Chapitre 16

Variables aléatoires

Dans tout ce cours, $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé **fini**.

1. Variables aléatoires

1.1. Définition

Définition 1.

On appelle **variable aléatoire** définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E toute application définie sur Ω et à valeur dans E. Lorsque $E = \mathbf{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

Exemple 2.

1. On considère l'expérience qui consiste à lancer 6 fois une pièce de monnaie équilibrée et à noter la succession des pile/face. Dans ce cas, $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^6$, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On considère l'application

$$X : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & \text{nombre de « pile » dans } \omega \end{array}$$

X est une variable aléatoire réelle qui donne donc le nombre de « pile » obtenus lors de l'expérience. Par exemple, $X((\text{pile}, \text{pile}, \text{face}, \text{pile}, \text{face}, \text{face})) = 3$.
On considère maintenant l'application

$$Y : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \{\text{entrée}, \text{fromage}, \text{dessert}\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} \text{entrée} & \text{si les « pile » sont majoritaires dans } \omega \\ \text{fromage} & \text{s'il y a le même nombre de « pile » que de « face » dans } \omega \\ \text{dessert} & \text{si les « face » sont majoritaires dans } \omega \end{cases} \end{array}$$

Y est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{\text{entrée}, \text{fromage}, \text{dessert}\}$.
Par exemple $Y((\text{pile}, \text{pile}, \text{face}, \text{pile}, \text{face}, \text{face})) = \text{fromage}$.

2. On considère l'expérience qui consiste à lancer trois dés distinguables à 6 faces.
Ici, $\Omega = [\![1; 6]\!]^3$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω.
On considère la variable aléatoire S qui à tout issue de l'expérience associe la somme des trois nombres obtenus.

$$S : \begin{array}{ccl} [\![1; 6]\!]^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega = (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{array}$$

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et à valeurs dans un ensemble E. On appelle **univers image** de X l'ensemble $X(\Omega)$ c'est-à-dire

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\}.$$

Remarque 4.
1. $X(\Omega)$ représente l'ensemble des valeurs prises par $X(\omega)$ lorsque ω parcourt Ω.
2. Vu que Ω est un ensemble fini, il en est de même pour $X(\Omega)$.

Exemple 5. Dans les exemples précédents, les univers images sont

$X(\Omega) = [\![0;6]\!]$, $\quad Y(\Omega) = \{\text{entrée}, \text{fromage}, \text{dessert}\}$, $\quad S(\Omega) = [\![3;18]\!]$.

Notation 6. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ à valeurs dans l'ensemble E. Soit A une partie de E et $a \in E$.

- On note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par :
$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$
- On note $\{X = a\}$ ou $(X = a)$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par
$$\{X = a\} = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}.$$
- Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note $\{X \leqslant a\}$ ou $(X \leqslant a)$ l'événement
$$\{X \leqslant a\} = X^{-1}(]-\infty; a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}.$$

Attention, comme dans la théorie des ensembles, ici, X^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de X, qui n'est pas nécessairement bijective. X^{-1} tout seul n'a donc pas de sens, seul $X^{-1}(A)$ où A est un ensemble est licite.

Exemple 7. Avec la variable aléatoire S des exemples précédents,

$$\{S = 3\} = \{(1;1;1)\} \qquad \{S = 4\} = \{(2;1;1); (1;2;1); (1;1;2)\}$$
$$\{S \geqslant 17\} = \{(6;6;6); (5;6;6); (6;5;6); (6;6;5)\}$$

Proposition 8.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ à valeurs dans E.
On note $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$.
Les événements $\{X = x_1\}$,... , $\{X = x_n\}$ forment un système complet d'événements.

Démonstration.
Ces événements sont clairement deux à deux incompatibles (un élément de Ω ne peut avoir deux images différentes) et leur réunion fait $X(\Omega)$. $\square$

1.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 9.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E. On appelle **loi de probabilité de** X ou plus simplement **loi de** X, la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Proposition 10.

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration.
Notons $X(\Omega) = \{x_1; ...; x_n\}$. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) \geqslant 0$ (puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité). Par ailleurs, puisque les événements $\{X = x_1\}$, ..., $\{X = x_n\}$ forment un système complet d'événements, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Ainsi $\mathbb{P}_X$ est une probabilité.

Autre démonstration.
On a $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega))^2$ avec $A \cap B = \varnothing$. On a $\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}((X \in A) \cup (X \in B))$. Or $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$ donc $(X \in A) \cap (X \in B) = \varnothing$ car $A \cap B = \varnothing$. Il s'ensuit $\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)$.
Donc $\mathbb{P}_X$ est bien une probabilité sur $X(\Omega)$. $\square$

Exemple 11. Avec le premier exemple de ce cours,

$$\mathbb{P}_X([\![2; 4]\!]) = \mathbb{P}(X \in [\![2; 4]\!]) = \mathbb{P}(\text{« on a obtenu entre 2 et 4 "pile" »})$$

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On pose $X(\Omega) = \{x_1; \ldots; x_n\}$.

Puisque $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(X(\Omega); \mathcal{P}(X(\Omega)))$, elle est entièrement déterminée par la donnée des valeurs des probabilités des événements élémentaires de $X(\Omega)$ c'est-à-dire par la donnée des valeurs de $\mathbb{P}_X(\{x_k\}) = \mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. On rappelle qu'on alors peut retrouver la probabilité de n'importe quel événement A avec $\mathbb{P}_X(A) = \sum\limits_{x \in A} \mathbb{P}_X(\{x\})$.

