

Chapitre 14 : Probabilités sur un univers fini

1 Langage des probabilités

Le but du cours de probabilité est de modéliser une **expérience aléatoire** : jet d'un dé, d'une pièce de monnaie, longueur d'une file d'attente, temps de vie d'une machine...

Dans un premier temps, on répertorie les résultats possibles, appelés **issues**. L'ensemble de ces résultats est appelé **univers** ou **univers des possibles**, et est traditionnellement noté Ω .

Exemples :

- Lancer d'un dé : $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et $\text{Card}(\Omega) = 6$
- Lancer de deux dés discernables : $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ et $\text{Card}(\Omega) = 36$
- Lancer de deux dés indiscernables : $\Omega = \{\{i, j\} | 1 \leq i \leq j \leq 6\}$.
- Longueur d'une file d'attente $\Omega = \mathbb{N}$.
- Tirage de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes :
 - tirages successifs sans remise : Ω est l'ensemble des 5-arrangements des 32 cartes, et $\text{Card}(\Omega) = \frac{32!}{27!}$
 - tirages successifs avec remise : Ω est l'ensemble des 5-listes des 32 cartes, et $\text{Card}(\Omega) = 32^5$
 - tirages simultanés : Ω est l'ensemble des 5-combinaisons des 32 cartes, et $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$

On peut étudier différents événements liés à l'expérience aléatoire. Par exemple, lors du lancer simultané de deux dés, on peut s'intéresser aux événements A "obtenir deux nombres pairs" et B "obtenir une somme égale à 7".

À chaque événement, on peut associer l'ensemble des issues qui le réalisent :

$$\begin{aligned} \text{à } A \text{ est associé l'ensemble } & \{\{i, j\} | i, j \in \{2, 4, 6\}\} \\ \text{à } B \text{ est associé l'ensemble } & \{\{i, 7-i\} | i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\} \end{aligned}$$

Sous cette identification, on a les définitions suivantes

Définition — On considère un univers Ω .

Un **événement** est une partie de l'univers.

Un **événement élémentaire** est un singleton, c'est-à-dire une partie de cardinal 1 de Ω .

L'**événement certain** est l'événement Ω

L'**événement impossible** est l'événement $\emptyset$.

Soient A, B deux événements.

L'**événement contraire** de A est le complémentaire $\Omega \setminus A$. Il est noté $\overline{A}$.

L'**événement "A ou B"** est la réunion $A \cup B$ des parties A et B .

L'**événement "A et B"** est l'intersection $A \cap B$ des parties A et B .

Les événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On lance deux dés. Les événements A ="obtenir deux chiffres pairs" et B ="la somme des chiffres obtenus est impaire" sont des événements incompatibles.

Définition - Système complet d'événements —

On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de Ω est un système complet d'événements lorsque :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
- $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Exemples :

- Un événement A et son contraire $\bar{A}$ forment un système complet d'événements.
- L'ensemble $\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}\}$ des événements élémentaires de l'univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est aussi un système complet d'événements.
- On lance deux dés. Notons A et B les événements "la somme des deux nombres obtenus est paire" et "la somme des deux nombres obtenus est impaire". La famille (A, B) est un système complet d'événements.
- On considère une succession de n lancers d'une pièce à pile ou face. Le résultat de cette expérience est un n -uplet constitué d'éléments de pile, face. Par exemple, si $n = 4$, le résultat d'une expérience peut être (face, face, pile, face). L'univers est ici $\Omega = \{\text{pile, face}\}^n$.
Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on considère les événements $E_k = \text{"obtenir pile pour la première fois au } k\text{-ème tirage"}$, et $G = \text{"obtenir face à tous les tirages"}$. L'ensemble $\{E_1, E_2, \dots, E_n, G\}$ est un système complet d'événements.

Dans toute la suite, l'univers Ω est un ensemble fini.

2 Probabilité

Définition ♥♥♥ — Soit Ω un ensemble fini. On appelle probabilité sur Ω toute application $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ vérifiant :

- $p(\Omega) = 1$
- pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Vocabulaire : Si p est une probabilité sur Ω , on dit que (Ω, p) est un espace probabilisé.

