

Intégration sur un segment

1. Intégrale d'une fonction en escalier

Dans toute cette section a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Définition 1.

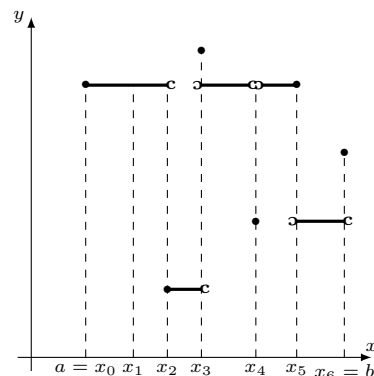
On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute famille finie $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ strictement croissante d'éléments de $[a, b]$ c'est-à-dire telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Définition 2.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$. On dit que la fonction f est **en escalier** si, et seulement si, il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ du segment $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n-1$). Une telle subdivision est dite adaptée à la fonction f . On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier.

Remarque 3.

1. Les valeurs de f aux points x_i n'ont pas d'importance.
2. Il n'existe pas qu'une subdivision adaptée à f : dans cet exemple, la subdivision obtenue en enlevant le point x_1 reste adaptée à f . De même, il est toujours possible d'ajouter des points à la subdivision. Pour une fonction en escalier f donnée, on peut former une subdivision minimale (qui contient le moins de points possibles) adaptée à f .



3. Pour deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ données, il existe toujours une subdivision de $[a, b]$ adaptée aux deux fonctions. Cela permet de justifier que les combinaisons linéaires et les produits de fonctions en escalier est une fonction en escalier. De même, il est clair que si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a, b]$.

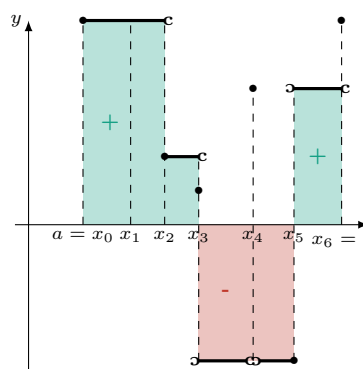
Définition 4.

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Il est clair que la quantité $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ et l'on note $\int_{[a,b]} f$ le réel

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i.$$

Remarque 5.

1. Géométriquement, $(x_{i+1} - x_i) y_i$ est égal à l'aire du rectangle limité par l'axe (Ox) , les droites d'équations $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$ et la droite d'équation $y = y_i$, affectée du signe + si ce rectangle est au dessus de (Ox) et du signe - dans le cas contraire.
2. Pour se persuader que la somme ne dépend pas de la subdivision choisie, il suffit de considérer la subdivision « minimale » associée à f . Il est alors simple de voir que la somme ne change pas lorsque l'on rajoute un point à cette subdivision.

**Proposition 6 - Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.**

1. Linéarité : pour toutes fonctions f et g en escalier sur $[a, b]$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

2. Positivité : si f est une fonction en escalier positive sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
3. Croissance : si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $f \leq g$, alors

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$$

4. Additivité des intervalles : soit $c \in]a, b[$ et f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont des fonctions en escalier et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration.

Il suffit à chaque fois de revenir à la définition avec une subdivision adaptée. □

2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

2.1. Définition

Dans cette section et la suivante, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

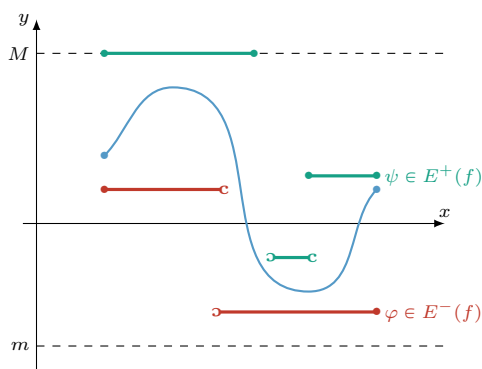
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur un segment, elle est bornée sur ce segment : il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f(x) \leq M.$$

On note $E^-(f)$ (resp $E^+(f)$) l'ensemble des fonctions en escalier inférieures (resp. supérieures) à f sur $[a, b]$:

$$E^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}_{[a,b]} : \forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x)\}$$

et $E^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}_{[a,b]} : \forall x \in [a, b], f(x) \leq \psi(x)\}.$



L'ensemble $E^-(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante égale à m . De même $E^+(f)$ est non vide car il contient la fonction constante égale à M .