Quand on demande la loi de la variable aléatoire X, il suffit de donner $X(\Omega) = \{x_1; \ldots, x_n\}$ et les valeurs des $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. En général, on donne ces informations dans un tableau :

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Exemple 12. Soit $A \subset \Omega$. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire réelle, à valeurs dans $\{0, 1\}$ et sa loi de probabilité est donnée par

x	0	1
$\mathbb{P}(\mathbf{1}_A = x)$	$\mathbb{P}(\overline{A})$	$\mathbb{P}(A)$

Exercice d'application 13. On considère un joueur qui lance deux fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie équilibrée. À chaque fois qu'il obtient « pile », il gagne un euro et à chaque fois qu'il obtient « face », il perd deux euros.
On note X le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de X.

$\hookrightarrow$ Ici $\Omega = \{\text{pile}; \text{face}\}^2$ muni de la probabilité uniforme sur Ω et on a

ω	$\{\text{pile}; \text{pile}\}$	$\{\text{pile}; \text{face}\}$	$\{\text{face}; \text{pile}\}$	$\{\text{face}; \text{face}\}$
$X(\omega)$	2	-1	-1	-4

d'où

x_k	2	-1	-4
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice d'application 14. On lance deux dés équilibrés et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X.

$\hookrightarrow$ Toutes les issues sont équiprobables et $\text{Card}(\Omega) = 6^2$. La variable aléatoire X est à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $\text{Card}(\{X \leqslant k\}) = k^2$ (les deux dés doivent tomber sur des chiffres de $[\![1, k]\!]$) donc

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \frac{k^2}{36}.$$

Puisque $\{k \leqslant k+1\}$ est la réunion disjointe de $\{X \leqslant k\}$ et $\{X = k+1\}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant k+1) = \mathbb{P}(X = k+1) + P(X \leqslant k) \text{ puis } \mathbb{P}(X = k+1) = \mathbb{P}(X \leqslant k+1) - \mathbb{P}(X \leqslant k) = \frac{2k+1}{36}$$

On en déduit que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

1.3. Loi image

Définition 15.

Soit E, F deux ensembles finis, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : E \longrightarrow F$. Alors $f \circ X$ définit une variable aléatoire sur Ω, notée $f(X)$ et appelée **loi image**.

Proposition 16.

Soit E, F deux ensembles finis, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. Posons $Y = f(X)$. La loi de Y est donnée par

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration.
Soit $y \in Y(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}
\{Y = y\} &= \{f(X) = y\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = y\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\right\} \\
&= \left\{X \in f^{-1}(\{y\})\right\} \\
&= \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}.
\end{aligned}$$

Or les événements $\{X = x\}$ avec $x \in f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux incompatibles. On en déduit le résultat attendu. $\square$

◇◇◇

Remarque technique 17. On reprend les notations précédentes. Pour déterminer la loi de Y à partir de celle de X, on peut procéder en deux étapes.

1. On détermine l'univers image de Y.
   Si $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$, alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(x_1); \dots; f(x_n)\}$. On fera attention au fait que dans ce dernier ensemble, certains éléments peuvent être égaux.
2. Pour chaque $y \in Y(\Omega)$:
   - on note $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ tous les éléments de $X(\Omega)$ tels que $f(x_i) = y$, de sorte que
   $$\{Y = y\} = \{X = x_{i_1}\} \cup \cdots \cup \{X = x_{i_k}\}.$$
   - On calcule $\mathbb{P}(Y = y)$ grâce à :
   $$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x_{i_1}) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_{i_k}),$$
   les événements étant deux à deux incompatibles.

Exercice d'application 18. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-après

x	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

$\hookrightarrow$ On a $Y = f(X)$, avec $f : x \longmapsto x^2$. De plus, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$, donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.
Puisque $\{Y = 0\} = \{X = 0\}$, $\{Y = 1\} = \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ et $\{Y = 4\} = \{X = 2\}$, on a :

y	0	1	4
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice d'application 19. On reprend l'Exercice d'application 13. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = 2X + X^2$.

$\hookrightarrow$ On a $Y = f(X)$, avec $f : x \longmapsto x^2 + 2x$. On a $f(2) = 8$, $f(-1) = -1$ et $f(-4) = 8$, donc $Y(\Omega) = \{-1, 8\}$.
Puisque $\{Y = -1\} = \{X = -1\}$, on a $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$.
De plus, $\{Y = 8\} = \{X = 2\} \cup \{X = -4\}$, d'où $\mathbb{P}(Y = -4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = -4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Finalement,

y	-1	8
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

◇◇◇

2. Lois usuelles

2.1. Loi uniforme

Définition 20.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et X variable aléatoire sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.
On dit que X suit la **loi uniforme** sur $X(\Omega)$, notée $\mathscr{U}(X(\Omega))$, lorsque tous les événements du système complet d'événements $\Big\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}\Big\}$ sont équiprobables, autrement dit, lorsque

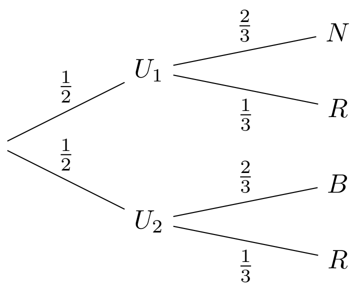
$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}\cdot$$

Cela revient à dire que $\mathbb{P}_X$ est la probabilité uniforme sur $\Big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\Big)$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(X(\Omega))$.

Exemple 21. On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. On pose $X = 1$ si « pile » sort, et $X = 0$ si « face » sort. Alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ donc X suit la loi $\mathscr{U}(\{0; 1\})$.

Exercice d'application 22. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent 3 boules chacune. L'urne U_1 contient deux boules noires et une boule rouge. L'urne U_2 contient deux boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance une pièce équilibrée. S'il obtient « pile » il effectue un tirage d'une boule dans l'urne U_1, sinon il tire une boule dans l'urne U_2. Il perd 1€ si la boule est noire, ne gagne rien si la boule est rouge et gagne 1€ si la boule est blanche. On note X le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de X.

