbb{P}_G(N) = \frac{\mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G)}{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(G)} = \frac{12/100}{79/300} = \frac{36}{79}.$$

On retiendra cette technique dont le résultat est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 57 - Formule de Bayes.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement tous de probabilité non nulle. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_A(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)}.$$

Exercice d'application 58. Dans un pays, une maladie touche 3% de la population. Pour savoir si un individu est atteint par cette maladie, on dispose d'un test. Lorsque ce test est appliqué à un individu malade, le test renvoie un résultat positif dans 90% des cas. S'il est utilisé sur un individu sain, le test renvoie un résultat négatif dans 96% des cas.

Un individu se présente au centre de test. Le résultat de son test se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?

$\hookrightarrow$ On peut modéliser la situation par un univers $\Omega = \{(a, b) \mid a \text{ est un habitant, } b \text{ est le résultat du test}\}$. On note les évènements suivants :

$P =$ « Le test est positif. »

$M =$ « La personne testée est malade. »

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(M) = 0,03$, $\mathbb{P}_M(P) = 0,9$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P}) = 0,96$.

On cherche à calculer $\mathbb{P}_P(M)$. $\{M, \overline{M}\}$ est un système complet d'évènements, donc par la formule de bayes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_P(M) &= \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P)} \\
&= \frac{0,03 \times 0,9}{0,03 \times 0,9 + (1 - 0,03) \times (1 - 0,96)} \\
&= \frac{0,027}{0,027 + 0,0388} \\
&\approx 0,41
\end{aligned}$$

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux événements

Remarque 59. Si les événements A et B sont tous deux de probabilité non nulle, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

Définition 60.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements. On dit que les événements A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
On note alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

Remarque technique 61.

1. Autrement dit, pour des événements de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la connaissance du fait que l'un des événements est réalisé ne change pas la probabilité que l'autre événement se réalise.
2. L'indépendance de deux événements résulte souvent d'une hypothèse d'indépendance parmi les données du problème et n'est donc pas toujours à démontrer.
3. L'indépendance est une notion liée à la probabilité, contrairement à la notion d'événements incompatibles, qui elle, n'est liée qu'à l'univers et la tribu. En fait, deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants : dans le cas contraire, on aurait $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0$, ce qui est absurde. Intuitivement, deux événements incompatibles sont dépendants l'un de l'autre puisque la place occupée par l'un ne peut pas être occupée par l'autre.

Exercice d'application 62. On lance indépendamment l'un de l'autre deux dés à 6 faces, un rouge et un vert. On considère l'événement $A =$« le dé vert affiche le numéro 1 », l'événement $B =$« le dé rouge affiche le numéro 2 » et $C =$« les deux dés affichent le même numéro ». Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

$\hookrightarrow$ L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, dont les éléments sont (valeur du dé vert, valeur du dé rouge). On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Remarquons déjà que $\text{Card}(\Omega) = 36$.

Commençons par calculer les probabilités de chacun de ces trois évènements :

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$A \cap B = \{(1, 2)\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. D'où $A \perp\!\!\!\perp B$.

$A \cap C = \{(1, 1)\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{\text{Card}(A\cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$. D'où $A \perp\!\!\!\perp C$.

$B \cap C = \{(2, 2)\}$, donc $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{\text{Card}(B\cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$. D'où $B \perp\!\!\!\perp C$.

Proposition 63.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors on a : $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Démonstration.
Soient A et B des évènements indépendants.

B et $\overline{B}$ sont des évènements incompatibles, donc $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ le sont aussi. D'où

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}(A) & = & \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \end{array}$$

Donc $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. On obtient les autres résultats en échangeant les places de A et B dans cette preuve. $\square$

4.2. Indépendance conditionnelle

Définition 64.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un événement de probabilité non nulle et A et B deux événements.
On dit que les événements A et B sont **indépendants sachant** E lorsque $\mathbb{P}_E(A \cup B) = \mathbb{P}_E(A) \times \mathbb{P}_E(B)$, c'est-à-dire lorsqu'il sont indépendant relativement à la probabilité $\mathbb{P}_E$.