Exemple : On considère le lancer d'une pièce de monnaie qui donne pile avec une fréquence $p \in [0; 1]$, et face avec une fréquence $1 - p \in [0; 1]$. Pour modéliser l'expérience, on considère l'espace probabilités (Ω, p) où $\Omega = \{\text{pile, face}\}$ et $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ est définie par :

$$p(\emptyset) = 0 \qquad p(\{\text{pile}\}) = p \qquad p(\{\text{face}\}) = 1 - p \qquad p(\Omega) = 1$$

On vérifie facilement que p est bien une probabilité.

Proposition : — Soit p une probabilité sur Ω . Alors :

- $p(\emptyset) = 0$
- Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$ et $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$

Preuve : • $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ et $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, donc

$$p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset) = p(\Omega) + p(\emptyset).$$

Par conséquent, $p(\emptyset) = 0$.

- $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B \setminus A)(*).$$

Or $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Donc

$$p(B) = p(B \setminus A) + p(A \cap B).$$

En reportant dans (*), on obtient

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

- $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc $p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega)$ d'où $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc

$$p(B) = p(A) + p(B \setminus A).$$

Or $p(B \setminus A) \geq 0$ donc $p(B) \geq p(A)$. De plus, on a établi $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$. □

Proposition — Soit p une probabilité sur Ω , et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles : $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_i \cap A_j = \emptyset$. Alors :

$$p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n p(A_k)$$

Preuve : Ce résultat se démontre par récurrence en utilisant que si $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont deux à deux incompatibles, $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ et A_{n+1} sont aussi incompatibles. □

Corollaire — Soit p une probabilité sur Ω .

- Si $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{k=1}^n p(E_k) = 1$.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors $\sum_{k=1}^n p(\{\omega_k\}) = 1$: la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

Preuve : • On utilise la proposition précédente, en remarquant que $\Omega = \bigcup_{k=1}^n E_k$.

- On utilise le fait que les événements élémentaires forment un système complet d'événements. □

Remarque : Ω étant fini, tout événement est réunion (disjointe) d'événements élémentaires : la connaissance de $p(\{\omega\})$ où $\{\omega\}$ est un événement élémentaire suffit à déterminer p . En effet, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\}).$$

En d'autres termes, pour définir une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chacun des événements élémentaires.

3 Exemple fondamental : probabilité uniforme ou équiprobabilité

Exemple : On lance un dé à 6 faces, bien équilibré. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Puisque le dé est équilibré, chaque issue est équiprobable : $p(\{i\}) = p(\{j\})$ pour tous $i, j \in \Omega$. Or $p(\Omega) = 1$ et $p(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\}) = p(\{1\}) + \dots + p(\{6\})$ donc $p(\{\omega\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition — La probabilité uniforme sur Ω est celle pour laquelle tous les événements élémentaires sont équiprobables :

$$\forall \omega \in \Omega, p(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Ainsi, si p est la probabilité uniforme sur Ω , pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \quad \left(= \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \right)$$

Remarque : il s'agit bien d'une probabilité sur Ω :

- pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subset \Omega$, donc $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\Omega)$, ainsi :

$$0 \leq \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \leq 1$$

Donc p est bien à valeurs dans $[0; 1]$.

- $p(\Omega) = \frac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(\Omega)} = 1$.
- Soient A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \cap B = \emptyset$. Alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, d'où :

$$p(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} + \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = p(A) + p(B)$$

On utilise cette probabilité lorsque toutes les issues de l'expérience ont la même "chance" de se produire. Dans les énoncés, cela se traduit par "choix au hasard", "dé non truqué", "pièce équilibrée". Les calculs avec la probabilité uniforme font appel aux techniques de dénombrement ;-)

Exemples :

1. On lance un dé à 6 faces, bien équilibré. Calculer la probabilité des événements A "le dé affiche un numéro pair" et B : "le dé affiche un numéro supérieur à 3".