$\hookrightarrow$ On peut modéliser l'expérience à l'aide d'un arbre, en notant U_1 (resp. U_2) : « on tire la boule dans l'urne U_1 (resp. U_2) » et N (resp. R, B) : « la boule tirée est noire (resp. rouge, bleue) ».



On a $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}_{U_1}(N) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. De plus, $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}_{U_1}(R) + \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}_{U_2}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Ainsi $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(R) = \frac{1}{3}$. Finalement, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(\{-1, 0, 1\})$.

Exercice d'application 23. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des chiffres obtenus. On pose $Y = |X - 7|$. Déterminer la loi de X et celle de Y.

$\hookrightarrow$ $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ est muni de la probabilité uniforme et $X(\Omega) = \{2, 12\}$. On a par ailleurs

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ainsi $Y(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ et :

y	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2.2. Loi de Bernoulli

Définition 24.

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0\,;\,1]$, notée $\mathscr{B}(p)$, lorsque

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q, \qquad \mathbb{P}(X=1) = p.$$

Remarque 25.

- $\mathscr{B}(0)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 0.
- $\mathscr{B}(1)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 1.
- $\mathscr{B}(1/2)$ est la loi uniforme sur $\{0; 1\}$.

Situation d'apparition de la loi de Bernoulli. La loi $\mathscr{B}(p)$ apparaît dans les expériences avec seulement deux issues : échec (0) et succès (1). Le nombre p est la probabilité d'obtenir un succès.

Exemple 26. On considère une urne opaque contenant une proportion $p \in [0; 1]$ de boules rouges et une proportion $q = 1-p$ de boules blanches. On tire une boule dans cette urne. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si la boule tirée est blanche.

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p, \qquad \mathbb{P}(X=1) = p$$

donc X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Exemple 27. Soit A un événement de l'univers probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et $p = \mathbb{P}(A)$. Alors $\mathbf{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Réciproquement, si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ où $p \in [0\,;\,1]$, alors $X = \mathbf{1}_A$ avec $A = \{X = 1\}$.

2.3. Loi binomiale

Définition 28.

Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0; 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n; p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q = 1-p.$$

Démonstration.
Ceci définit bien une probabilité sur $[\![0; n]\!]$ puisque pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant 0$ et d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

□

Remarque 29. Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 1 et p suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Situation d'apparition de la loi binomiale. La loi $\mathscr{B}(n, p)$ est celle du nombre de succès dans une suite de n expériences identiques et indépendantes ayant chacune deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$.

En effet, notons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ l'événement A_k : « le résultat de la k-ième épreuve de Bernoulli est un succès ». X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, puisque les événements A_k sont indépendants les uns des autres :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{E \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(E)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in E} A_i \cap \bigcap_{k \notin E} \overline{A_k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{E \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(E)=k}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

car il y a $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k.

Exemple 30. On considère une urne qui contient une proportion p de boules rouges et $(1-p)$ de boules blanches. On effectue n tirages avec remise dans cette urne. On note X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue des n tirages. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 31. On joue n fois à pile ou face avec la même pièce donnant « pile » avec probabilité p. On compte le nombre X de fois où on a obtenu « pile ». Alors X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Remarque 32. Si une variable aléatoire X sui la loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors $n-X$ suit la loi $\mathscr{B}(n,1-p)$.

Exercice d'application 33. On lance trois fois une pièce équilibrée et note X le nombre de « pile » obtenus. On pose $Y = |X-2|$. Donner la loi de Y.

$\hookrightarrow$ $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3, \frac{1}{2})$, donc $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ainsi $Y(\Omega) = \{0,1,2\}$ et :

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

3. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Pour connaître une variable aléatoire, on cherche sa loi. Mais pour résumer les caractéristiques de cette loi, on s'intéresse entre autres à un paramètre de position, l'espérance de la variable aléatoire. On étudiera un peu plus loi un des paramètres de dispersion, qui sont la variance et l'écart-type.

3.1. Définition et propriétés

Définition 34.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.
On note $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. On appelle **espérance** de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 35. $\mathbb{E}(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X pondérée par les $P(X = x)$. En particulier, s'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \leqslant X(\omega) \leqslant b$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.

Lorsque X dénote le gain obtenu d'une expérience aléatoire, $\mathbb{E}(X)$ est le gain que l'on peut espérer de l'expérience.

Remarque 36.

- L'espérance d'une variable aléatoire réelle ne dépend que de sa loi. En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et différentes (c'est-à-dire s'il existe au moins un $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \neq Y(\omega)$) mais que X et Y ont la même loi, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
- Si X s'exprime selon une unité, son espérance a la même unité.

Définition 37.

Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite **centrée**.

Exemple 38. Si X est une variable aléatoire constante, disons $X = C$ où $C \in \mathbf{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = C$.

Exercice d'application 39. Reprenons l'Exercice d'application 13. Donner l'espérance du gain X de ce jeu, puis l'espérance de Y.

$\hookrightarrow$ En utilisant les lois de probabilités déterminées de X et de Y déterminées avant, on a

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{4} = -1\,€ \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Lemme 40 - Formule d'atomisation.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Démonstration.
On pose $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} \{\omega\} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \Big(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big) && \text{car les événements élementaires sont deux à deux incompatibles} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} x_k \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 41.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.

1. Linéarité. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. Positivité. Si $X \geqslant 0$ (*i.e.* pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. Croissance. Si $X \geqslant Y$ (*i.e.* pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.
4. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant X \leqslant b$, alors $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.