Pour tout $\varphi \in E^-(f)$, on a $\varphi \leq M$, donc l'ensemble de nombres réels $\left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in E^-(f) \right\}$ est non vide et majoré par $M(b-a)$. Il possède donc une borne supérieure. De même, pour tout $\psi \in E^+(f)$, on a $m \leq \psi$, donc l'ensemble de nombres réels $\left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in E^+(f) \right\}$ est non vide et minoré par $m(b-a)$. Il possède donc une borne inférieure.

Or, pour tout $\varphi \in E^-(f)$ et tout $\psi \in E^+(f)$, on a $\varphi \leq \psi$ donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$, donc

$$\sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in E^-(f) \right\} \leq \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in E^+(f) \right\}.$$

On admet que la continuité de f implique que cette inégalité est en fait une égalité :

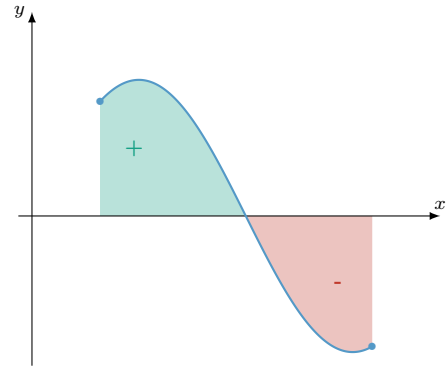
$$\sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in E^-(f) \right\} = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in E^+(f) \right\}.$$

Définition 7.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui minorent f est égale à la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui majorent f . Leur valeur commune, notée $\int_{[a,b]} f$ est appelée **intégrale** de f sur $[a, b]$.

Remarque 8. 1. Il est clair qu'une fonction constante sur $[a, b]$ est à la fois en escalier et continue sur $[a, b]$. Pour une telle fonction constante f , les deux définitions de l'intégrale de f sur $[a, b]$ (intégrale d'une fonction en escalier et intégrale d'une fonction continue) donnent la même valeur.

2. On admet que comme pour les fonctions en escalier, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe (Ox) , la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, en affectant d'un signe $+$ les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et d'un signe $-$ les parties situées en dessous.



2.2. Propriétés

Les propriétés listées dans cette partie découlent des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier. Certaines démonstrations sont techniques et ne sont pas exigibles. On ne les donnera pas dans ce cours.

Proposition 9 - Linéarité de l'intégrale.

L'application $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, autrement dit, pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Proposition 10 - Positivité de l'intégrale.

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors son intégrale sur $[a, b]$ est positive, autrement dit,

$$f \geq 0 \implies \int_{[a,b]} f \geq 0.$$

Démonstration.

La fonction identiquement nulle sur $[a, b]$ est une fonction en escalier qui minore f ce qui donne immédiatement le résultat. $\square$

Proposition 11 - Croissance de l'intégrale.

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Démonstration.

Sous ces hypothèses, la fonction $g - f$ est continue et positive sur $[a, b]$. Par positivité de l'intégrale sur $[a, b]$, on obtient $\int_{[a,b]} (g - f) \geq 0$. Or par linéarité, $\int_{[a,b]} (g - f) = \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f$ d'où le résultat. $\square$

Corollaire 12.

Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

Démonstration.

Ceci est une conséquence immédiate de l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Proposition 13 - Additivité des intervalles.