Ici l'univers est modélisé par $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et toutes les issues sont équiprobables car le dé est équilibré.

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ donc } p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } B = \{3, 4, 5, 6\} \text{ donc } p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2. On tire 3 cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements A "obtenir 3 as", B "obtenir 2 rois et 1 dame", et C "obtenir au moins un valet".

On peut ici considérer deux modèles : soit les tirages sont simultanés et dans ce cas, Ω est l'ensemble des 3-combinaisons des 32 cartes et

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{3},$$

soit ils sont successifs sans remise et dans ce cas Ω est l'ensemble des 3-listes d'éléments distincts des 32 cartes, et

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{32!}{29!}.$$

Dans les deux cas, chaque issue est équiprobable.

Considérons le premier modèle (tirages simultanés).

- Le nombre de tirages amenant 3 as est $\text{Card}(A) = \binom{4}{3}$ (on tire les 3 as parmi les 4 as du jeu). Ainsi $p(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}}$.
- Le nombre de tirages amenant 2 valets et 1 dame est $\text{Card}(B) = \binom{4}{2} \binom{4}{1}$ (on peut décrire un tel tirage par étapes : choisir d'abord 2 valets parmi les 4 du jeu, puis une dame parmi les 4 du jeu). Ainsi $p(B) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{32}{3}}$.
- L'événement contraire de C est $\bar{C}$ "ne pas tirer de valet". Ainsi

$$p(\bar{C}) = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} \quad \text{et} \quad p(C) = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}}.$$

Je vous laisse vérifier qu'on obtient les mêmes résultats en choisissant le modèle des tirages successifs sans remise.

- On range au hasard les n tomes ($n \geq 1$) d'une encyclopédie sur une étagère. On désire connaître la probabilité que les tomes 1 et 2 soient rangés côte à côte dans cet ordre. L'univers Ω est l'ensemble des permutations des n tomes : $\text{Card}(\Omega) = n!$. On note p la probabilité uniforme sur Ω . Dénombrons l'ensemble A des rangements où les tomes 1 et 2 figurent côte à côte dans cet ordre :
 - On a $n - 1$ choix possibles pour l'emplacement du tome 1 (il ne peut pas être en dernière position car le tome 2 doit être rangé à sa suite).
 - On a un seul choix pour l'emplacement du tome 2 : juste derrière le tome 1.
 - Pour les $n - 2$ tomes restants, on peut les placer comme on veut dans les $n - 2$ emplacements restants, soit $(n - 2)!$ possibilités.

D'après le principe multiplicatif, on a au total $(n - 1) \times 1 \times (n - 2)! = (n - 1)!$ possibilités. Finalement :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

- On lance deux dés équilibrés. Calculer la probabilité des événements A "obtenir deux nombres pairs" et B "obtenir une somme égale à 7".

Si les dés ne sont pas discernables et sont jetés simultanément, les issues ne sont pas équiprobables car par exemple, l'issue "obtenir 1 et 6" arrive deux fois plus souvent que l'issue "obtenir un double six" :

en effet, en discernant les deux dés, en imaginant par exemple un dé rouge dont on notera le numéro en premier et un dé bleu dont on notera le numéro en deuxième, il y a deux façons d'obtenir 1 et 6 : soit on obtient (1,6) -le dé rouge donne 1 et le dé bleu donne 6-, soit on obtient (6,1), -le dé rouge donne 6 et le dé bleu donne 1-, alors que le double six ne peut être réalisé qu'avec l'issue (6,6).

Pour être en situation d'équiprobabilité, il est donc nécessaire d'imaginer que les deux dés sont discernables (un dé bleu, un dé rouge) ou qu'ils sont jetés successivement. L'univers peut alors être modélisé par

$$\Omega = \{(i, j) | i, j \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$$

et il est muni de l'équiprobabilité.

Ici, le cardinal de Ω est 36, le cardinal de A est 9 (trois possibilités pour le dé rouge, et trois pour le dé bleu) et le cardinal de B est 6 (le dé rouge peut donner n'importe quel nombre de 1 à 6, le dé bleu donnera alors son complément à 7).