Exercice d'application 65. On reprend l'Exercice d'application 62 du lancer de deux dés à 6 faces. Examiner l'indépendance de A et B, et l'indépendance de A et B conditionnellement à C.

$\hookrightarrow$ On a déjà vu que A et B sont indépendants. Étudions leur indépendance conditionnellement à C.

$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \dfrac{\operatorname{Card}(A \cap B \cap C)}{\operatorname{Card}(C)}$.

Or, $A \cap B \cap C = \varnothing$, donc $\mathbb{P}_C(A \cap B) = 0$.

$\mathbb{P}_C(A) = \dfrac{\operatorname{Card}(A \cap C)}{\operatorname{Card}(C)} = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}_C(B) = \dfrac{\operatorname{Card}(B \cap C)}{\operatorname{Card}(C)} = \dfrac{1}{6}$.

Donc, $\mathbb{P}_C(A \cap B) \neq \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$, donc A et B ne sont pas indépendants sachant C.

Cela est cohérent avec la situation réelle : si l'on sait que les valeurs des deux dés sont les même (C), alors savoir si l'évènement A est réalisé donne de l'information sur le fait que l'évènement B soit réalisé.

⚠ **Attention** ⚠**.** L'exercice précédent montre que l'indépendance n'entraîne pas l'indépendance conditionnelle.

On voit donc que la notion d'indépendance simple n'est pas suffisante lorsque l'on considère plus de 2 évènements. On a recours au concept d'indépendance mutuelle.

4.3. Indépendance mutuelle

Définition 66.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A_1, $A_2, \dots,$ A_n des événements, où $n \geqslant 2$.
On dit que les événements A_1, $A_2, \dots,$ A_n sont **mutuellement indépendants** lorsque, pour entier $p \in [\![2, n]\!]$ et toute partie $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ de $[\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_p}).$$

Exemple 67. Avec trois événements A, B et C, ceux-ci sont mutuellement indépendants si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) & \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

Exercice d'application 68. Reprenons l'Exercice d'application 62 du lancer des deux dés. On définit les évènements suivants :

$A =$ « Le dé vert donne un nombre pair. »

$B =$ « Le dé rouge donne un nombre impair. »

$C =$ « Les deux dés sont inférieurs ou égaux à 4. »

Étudier l'indépendance mutuelle de A, B et C.

$\hookrightarrow$ On vérifie facilement que : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = 18$ et $\mathrm{Card}(C) = 16$, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{4}{9}$.

- $A \cap B = \{\, (a,b) \in [\![1,6]\!] \mid a \text{ pair } \text{ et } b \text{ impair } \}$. Donc $\mathrm{Card}(A \cap B) = 9$. D'où
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$
- $\mathrm{Card}(A \cap C) = 8$ par principe multiplicatif, donc
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C).$$
- De même, $\mathrm{Card}(B \cap C) = 8$, donc
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C).$$
- Enfin, $A \cap B \cap C = \{(2,1);(2,3);(4,1),(4,3)\}$, donc $\mathrm{Card}(A \cap B \cap C) = 4$ et
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\frac{4}{9} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C).$$

Donc A, B et C sont mutuellement indépendants. C'est à dire que savoir ci certains de ces évènements sont réalisés ne donne aucune information sur les autres.

Exercice d'application 69. On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements :

- $A =$« le premier lancer donne un chiffre pair » ;
- $B =$« le deuxième lancer donne un chiffre impair » ;
- $C =$« l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair ».

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.
2. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

$\hookrightarrow$ On a $A = \{2,4,6\} \times [\![1,6]\!]$, $B = [\![1,6]\!] \times \{2,4,6\}$ et $C = \{2,4,6\}^2 \cup \{1,3,5\}^2$.
$$\mathbb{P}(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

1. $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{2,4,6\}^2$, ainsi
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$
Donc les événements A, B et C sont indépendants deux à deux.
2. $A \cap B \cap C = A \cap B$, ainsi
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8},$$
donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

⚠ **Attention** ⚠**.** Le fait que des événements soient mutuellement indépendants entraîne qu'ils sont deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse en général (cf. Exercice d'application précédent).