Soit $c \in]a, b[$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. On a $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

2.3. La notation $\int_a^b f(x) dx$ **Définition 14.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous $a, b \in I$, on définit le réel $\int_a^b f(x) dx$ par

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ \int_a^b f(x) dx = 0 & \text{si } a = b \\ \int_a^b f(x) dx = - \int_{[b,a]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Remarque 15.

i) La variable x qui apparaît dans l'intégrande est une variable muette. Les deux notations $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b f(t) dt$ représentent la même intégrale.

ii) Si $a > b$, $\int_a^b f(x) dx$ n'est pas l'intégrale de f sur un segment : certaines propriétés de l'intégrale ne « passent » pas avec cette notation, en particulier, les propriétés de positivité et de croissance ne sont pas conservées. En conséquence, dans la pratique, si $a > b$, il est conseillé d'utiliser $-\int_b^a f(x) dx$ à la place de $\int_a^b f(x) dx$ lorsqu'on veut majorer ou minorer une telle intégrale.

iii) On peut aussi noter $\int_a^b f$ l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Il faut alors faire attention de ne pas faire apparaître la variable d'intégration sous l'intégrale.

La propriété d'additivité des intervalles se prolonge avec cette notation :

Proposition 16 - Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a, b et c appartenant à I ,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\text{relation de Chasles})$$

et ce quel que soit l'ordre des réels a, b et c .

À partir de maintenant, lorsque dans l'énoncé d'une proposition apparaît le segment $[a, b]$, c'est que l'on a supposé que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Définition 17.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Remarque 18.

La valeur moyenne μ de f est égale à la valeur de la fonction constante sur $[a, b]$ qui a la même intégrale que f sur $[a, b]$. Autrement dit, c'est la longueur du côté du rectangle dont l'autre côté est $[a, b]$ et qui a même aire que l'aire délimitée par la courbe représentative de f , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

2.4. Fonctions d'intégrale nulle

Remarque 19. L'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction nulle sur $[a, b]$ vaut 0.

Théorème 20.

Si f est une fonction

- continue sur $[a, b]$,
- de signe constant sur tout le segment $[a, b]$,
- telle que $\int_a^b f(x) \, dx = 0$,

alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

Démonstration.

On fait la démonstration dans le cadre d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

On raisonne par contraposition : on suppose que f n'est pas partout nulle sur $[a, b]$ et l'on démontre qu'alors f n'est pas d'intégrale nulle sur $[a, b]$.

Supposons que f ne soit pas partout nulle sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |x - c| \leq \eta \implies f(x) \geq \frac{f(c)}{2}.$$

En posant $\nu = \min(\eta, \frac{b-a}{2})$, l'un au moins des segments $[c-\nu, c]$ et $[c, c+\nu]$ est inclus dans $[a, b]$ et sur ce segment que l'on notera $[\alpha, \beta]$, on a $f \geq \frac{f(c)}{2}$ et donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx && \text{puisque les deux autres termes sont positifs} \\ &\geq (\beta - \alpha) \frac{f(c)}{2} > 0. \end{aligned}$$

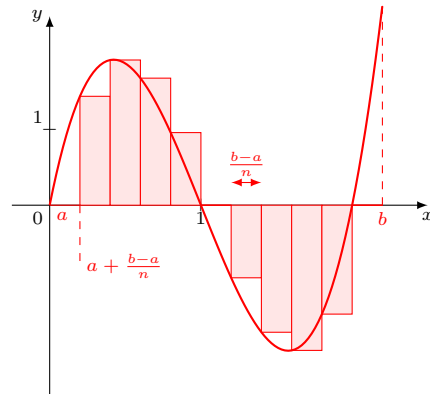
Ainsi l'intégrale de f est non nulle. Le théorème est démontré. $\square$

3. Sommes de Riemann

Définition 21.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et n un entier strictement positif. Si on partage le segment $[a, b]$ en n intervalles de même longueur à l'aide de la subdivision $(a + i \frac{b-a}{n})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, on appelle somme de Riemann correspondant à cette subdivision la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$



Remarque 22.

i) On peut également choisir pour somme de Riemann la somme $S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$,

ce qui revient à choisir l'extrémité de droite de chacun des segments de longueur $\frac{b-a}{n}$ pour tracer les rectangles.

ii) Dans chaque cas, une somme de Riemann est l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Théorème 23.