Par conséquent, $p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

4 Probabilités conditionnelles

Exemple : On lance successivement deux dés équilibrés. On note

- A l'événement "la somme des chiffres obtenue est au moins 10"
- B l'événement "le 1er dé donne 3"
- C l'événement "le 1er dé donne 6"

L'univers est ici

$$\Omega = \{(i, j) | i, j \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$$

et celui-ci est muni de l'équiprobabilité.

Si l'on sait que B est réalisé, quelle est la probabilité de l'événement A ? elle est nulle car il est impossible que A soit réalisé si B l'est.

Si l'on sait que C est réalisé, quelle est la probabilité de l'événement A ? Puisque C est réalisé, l'univers est

$$\Omega' = \Omega \cap C = \{(6, j) | j \in \llbracket 1; 6 \rrbracket\}$$

et l'événement A est alors

$$A' = A \cap C = \{(6, j) | j \in \{4; 5; 6\}\}.$$

La probabilité de A sachant C est $\frac{\text{Card}(A')}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On remarque que

$$\frac{\text{Card}(A')}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(\Omega \cap C)} = \frac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(C)} = \frac{p(A \cap C)}{p(C)},$$

car

$$p(A \cap C) = \frac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} \quad \text{et} \quad p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Définition — Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini. Soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$. On définit, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la probabilité de A sachant B , notée $p_B(A)$ ou $p(A|B)$, en posant

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Proposition : — p_B est une probabilité sur Ω . On l'appelle probabilité conditionnelle sachant B .

Preuve : • Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. On sait que $p(A \cap B) \geq 0$, $p(B) > 0$ donc $p_B(A) \geq 0$. En outre, $A \cap B \subset B$ donc $p(A \cap B) \leq p(B)$.

Puisque $p(B) > 0$, alors $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} \leq 1$

$$\bullet \quad p_B(\Omega) = \frac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

$$\bullet \quad \text{Soit } A, C \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ tels que } A \cap C = \emptyset. \quad p_B(A \cup C) = \frac{p((A \cup C) \cap B)}{p(B)} = \frac{p((A \cap B) \cup (C \cap B))}{p(B)}$$

$$\text{Or } (A \cap B) \cap (C \cap B) = (A \cap C) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset,$$

$$\text{Donc } p_B(A \cup C) = \frac{p(A \cap B) + p(C \cap B)}{p(B)} = p_B(A) + p_B(C).$$

Donc p_B est bien une probabilité sur Ω . □

Exemple : Dans une famille de deux enfants, on sait que l'un des deux enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

On modélise ici l'univers par $\Omega = \{(F, F); (F, G); (G, F); (G, G)\}$. Statistiquement, toutes les issues sont équiprobables (on fait l'approximation qu'il naît autant de filles que de garçons).

On note A l'événement "la fratrie est mixte" et B l'événement "la famille compte au moins une fille". Alors

$$A = \{(F, G); (G, F)\} \quad \text{et} \quad B = \{(F, F); (F, G); (G, F)\}.$$

On remarque que $A \cap B = A$, donc $p(A \cap B) = p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. De plus, $p(B) = \frac{3}{4}$.

Par conséquent, la probabilité cherchée est

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2}{3}.$$

Formule des probabilités composées — Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On suppose $p(B) \neq 0$. Alors $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

Preuve : Evidente. □

Exemple :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Déterminer la probabilité de l'événement A "les deux boules tirées sont blanches."

On peut modéliser la situation par un arbre de probabilité (faites le!) et utiliser la formule des probabilités composées. Notons B_1 l'événement "la 1ère boule tirée est blanche" et B_2 l'événement "la 2ème boule tirée est blanche".