Proposition 70.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (où $n \geqslant 2$) des événements mutuellement indépendants.

1. En remplaçant des A_i par leur événement contraire, on obtient encore une famille d'événements mutuellement indépendants.
2. Chacun des A_i est indépendant de tout événement B qu'on peut former par intersections, réunions avec des événements A_k où $k \neq i$ ou leur contraire.

Démonstration.

1. On va démontrer que $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants (l'ordre n'a pas d'importance). Soit $p \in [\![2, n]\!]$ et $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ une partie de $[\![1, n]\!]$.
   - 1er cas : $n \notin I$
     Comme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, on a bien $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_p})$.
   - 2e cas : $n \in I$. Disons que $i_p = n$. Il s'agit alors de montrer que
     $$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) \times \mathbb{P}(\overline{A_n}).$$
     On a
     $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) &= \mathbb{P}\Big((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) \backslash A_n\Big)\\ &= \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) \times \mathbb{P}(A_n)\\ &\qquad \text{(par mutuelle indépendance des } A_1, \ldots A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}})(1 - \mathbb{P}(A_n))\\ &= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}})\mathbb{P}(\overline{A_n})\end{aligned}$$

   Ceci prouve que $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants.
   On peut alors remplacer A_{n-1} par son contraire et obtenir que les événements $A_1, \ldots, A_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants. Et ainsi de suite.
2. Démonstration technique. Voyons sur un exemple. On suppose que A, B et C sont mutuellement indépendants et montrons que A et $(B \cup C)$ sont indépendants.
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))\\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\\ &= \mathbb{P}(A)\left(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\right)\\ &= \mathbb{P}(A)\left(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)\right)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)\end{aligned}$$
   Donc A et $B \cup C$ sont indépendants.

$\square$

Exercice d'application 71. On fait n lancers indépendants d'une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité de faire face est la même : c'est le nombre $p \in]0, 1[$. Calculer la probabilité d'avoir obtenu pile pour la première fois au dernier lancer.

$\hookrightarrow$ On note $\Omega = \{\text{pile,face}\}^n$. On munit Ω de la probabilité $\mathbb{P}$ correspondant à l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé.

On définit les évènements suivants, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$P_k =$ « Le k-ième lancer est Pile »

$F_k =$ « Le k-ième lancer est Face »

La probabilité que l'on cherche à obtenir est $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$. Les lancers étant indépendants, on a :

$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) = p^{n-1}(1-p)$.

⚠ **Attention ⚠.** Si A et B sont indépendants d'une part et d'autre part A et C sont indépendants, on ne peut rien dire sur l'indépendance des événements A et $B \cap C$ ou A et $B \cup C$. Voir l'exercice d'application suivant.

Exercice d'application 72. On dispose d'un dé rouge et d'un dé noir, tous les deux équilibrés. On lance ces deux dés et les numéros obtenus constituent l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Soit A l'événement « la somme des chiffres est 7 », B « le dé rouge a donné 2 », C « le dé noir a donné 5 » et D « le dé rouge donne un chiffre pair » .

1. Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, non mutuellement indépendants, avec $(A, B \cup C)$ et $(A, B \cap C)$ dépendants.
2. Montrer que A et D sont indépendants, mais que les couples $(A, B \cap D)$ et $(A, B \cup D)$ sont constitués d'événements indépendants.

$\hookrightarrow$

1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36}$, donc (A, B) et (A, C) sont deux couples d'événements indépendants.
   On a $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36}$ et $\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{11}{36}$, mais $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C)$ donc les événements ne sont pas mutuellement indépendants.
   On a $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$. Les couples $(A, B \cup C)$ et $(A, B \cap C)$ sont dépendants.
2. $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap D) = \frac{1}{12}$, donc $A \perp\!\!\!\perp D$.
   De plus, $\mathbb{P}(B \cap D) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B \cup D) = \mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap D) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap D)$ et $\mathbb{P}(A \cap (B \cup D)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup D) = \frac{1}{12}$. Ainsi $A \perp\!\!\!\perp B \cap D$ et $A \perp\!\!\!\perp B \cup D$.