Démonstration. 1.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X(\omega) + Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \lambda X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

2. Supposons $X \geqslant 0$. Alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$ car pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$ (par hypothèse) et $\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$ (car $\mathbb{P}$ est une probabilité).
3. Supposons $X \geqslant Y$. Alors $\mathbb{E}(X - Y) \geqslant 0$ d'après 2. et ensuite $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) \geqslant 0$ d'après 1.
4. Supposons $a \leqslant X \leqslant b$. On a $\sum_{\omega \in \Omega} a\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant b \sum_{\omega \in \Omega} b\mathbb{P}(\{\omega\})$, d'où $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$ puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité. $\square$

Proposition 42.

Soit X une variable aléatoire réelle. La variable aléatoire réelle $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Démonstration.
On a $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$ en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}$ et l'espérance d'une constante. $\square$

3.2. La formule de transfert

Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle $Y = g \circ X = g(X)$, où X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$, on peut commencer par chercher la loi de Y puis calculer

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\ \mathbb{P}(Y = y).$$

Mais connaissant la loi de X, il est plus efficace d'utiliser la formule suivante :

Théorème 43 - Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$.

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration.
D'après la formule d'atomisation,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{\omega\in\Omega} g\circ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} g\circ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} g(x_k)\mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} \mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} \{\omega\}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x_k\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}(X=x_k).
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 44. Reprenons l'Exercice d'application 13. Donner l'espérance de Y sans utiliser la loi de Y.

$\hookrightarrow$ On a, en notant $g : x \longmapsto 2x + x^2$,

$$\mathbb{E}(Y) = g(2)\times\frac{1}{4} + g(-1)\times\frac{1}{2} + g(-4)\times\frac{1}{4} = 8\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 8\times\frac{1}{4} = \frac{7}{2}.$$

Remarque 45. L'espérance de $g(X)$ ne dépend que de la loi de X.

4. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

On cherche à mesurer la façon dont une variable aléatoire X s'écarte de sa moyenne, *i.e.* son espérance, que l'on note m. On pourrait s'intéresser à $\mathbb{E}(X-m)$, mais cette quantité est toujours nulle (cf. Proposition 42). On considère donc plutôt $\mathbb{E}((X-m)^2)$.

4.1. Variance

Définition 46.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On appelle **variance** de X le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, défini par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-m)^2\right)$ où l'on a posé $m = \mathbb{E}(X)$.

$\mathbb{V}(X)$ est la moyenne pondérée des carrés des distances de X à sa moyenne pondérée ; elle mesure la dispersion quadratique de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$.

Remarque 47.
- Si X a une unité, $\mathbb{V}(X)$ a la même unité au carré.

- Le nombre $\mathbb{V}(X)$ ne dépend que de la loi de X.

Exemple 48. Si X est une variable aléatoire réelle constante, alors $\mathbb{V}(X) = 0$. En effet, on a alors $X = \mathbb{E}(X)$ et donc $\mathbb{V}(X)$ est l'espérance d'une variable réelle nulle.

Proposition 49 - Formule de Kœnig - Huygens.

Soit X une variable aléatoire réelle. On a
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Démonstration.
Notons $m = \mathbb{E}(X)$. En utilisant la linéarité de $\mathbb{E}$ et l'espérance d'une constante, on obtient :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-m)^2) = \mathbb{E}(X)^2 - 2m\mathbb{E}(X) + 2m^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2m^2 + m^2$$
d'où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - m^2$. □

Exercice d'application 50. On reprend l'Exercice d'application 13. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

↪ On a, avec la formule de transfert,
$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (-4)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2},$$
d'où
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{11}{2} - (-1)^2 = \frac{9}{2}.$$

Proposition 51.

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$.
   On obtient par conséquent : $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X+\mu) = \mathbb{V}(X)$.

Démonstration. 1. Puisque $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$ et par positivité de $\mathbb{E}$, on a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X)^2) \geqslant 0$.

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Par linéarité de $\mathbb{E}$,
$$\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \mathbb{E}((\lambda X + \mu - (\lambda \mathbb{E}(X) + \mu))^2) = \mathbb{E}((\lambda(X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(\lambda^2(X - \mathbb{E}(X))^2) = \lambda^2\mathbb{V}(X).$$
□

Remarque 52. Lorsqu'on rajoute une constante à une variable aléatoire réelle X, il est normal que sa variance ne bouge pas, puisque ses valeurs sont distribuées de la même façon que celles de X par rapport à leur moyenne. Autrement dit, sa moyenne change, mais pas les écarts à la moyenne.

Remarque 53. Il n'y a pas de forme pour la variance d'une somme de variables aléatoires de manière générale.

4.2. Écart-type

Définition 54.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **écart-type** de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, et défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X.

Remarque 55.

1. $\sigma(X)$ est correctement définie car $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$ par positivité de l'espérance.
2. Si X est exprimée dans une certaine unité, l'écart-type de X a la même unité.
3. L'écart-type d'une variable aléatoire constante est nul.

Exemple 56. En reprenant les notations de l'Exercice d'application 13, on a $\mathbb{V}(X) = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Définition 57.

Une variable aléatoire réelle de variance ou d'écart-type égal à 1 (c'est la même chose), est dite **réduite**.

Proposition 58.

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $\sigma(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda|\sigma(X)$.
   On obtient par conséquent : $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$ et $\sigma(X + \mu) = \sigma(X)$.
3. La variable aléatoire $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ où $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$ est une variable aléatoire centrée et réduite.

Démonstration.

1. Immédiat avec la Proposition 51.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. D'après la Proposition 51, on a
$$\sigma(\lambda X + \mu) = \sqrt{\mathbb{V}(\lambda X + \mu)} = \sqrt{\lambda^2 \mathbb{V}(X)} = |\lambda|\sigma(X).$$
3. Par linéarité de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$, donc Y est centrée.
   Via 1. et 2., $\sigma(Y) = \frac{1}{|\sigma|}\sigma(X) = \frac{1}{\sigma}\sigma = 1$, donc Y est réduite. □

5. Espérance et variance des lois usuelles

5.1. Variables aléatoires constantes

Soit c un nombre fixé et X une variable aléatoire égale à c.

$$\mathbb{E}(X) = C \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = 0.$$

5.2. Loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$

Proposition 59.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Démonstration.