Alors $A = B_1 \cap B_2$ et $p(B_1) = \frac{5}{8} > 0$. D'après la formule des probabilités composées

$$p(A) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2)$$

Si B_1 est réalisé, l'urne contient 7 boules dont 4 blanches, donc $p_{B_1}(B_2) = \frac{4}{7}$.

$$\text{Ainsi } p(A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}.$$

Généralisation : Si $B_1, \dots, B_n$ sont des événements tels que $p\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} B_i\right) \neq 0$ alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$p(A \cap B_1 \cap \dots \cap B_n) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) \times p_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \dots \times p_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

Exemple :

1. Une urne contient 5 boules blanches et 3 rouges indiscernables au toucher. On tire successivement, sans remise, trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de l'événement A "observer 2 boules blanches et une rouge dans cet ordre".

Notons B_1 l'événement "la 1ère boule tirée est blanche", B_2 l'événement "la 2ème boule tirée est blanche" et R_3 l'événement "la 3ème boule tirée est rouge".

On a $A = B_1 \cap B_2 \cap R_3$. Donc $p(A) = p(B_1)p_{B_1}(B_2)p_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \frac{5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6}$

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. Quelle est la probabilité de l'événement A : "tirer les n boules noires" ?

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons N_i l'événement "obtenir une boule noire au i ème tirage".

Alors $A = \bigcap_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} N_i$.

D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} p(A) &= p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) \times p_{N_1 \cap N_2}(N_3) \times \dots \times p_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) \\ &= \frac{n}{2n} \frac{n-1}{2n-1} \dots \frac{1}{2n-(n-1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

5 Formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales — Soit $(B_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ un système complet d'événements. Alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(B_i)p_{B_i}(A)$$

en adoptant la convention que le produit $p(B_k)p_{B_k}(A)$ vaut 0 si $p(B_k) = 0$.

Remarque : La convention est nécessaire car si $p(B_k) = 0$, alors $p_{B_k}(A)$ n'est pas défini.

Preuve : (B_i) est un système complet d'événements donc $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$ et les B_i sont 2 à 2 disjoints.

Donc $A = \Omega \cap A = \bigcup_{i=1}^n (B_i \cap A)$ et les $B_i \cap A$ sont deux à deux disjoints.

Donc $p(A) = \sum_{i=1}^n p(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^n p(B_i)p_{B_i}(A)$ d'après la formule des probabilités composées. $\square$

Remarque : En particulier, soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $(B, \bar{B})$ est un système complet d'événements. Donc

$$p(A) = p(B)p_B(A) + p(\bar{B})p_{\bar{B}}(A).$$

Exemple : On dispose de 2 pièces, l'une truquée (elle tombe sur pile dans 75% des cas), l'autre équilibrée. On choisit au hasard l'une des 2 pièces :

- Quelle est la probabilité de l'événement A "obtenir pile" ?

Notons T l'événement : "on a choisi la pièce truquée". Alors $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements et $p(T) = \frac{1}{2} \neq 0$ donc $p(\bar{T}) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Ainsi d'après la formule des probabilités totales,

$$p(A) = p(T)p_T(A) + p(\bar{T})p_{\bar{T}}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 5/8$$

- On obtient pile. Quelle est la probabilité d'avoir joué avec la pièce truquée ?

On cherche à connaître $p_A(T)$. Or

$$p_A(T) = \frac{p(A \cap T)}{p(A)} = \frac{p(T) \times p_T(A)}{p(A)} = \frac{3}{5}.$$

On a utilisé ici (et démontré) la formule de Bayes.

Formule de Bayes — Soit A, B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$p_A(B) = \frac{p(B)p_B(A)}{p(A)}$$

Preuve. Définition d'une probabilité conditionnelle, cf exemple précédent. □

6 Indépendance

Définition — Soit (Ω, p) un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

Proposition — Si $p(B) \neq 0$, les événements A et B sont indépendants ssi $p_B(A) = p(A)$.

Remarques :

1. Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, si A et B sont incompatibles, ils ne sont pas indépendants : $p(A \cap B) = 0$ et $p(A)p(B) \neq 0$ d'où le résultat.
2. Si $p(A) = 0$, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, A et B sont indépendants : $A \cap B \subset A$ donc $p(A \cap B) = 0$ et $p(A)p(B) = 0$ d'où le résultat.