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a, b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$, autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) \, dx.$$

En particulier, pour toute fonction f continue sur le segment $[0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Remarque 24. La convergence vers $\int_a^b f(x) \, dx$ a lieu aussi pour la suite (S'_n) .

Démonstration du théorème dans le cas particulier où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \, dx$$

donc en utilisant ce qui précède et la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - S_n \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} f(x) \, dx - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \, dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} \left[f(x) - f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right] \, dx \right| \quad (\text{linéarité de l'intégrale}). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire puis la majoration classique de la valeur absolue d'une intégrale, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - S_n \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} \left[f(x) - f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right] \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} \left| f(x) - f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right| \, dx. \end{aligned}$$

La fonction f' étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée sur ce segment et il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est M -lipschitzienne sur ce segment :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

En particulier, on obtient que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $x \in \left[a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n} \right]$,

$$\left| f(x) - f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq M \left| x - \left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq M \frac{b-a}{n}$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} \left| f(x) - f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right| \, dx \leq \int_{a+i \frac{b-a}{n}}^{a+(i+1) \frac{b-a}{n}} M \frac{b-a}{n} \, dx = M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2.$$

Ainsi, on obtient

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2$$

donc

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} M \frac{(b-a)^2}{n} = 0$, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$.
□

Grâce aux sommes de Riemann, il est possible de calculer des valeurs approchées d'intégrales mais cette méthode n'est pas très performante (en termes de rapidité de convergence). Cependant, les sommes de Riemann sont utiles pour trouver la limite de certaines suites.

Exercice d'application 25. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.

↔ Pour ce genre d'exercice, il suffit de transformer l'expression de u_n pour l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

où f est une fonction continue. Ainsi on considère u_n comme une somme de Riemann de f entre 0 et 1.

4. Calcul intégral

4.1. Théorème fondamental de l'analyse

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.

Lemme 26.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (où $a < b$) et $\mu = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$ sa valeur moyenne sur $[a, b]$. Il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Démonstration.

Sur le segment $[a, b]$, la fonction f est continue donc elle est bornée sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$.

On sait que $\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f$. Par croissance de l'intégrale sur $[a, b]$ et en divisant par le nombre positif $b - a$, on obtient

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \sup_{[a,b]} f$$

c'est-à-dire $\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f$ donc $\mu \in f([a, b])$ et donc il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$. □

Théorème 27 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ et a un point de I . La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f sur I . C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration.

La fonction f étant continue sur I , la fonction F_a est bien définie sur I . Nous allons montrer que F_a est dérivable en tout point x de I et que $F'_a(x) = f(x)$.

Soit $x \in I$. Pour tout réel h non nul tel que $x + h \in I$, on a

$$\begin{aligned} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Ce quotient est donc la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si $h < 0$).

Comme f est continue, cette valeur moyenne est atteinte en un point c_h compris entre x et $x+h$ et

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(c_h) \text{ avec } |c_h - x| \leq h.$$

Ainsi, lorsque h tend vers 0, c_h tend vers x et puisque f est continue en x , $f(c_h)$ tend vers $f(x)$. Par conséquent, la limite du quotient précédent existe et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x).$$

On a démontré que F_a est dérivable en x de dérivée $F'_a(x) = f(x)$ donc F_a est une primitive de f sur I .

Il est clair que F_a s'annule en a . Si G est une autre primitive de f sur I , alors il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $G = F_a + C$. En particulier, on a $G(a) = C$, de sorte que G s'annule en a si, et seulement si, $C = 0$. Il en résulte que F_a est l'unique primitive de f qui s'annule en a . $\square$

Corollaire 28.

1. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.
2. Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. Pour toute primitive F de f sur I ,

$$\forall x \in I, \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

Démonstration.

1) Évident avec le théorème précédent. 2) D'après la preuve du théorème précédent, pour tout $x \in I$, $F(x) = F_a(x) + F(a)$, c'est-à-dire $F(x) = \int_a^x f(t) dt + F(a)$ et le résultat en découle immédiatement.

3) C'est une conséquence du point précédent, f étant une primitive de f' sur I . $\square$

Notation :

Dans un calcul d'intégrale, on utilise la notation $[F(t)]_a^b$ pour désigner la différence $F(b) - F(a)$. On écrit ainsi, si F est une primitive de f sur $[a, b]$: $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment se ramène, à chaque fois que c'est possible, à la recherche d'une primitive de cette fonction. Dans certains cas, l'expression d'une primitive peut être très compliquée et il se peut aussi qu'une primitive ne puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles, il faut alors définir de nouvelles fonctions (cf. la définition du logarithme népérien).

4.2. Intégration par parties

Cette méthode est basée sur la dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Théorème 29 - Formule d'intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Pour tous a et b appartenant à I ,

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Démonstration.

Démonstration faite en début d'année. □

La méthode d'intégration par parties est en général utile pour éliminer dans un produit une fonction qui n'est pas simple à primitiver (comme $\ln$, Arcsin , Arctan ...) et dont la dérivée s'intègre plus aisément. Elle permet aussi de calculer des intégrales dépendant d'un paramètre par récurrence (par exemple les intégrales de Wallis, un classique : $\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$).

4.3. Changements de variables

Cette méthode est basée sur la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.

Théorème 30 - Formule de changement de variables.

Soit f une fonction continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J . Pour tous réels a et b éléments de I ,

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

Démonstration.

Démonstration faite en début d'année. □

5. Formules de Taylor

5.1. La formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 31 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Pour tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration.

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ la propriété : «pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

• $\mathcal{H}_0$ est vraie : si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a déjà vu que $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ pour tout a et b dans I .

• Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et soit a et b deux réels dans I . La fonction f est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et l'on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

On intègre par parties le terme complémentaire (la fonction $f^{(n+1)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I) :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

et le résultat est démontré au rang $n+1$. □

Pour $a = 0$, on obtient la formule suivante :

Théorème 32 - Formule de Taylor avec reste intégral en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I .

$$\text{Pour tout } x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Exemple 33. En appliquant à la fonction cosinus la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, on obtient :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t) dt.$$

Comme la fonction sinus est positive sur $[0; \pi]$ et négative sur $[-\pi; 0]$,

$$\forall x \in [-\pi; \pi], \quad \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t) dt \geq 0$$

ce qui donne :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

5.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est exacte mais le reste intégral n'est pas très maniable. Or il nous suffit souvent de connaître une majoration du reste. C'est ce que donne l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 34 - Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a, b) \in I^2$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et b , alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration.

C'est un corollaire de la formule de Taylor avec reste intégral. Supposons que $a \leq b$. Si l'on applique cette formule à f sur I , on obtient :

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \\ &= M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b \\ &= M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Le cas où $b \leq a$ se démontre de façon similaire. □

Remarque 35. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment dans le théorème précédent, l'existence de M est assurée. On peut choisir en particulier $M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Théorème 36 - Inégalité de Taylor-Lagrange en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $x \in I$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités 0 et x , alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque technique 37.

$$1. \forall x \in \mathbf{R}, \quad \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24} \quad \text{puisque :} \quad \forall u \in \mathbf{R}, \quad |\sin^{(4)}(u)| = |\sin(u)| \leq 1.$$
$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$
$$\begin{array}{ll} \text{si } x \geq 0 & \forall y \in [0, x], \quad |\exp^{(n+1)}(y)| = |e^y| \leq e^x \\ \text{si } x \leq 0 & \forall y \in [x, 0], \quad |\exp^{(n+1)}(y)| = |e^y| \leq 1 \end{array}$$
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) \right| = \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Théorème 38 - Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors il existe une fonction ε définie sur I telle que

Autrement dit

ou encore

Si $a = 0$, on obtient

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Démonstration.