- $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$

- On a, avec la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

□

Exercice d'application 60. Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a \leqslant b$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y suivant une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$

$\hookrightarrow$ Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, b-a+1]\!])$, alors $X+a-1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ et ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X+a-1) = \mathbb{E}(X) + a - 1 = \frac{b-a+1+1}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$$

et

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

5.3. Variable aléatoire de Bernoulli

Proposition 61.

Soit $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On note $q = (1-p)$.

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = pq.$$

Démonstration.
On a $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) = p$.
Avec la formule de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) = p$, donc $\mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$. □

Exemple 62. Soit A un événement de $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On a vu que $\mathbf{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$, d'où

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A) = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A)).$$

5.4. Loi binomiale

Proposition 63.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0\,;\,1]$. On note $q = 1-p$.

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = npq$$

Démonstration. • On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or, d'après la formule du capitaine, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(X) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ & = & \displaystyle n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell+1}(1-p)^{n-1-\ell} \\ & = & \displaystyle np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-1-\ell} \\ & = & np(p+1-p)^{n-1} \\ & = & np.\end{array}$$

- Pour calculer la variance, il reste à déterminer $\mathbb{E}(X^2)$, mais il est plus aisé de calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$. D'après la formule du transfert,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

  Soit $k \in [\![0,2]\!]$. Alors

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

  d'où

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(X(X-1)) & = & \displaystyle n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\ & = & \displaystyle n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell+2}(1-p)^{n-\ell-2} \\ & = & \displaystyle n(n-1)p^2\sum_{ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-2-\ell} \\ & = & n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} \\ & = & n(n-1)p^2.\end{array}$$

  Donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np$. Finalement,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

$\square$

Exercice d'application 64. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$.

$\hookrightarrow$ $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ donc, d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}p)^k(1-p)^k = (1-p+\mathrm{e}p)^n.$$

6. Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

Lemme 65 - Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration.
Notons $p = \mathbb{P}(X \geqslant a)$. Puisque $\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}) = p$. Donc

$$a\mathbb{P}(X \geqslant a) = a\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}) = \mathbb{E}(a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}).$$

Soit $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in \{X \geqslant a\}$, alors $X(\omega) \geqslant a$ et ainsi $a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}(\omega) = a \leqslant X(\omega)$. Si $\omega \notin \{X \geqslant a\}$, alors $a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}(\omega) = 0 \leqslant X(\Omega)$. Donc $a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}} \leqslant X$.
Par croissance de l'espérance, on en déduit que $\mathbb{E}(a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}) \leqslant \mathbb{E}(X)$, donc $a\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(X)$ puis, puisque $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$. □

Remarque 66. Ce lemme n'est intéressant que si a est grand et plus précisément lorsque $a > \mathbb{E}[X]$.

Théorème 67 - Inégalité de Bienaymé - Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ non nul. Pour tout $d > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ avec $a = \varepsilon^2$.Alors

$$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2}$$

donc

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

car l'événement $\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right\}$ est égal à l'événement $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$. □

Remarque 68. Cette propriété n'a d'intérêt que si $\varepsilon > \sigma$. Elle explique que la probabilité que X soit « loin » de sa moyenne est petite et décroît au delà de σ en $\mathrm{O}\big(1/d^2\big)$ (ε étant un minorant de la distance de X à sa moyenne).

Exercice d'application 69. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On lance n fois un dé équilibré et on note Y_n la fréquence d'apparition du chiffre 6. Donner une valeur de n telle que la probabilité que Y_n soit comprise entre $\frac{1}{6} - \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{100}$ est-elle strictement supérieure à $0,95$?

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On remarque que

$$\mathbb{P}(\left(\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) > 0,95 \iff \mathbb{P}(\left(\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) \leqslant 0,05.$$

Notons X_n le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers. On a $X_n \hookrightarrow (n, \frac{1}{6})$. De plus, $Y_n = \frac{X_n}{n}$, donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_n) = \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{5n}{36n^2} = \frac{5}{36n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geqslant 0,01) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{0,01^2} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{5 \times 10^4}{36n}.$$

Pour pouvoir affirmer que $\mathbb{P}((\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}) > 0,95$, il suffit donc que $\frac{5\times 10^4}{36n} \leqslant 0,05$, *i.e.* $n \geqslant \frac{10^6}{36}$.

7. Couple de variables aléatoires

7.1. Présentation

Soit $(\Omega; \mathcal{P}(\omega); \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Alors

$$(X, Y): \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & R^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

Remarque 70. 1. Définir un couple de variables aléatoires, c'est se donner deux variables aléatoires relatives à la même expérience.

2. On peut définir l'univers image d'un couple (X, Y) de variables aléatoires par

$$(X, Y)(\Omega) = \big\{\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \mid \omega \in \Omega\big\}.$$

3. Dans la pratique, on préfère parfois travailler avec le produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ plutôt que sur l'univers image $(X, Y)(\Omega)$, même si $(X, Y)(\Omega)$ n'est qu'une partie du produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exemple 71. On tire simultanément au hasard deux nombres distincts dans l'intervalle d'entiers $[\![1; n]\!]$. L'univers ici est $\Omega = \big\{\{i, j\} \mid i \in [\![1; n]\!],\ j \in [\![1; n]\!] \text{ et } i \neq j\big\}$. On considère les variables aléatoires X et Y où X est la valeur du plus petit nombre tiré et Y la valeur du plus grand. On a

$$X(\Omega) = [\![1; n-1]\!],\ Y(\Omega) = [\![2; n]\!] \text{ donc } \ X(\Omega) \times Y(\Omega) = \big\{(x, y) \mid x \in [\![1; n-1]\!] \text{ et } y \in [\![2; n]\!]\big\}$$

ce qui n'est pas exactement l'univers image $(X, Y)(\Omega) = \Big\{(x, y) \in [\![1; n]\!]^2 \mid 1 \leqslant x < y \leqslant n\Big\}$.