Proposition — Soient A et B deux événements indépendants. Alors $\bar{A}$ et B (respectivement A et $\bar{B}$, respectivement $\bar{A}$ et $\bar{B}$) le sont aussi.

Preuve : On sait que $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ avec $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

Donc $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$. Ainsi $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$.

Or A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$. Par conséquent,

$$p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A)p(B) = (1 - p(A))p(B) = p(\bar{A})p(B).$$

Donc $\bar{A}$ et B sont des événements indépendants. □

Remarques :

- Pour des événements de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la connaissance du fait que l'un des événements est réalisé ne change pas la probabilité que l'autre événement se réalise.
- L'indépendance de deux événements résulte souvent d'une hypothèse d'indépendance parmi les données du problème et n'est donc pas toujours à démontrer.
- L'indépendance est une notion liée à la probabilité, contrairement à la notion d'événements incompatibles qui, elle, n'est liée qu'à l'univers et à l'ensemble des événements.

Définition — Soit (Ω, p) un espace probabilisé. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants lorsque pour toute sous-famille $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ avec $i_k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $i_1 < i_2 < \dots < i_k$,

$$p\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = p(A_{i_1}) \times \dots \times p(A_{i_k})$$

Dans le cas où $n = 3$: les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants lorsque :

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)p(A_2), \quad p(A_1 \cap A_3) = p(A_1)p(A_3), \quad p(A_2 \cap A_3) = p(A_2)p(A_3),$$

$$\text{et } p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)p(A_2)p(A_3).$$

Exemple : On lance un dé rouge et un dé bleu. On note

- A l'événement "le dé rouge donne un nombre pair"
- B l'événement "le dé bleu donne un nombre pair"
- C l'événement "la somme des chiffres est pair"

Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

L'univers $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ est muni de la probabilité uniforme.

- $p(A) = \frac{3 \times 6}{6^2} = \frac{1}{2}$
- $p(B) = \frac{3 \times 6}{6^2} = \frac{1}{2}$
- $p(C) = \frac{9 \times 2}{6^2} = \frac{1}{2}$
- $p(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{6^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $p(B \cap C) = \frac{3 \times 3}{6^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $p(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $p(A \cap B \cap C) = p(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Par conséquent, $p(A \cap B \cap C) \neq p(A)p(B)p(C)$ donc les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants. Ils sont cependant deux à deux indépendants.

Proposition — Soit p une probabilité sur Ω . Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ (où $n \geq 2$) des événements mutuellement indépendants.

- En remplaçant certains des A_i par leur événement contraire, $\overline{A_i}$, on obtient encore une famille d'événements mutuellement indépendants.
- Chacun des A_i est indépendant de tout événement B qu'on peut former par intersections ou réunions d'événements A_k (où $k \neq i$) ou leur contraire.

Exemple : Soit A, B, C des événements mutuellement indépendants. On se propose de vérifier que A et $B \cup C$ sont indépendants :

$$\begin{aligned}
 p(A \cap (B \cup C)) &= p((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
 &= p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C) \\
 &= p(A)p(B) + p(A)p(C) - p(A)p(B)p(C) \quad (\text{d'après l'indépendance mutuelle}) \\
 &= p(A)(p(B) + p(C) - p(B)p(C)) \\
 &= p(A)(p(B) + p(C) - p(B \cap C)) \\
 &= p(A)p(B \cup C)
 \end{aligned}$$

Exemple : On fait n lancers indépendants d'une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir face est la même : $p \in]0; 1[$. Calculer la probabilité d'avoir obtenu pile pour la première fois au dernier lancer.

On définit les événements suivants, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

P_k = "on a obtenu pile au k -ème lancer".

F_k = "on a obtenu face au k -ème lancer".

La probabilité cherchée est $p(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$. Les lancers étant indépendants, on a :

$$p(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) = p(F_1) \times p(F_2) \times \dots \times p(F_{n-1}) \times p(P_n) = p^{n-1}(1 - p)$$