Notation 72. On utilise les mêmes notations que pour les variables aléatoires. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires tel que X soit à valeurs dans E et Y à valeurs dans F, pour toute partie A de $E \times F$, on note $\{(X, Y) \in A\}$ l'événement

$$\{(X, Y) \in A\} = \{w \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}.$$

Proposition 73 - Systèmes complets d'événements associés à un couple de v.a..

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

1. La collection d'événements $\big\{\{X = x \text{ et } Y = y\} \mid (x, y) \in (X, Y)(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements.
2. La collection d'événements $\big\{\{X = x \text{ et } Y = y\} \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements.

Démonstration.
Ces événements sont clairement incompatibles deux à deux et leur réunion fait Ω. Dans la deuxième collection, certains événements sont l'événement impossible. $\square$

7.2. Loi conjointe et lois marginales d'un couple de variables aléatoires

Théorème 74.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
La **loi conjointe** du couple (X,Y) est la probabilité $\mathbb{P}_{(X,Y)}$, qui est définie sur $\Big((X,Y)(\Omega);\mathcal{P}((X,Y)(\Omega))\Big)$ par :

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}((X,Y)(\Omega)) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in A\}\big). \end{array}$$

Démonstration.
C'est bien une probabilité :

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}\big((X,Y)(\Omega)\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et pour toutes parties disjointes A et B de $(X,Y)(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X,Y)}(A\cup B) &= \mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in A\cup B\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega),Y(\omega))\in A\cup B\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega),Y(\omega))\in A\}\cup\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega),Y(\omega))\in B\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega),Y(\omega))\in A\}\big)+\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid (X(\omega),Y(\omega))\in B\}\big) \\
&\qquad \text{car les deux événements sont incompatibles} \\
&= \mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in A\}\big)+\mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in B\}\big) \\
&= \mathbb{P}_{(X,Y)}(A)+\mathbb{P}_{(X,Y)}(B).
\end{aligned}$$

□

Remarque 75.

1. Pour définir complètement $\mathbb{P}_{(X,Y)}$, il suffit de se donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$ pour tout $(x,y)\in(X,Y)(\Omega)$. On préfère parfois donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, sachant que $\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = 0$ lorsque $(x,y)\notin(X,Y)(\Omega)$. On rassemble généralement les résultats dans un tableau.
2. On a toujours $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = 1$.

Définition 76.

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$, alors les probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ de X et Y sont appelées **lois marginales**.

Proposition 77.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. Pour $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y = y\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) \in A \times \{y\})$$

$$\text{et } \mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y \in B\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) \in \{x\} \times B)$$

En particulier,

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\})$$

$$\text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}).$$

Remarque technique 78. Dans le tableau qui donne la loi du couple (X, Y), on obtient la loi de X et la loi de Y dans les marges (d'où le nom de « loi marginales »).

Exercice d'application 79. Une urne contient 2 boules bleues, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules bleues obtenues et Y le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y).

$\hookrightarrow$ On a $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$. De plus,

$$(X, Y)(\Omega) = \{\, (x, y) \in [\![0, 2]\!] \times [\![0, 3]\!] \mid 3 - (x + y) \in [\![0, 2]\!]\}$$

car la donnée des valeurs de $(X(\omega), Y(\omega))$ déterminer l'issue ω dans laquelle on a tiré $X(\omega)$ boules bleues, $Y(\omega)$ boules rouges et $3 - (X(\omega) + Y(\omega))$ boules rouges.
Par conséquent, pour tous $k \in [\![0, 2]\!]$, $\ell \in [\![0, 3]\!]$ tels que $3 - (k + \ell) \in [\![0, 2]\!]$,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(k, \ell) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{3}{\ell} \times \binom{2}{3-(k+\ell)}}{\binom{7}{3}}.$$

Notons les résultats dans un tableau :

ℓ \ k	0	1	2	$\mathbb{P}(Y = \ell)$
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{4}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{12}{35}$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	$\frac{1}{35}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

On lit ainsi les lois marginales $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

ℓ	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = \ell)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

⚠ **Attention** ⚠. La Proposition 77 assure que la loi du couple permet d'obtenir les lois marginales. Mais attention, la connaissance des lois marginales ne permet pas de connaître la loi conjointe.

Exercice d'application 80. On lance un dé rouge et un dé bleu. On note X le résultat du dé rouge, Y le résultat du dé bleu et $Z = 7 - X$.
Donner les lois conjointes et marginales de (X, Y) et (X, Z).

$\hookrightarrow$ $\Omega = [\![1, 6]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. $X(\Omega) = [\![1, 6]\!] = Y(\Omega) = Z(\Omega)$. On a :

ℓ \ k	0	1	2	4	5	6	$\mathbb{P}(Y = \ell)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

et

ℓ \ k	0	1	2	4	5	6	$\mathbb{P}(Y = \ell)$
1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On remarque que dans cet exemple, les couples (X, Y) et (X, Z) ont les mêmes lois marginales mais pas les mêmes lois conjointes.

7.3. Lois conditionnelles

Définition 81.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la **loi conditionnelle** de X sachant $\{Y = y\}$ est la probabilité

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_{\{Y=y\}} : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0;1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X \in A) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)} \end{array}$$

De même, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle** de Y sachant $\{X = x\}$ est la probabilité

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_{\{X=x\}} : & \mathcal{P}(Y(\Omega)) & \longrightarrow & [0;1] \\ & B & \longmapsto & \mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y \in B) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y \in B\})}{\mathbb{P}(X = x)} \end{array}$$

En particulier, avec les notations de la définition, $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y) = \dfrac{\mathbb{P}(Y = y \text{ et } X = x)}{\mathbb{P}(X = x)}$.

Notation 82. On rencontre parfois la notation $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$.

Proposition 83.

Avec les notations de la définition, $\mathbb{P}_{\{X=x\}}$ est une probabilité.

Exercice d'application 84. On reprend l'Exercice d'application 79. Déterminer $\mathbb{P}_{\{X=1\}}$.

$\hookrightarrow$ On a $\dfrac{\frac{2}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{1}{10}$, $\dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{\frac{6}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{3}{10}$, d'où

ℓ	0	1	2	3
$\mathbb{P}_{\{X=1\}}(Y = \ell)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	0

7.4. Loi image

On se donne un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs réelles définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et une fonction g de **deux** variables à valeurs réelles dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

On considère la nouvelle variable aléatoire

$$\begin{array}{rccl} g(X,Y) : & \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \omega & \longmapsto & g(X(\omega), Y(\omega)). \end{array}$$

On cherche à obtenir la loi de cette variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ quand on connaît la loi du couple (X, Y).

- **Première étape :** On détermine $Z(\Omega)$.

$$Z(\Omega) = \big\{g(x, y) \mid (x, y) \in (X, Y)(\Omega)\big\}$$

- **Deuxième étape :** Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on cherche les antécédents de z par g dans $(X,Y)(\Omega)$. Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \ldots; y_m\}$, on cherche tous les couples (x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), ..., (x_{i_r}, y_{j_r}) dans $(X,Y)(\Omega)$ tels que

$$g(x_{i_1}, y_{j_1}) = g(x_{i_2}, y_{j_2}) = \cdots = g(x_{i_r}, y_{j_r}) = z$$

de sorte que $\{Z = z\}$ soit la réunion des événements deux à deux incompatibles :

$$\{Z = z\} = \bigcup_{k=1}^{r} \{X = x_{i_k} \text{ et } Y = y_{j_k}\}.$$

- **Dernière étape :** On calcule $\mathbb{P}(Z = z)$ de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\{X = x_{i_k} \text{ et } Y = y_{j_k}\}).$$

Exercice d'application 85. On reprend l'Exercice d'application 79. Déterminer la loi de $Z = XY$.

$\hookrightarrow$ On rappelle $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$. Donc $XY(\Omega) \subset \{0,1,2,3,4,6\}$.
On a $XY = 0 \iff (X,Y) \in \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)+(1,0)+(2,0)\}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(XY = 0) &= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = 0) + \sum_{\ell=1}^{3} \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = \ell) \\
&= \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{3}{35} + \frac{6}{35} + \frac{1}{35} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

De plus, $XY = 1 \iff X = 1$ et $Y = 1$, d'où

$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{12}{35}.$$

En poursuivant de même, on obtient

$$\mathbb{P}(XY = 2) = \frac{3}{35} + \frac{6}{35} = \frac{9}{35}, \quad \mathbb{P}(XY = 3) = 0, \quad \mathbb{P}(XY = 4) = 0, \quad \mathbb{P}(XY = 6) = 0$$

Finalement,

x	0	1	2
$\mathbb{P}(XY = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$

7.5. Variables aléatoires indépendantes

Définition 86.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont indépendants c'est-à-dire lorsque

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Notation 87. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on notera $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 88.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. Si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y),$$

alors X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
Soient $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \{X = a \text{ et } Y = b\}\Big) \\
&= \sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \mathbb{P}(\{X = a \text{ et } Y = b\}) \qquad \text{(événements deux à deux incompatibles)} \\
&= \sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \mathbb{P}(X = a) \times \mathbb{P}(Y = b) \\
&= \sum_{b \in B} \left(\sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) \times \mathbb{P}(Y = b) \right) \\
&= \sum_{b \in B} \left(\mathbb{P}(Y = b) \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) \right)
\end{aligned}$$

Or $\sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a)$ ne dépend pas de b dans la somme en b, donc on peut le sortir de la somme en b pour obtenir :

$$\mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) = \left(\sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) \right) \left(\sum_{b \in B} \mathbb{P}(Y = b) \right) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

□

Remarque 89. Les variables X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)$. Autrement dit, il y a indépendance de X et Y lorsque le fait de savoir que $Y = y$ n'apporte rien sur la probabilité de $\{X = x\}$.

Exemple 90.

1. Dans l'Exercice d'application 79, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Dans l'Exercice d'application 80, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors que les variables aléatoires X et Z ne le sont pas.
   Puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$, les événements A : « X est paire » et B : « Y est un multiple de 3 » sont indépendants. On en déduit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Exercice d'application 91. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{U}(\{0; 1\})$.

On pose $Z = |X - Y|$. Montrer que X et Z sont indépendantes.

$\hookrightarrow$ On a $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, avec

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(Z=0) & = & \mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=0) + \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) & \\ & = & \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) & \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} & \\ & = & \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

et $\mathbb{P}(Z=1) = 1 - \mathbb{P}(Z=0) = \dfrac{1}{2}$. De plus, si $\alpha \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X=\alpha \text{ et } Z=1) = \mathbb{P}(X=\alpha \text{ et } Y=|1-\alpha|) = \mathbb{P}(X=\alpha) \times \mathbb{P}(Y=|1-\alpha|) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

et $\mathbb{P}(X=\alpha) \times \mathbb{P}(Z=1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. De même,

$$\mathbb{P}(X=\alpha \text{ et } Z=0) = \mathbb{P}(X=\alpha \text{ et } Y=\alpha) = \mathbb{P}(X=\alpha) \times \mathbb{P}(Y=\alpha) = \frac{1}{4}$$

et $\mathbb{P}(X=\alpha) \times \mathbb{P}(Z=0) = \dfrac{1}{4}$. Finalement $X \perp\!\!\!\perp Z$.

Proposition 92.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit f et g deux applications à valeurs réelles, f étant définie au moins sur $X(\Omega)$ et g étant définie au moins sur $Y(\Omega)$.
Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple 93. On reprend l'Exercice d'application 80. On a vu que $X \perp\!\!\!\perp Y$ et on rappelle que $Z = 7 - X$. On obtient alors que Z et Y sont indépendantes (car $Z = f(X)$, avec $f : x \longmapsto 7 - x$).

7.6. Indépendance mutuelle

Définition 94.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.
On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $A_1 \in X_1(\Omega), \ldots, A_n \in X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 95.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et $A_1 \in X_1(\Omega), \ldots, A_n \in X_n(\Omega)$. On a

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

et en particulier si $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$ alors

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Démonstration.
Conséquence de la définition d'événements mutuellement indépendants. □

Proposition 96.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
$X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Démonstration.
Admis. □

Proposition 97.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et $g_1, \dots g_n$ des applications respectivement définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$.
Les variables aléatoires $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.
Plus généralement, toutes variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_k$, définies à partir de $X_1, \dots, X_n$ de sorte que chaque X_i n'intervient que dans au plus une des variables aléatoires Y_j, sont mutuellement indépendantes.

Exemple 98. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Les variables aléatoires $X + Y^2$ et $3Z + 1$ sont mutuellement indépendantes.

7.7. Somme de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes

Proposition 99.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;\,1]$.
Alors la variable aléatoire $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation. Une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ compte le nombre de succès dans n expériences aléatoires indépendantes où la probabilité de succès de chaque expérience est p.

Démonstration.
On a clairement $S(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On note $E_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0; 1\}^n \mid x_1 + \cdots + x_k = n\}$. Avec cette notation

$$\{S = k\} = \{X_1 + \cdots + X_n = k\} = \bigcup_{(x_1, \dots, x_n) \in E_k} \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$$

Les événements intervenant dans cette réunion sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1, X_2=x_2,\dots,X_n=x_n) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x_2)\cdots\mathbb{P}(X_n=x_n) \quad \text{par indépendance mutuelle} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_1=x_2)\cdots\mathbb{P}(X_1=x_n) \quad \text{car } X_1,\dots,X_n \text{ ont la même loi.}
\end{aligned}$$

Dans chacun des termes de la somme précédente, on trouve un produit de facteurs valant $\mathbb{P}(X_1=0)$ ou $\mathbb{P}(X_1=1)$. Puisque $x_1+\cdots+x_n=k$, il y a exactement k fois le facteur $\mathbb{P}(X_1=1)$ et $n-k$ fois le facteur $\mathbb{P}(X_1=0)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=1)^k\mathbb{P}(X_1=0)^{n-k} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= p^k(1-p)^{n-k} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} 1 \\
&= p^k(1-p)^{n-k}\,\mathrm{Card}(E_k) \\
&= \binom{k}{n} p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

et donc S suit une loi binomiale de paramètres n et p. □

Remarque 100. En reprenant les notations de la définition, on peut retrouver l'espérance de $S \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np.$$

7.8. Espérance et variance pour des variables aléatoires indépendantes

Proposition 101.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.
Notons $Z=XY$ et pour tout $z\in Z(\Omega)$, on note $E_z=\{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \mid xy=z\}$.

$$\mathbb{P}(Z=z) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{(x,y)\in E_z} \underbrace{\{X=x \text{ et } Y=y\}}_{\substack{\text{événements deux à} \\ \text{deux incompatibles}}}\Big) = \sum_{(x,y)\in E_z} \mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\}) = \sum_{(x,y)\in E_z} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

où la dernière égalité découle de l'indépendance de X et de Y. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z=z)\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\Big(\sum_{(x,y)\in E_z} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \Big(\sum_{(x,y)\in E_z} z\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \underbrace{\sum_{z\in Z(\Omega)} \Big(\sum_{(x,y)\in E_z}}_{\substack{\text{on regroupe tous les couples } (x,y)\\ \text{par valeurs de leur produit } xy}} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\ \mathbb{P}(Y=y)\Big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y)\\
&= \mathbb{E}(Y)\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\\
&= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 102.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.
Voir TD. □

Remarque 103. On peut très bien avoir $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ sans que X et Y soient indépendants.

Exemple 104. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$ et $Y=\mathbf{1}_{X=0}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= -1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0\\
\mathbb{E}(Y) &= 0\times\mathbb{P}(Y=0)+1\times\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(x=0)=\frac{1}{3}\\
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X=0})=\mathbb{E}(0)=0
\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et pourtant X et Y ne sont pas indépendantes.
En effet, $\mathbb{P}(\{X=1 \text{ et } Y=1\})=\mathbb{P}(\{X=1 \text{ et } X=0\})=0$ et $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\neq 0$.

Proposition 105.

Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors,

$$\mathbb{E}(X_1X_2\cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\cdots\mathbb{E}(X_n)$$

$$\mathbb{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)+\cdots+\mathbb{V}(X_n).$$

Démonstration.
On utilise une récurrence sur n, la Proposition 101 et le Corollaire 102. □

Remarque 106. On peut ainsi retrouver la variance d'une loi binomiale de paramètre n et p (où $(n,p) \in \mathbf{N}^\star \times [0\,;\,1]$). Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Posons $S = X_1+\cdots+X_n$. D'après ce qui précède, $S \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$