- PCSI 2

- Soit $n \geq 1$. Notons

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} \quad \text{et} \quad \varepsilon(a) = 0.$$

Il suffit de montrer que ε tend vers 0 en a .

Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , on peut lui appliquer la formule de Taylor reste intégral en a à l'ordre $n-1$: pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

ce qui donne en posant le changement de variable $t = a + u(x-a)$ dans l'intégrale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a)) du.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a)) du - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a)) du - \frac{1}{n} f^{(n)}(a) \right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a)) du - f^{(n)}(a) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du \right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \left[f^{(n)}(a+u(x-a)) - f^{(n)}(a) \right] du \end{aligned}$$

et donc en particulier

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \left| f^{(n)}(a+u(x-a)) - f^{(n)}(a) \right| du.$$

Soit $\alpha > 0$. La fonction $f^{(n)}$ est continue en a , il existe donc un nombre réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \implies |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)| \leq \alpha.$$

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leq \eta$. Alors $\forall u \in [0, 1]$, $|a+u(x-a) - a| = u|x-a| \leq |x-a| \leq \eta$ et donc

$$\forall u \in [0, 1], \quad |f^{(n)}(a+u(x-a)) - f^{(n)}(a)| \leq \alpha.$$

Ainsi,

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \alpha du = \frac{\alpha}{n!} \leq \alpha.$$

On vient de montrer que

$$\forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \implies |\varepsilon(x)| \leq \alpha$$

(puisque si $x = a$, alors $\varepsilon(x) = 0$) autrement dit, ε tend vers 0 en a .

□

6. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment

Définition 40.

Soit $f = \Re e(f) + i \Im m(f)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a, b]$. On définit l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ comme étant le nombre complexe défini par

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \Re e(f) + i \int_{[a,b]} \Im m(f).$$

Toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles, qui ne font pas intervenir la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ restent vraies pour l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, en particulier les propriétés de linéarité et d'additivité des intervalles. Par contre la propriété de croissance n'a aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes.

On a tout de même le résultat suivant :

Théorème 41.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a, b]$. On a

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|,$$

autrement dit, le module de l'intégrale est inférieur ou égal à l'intégrale du module.

Démonstration.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a, b]$.

Si $\int_{[a,b]} f = 0$, le résultat est évident. On suppose maintenant que cette intégrale n'est pas nulle.

On écrit l'intégrale de f sous forme trigonométrique : $\int_{[a,b]} f = r e^{i\theta}$ de sorte que $r = \left| \int_{[a,b]} f \right|$.

On considère maintenant la fonction g définie par $g = e^{-i\theta} f$. Par la propriété de linéarité de l'intégrale,

$$\int_{[a,b]} g = e^{-i\theta} \int_{[a,b]} f = r.$$

Et donc l'intégrale de g est un nombre réel. Par ailleurs, on a

$$\int_{[a,b]} g = \int_{[a,b]} \Re e(g) + i \int_{[a,b]} \Im m(g),$$

et par unicité des parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe, on en déduit que

$$\int_{[a,b]} \Re e(g) = r \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \Im m(g) = 0.$$

On peut maintenant majorer l'intégrale de la fonction réelle $\Re e(g)$:

$$r = \left| \int_{[a,b]} \Re e(g) \right| \leq \int_{[a,b]} |\Re e(g)|.$$

Comme $|\Re(g)| \leq |g| = |f|$, on obtient par la propriété de croissance de l'intégrale d'une fonction réelle

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

□

Définition 42.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction à valeurs complexes est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I si ses parties réelles et imaginaires le sont.

Théorème 43.

Soit u et v deux fonctions à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Pour tous a et b appartenant à I ,

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Théorème 44.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J (**φ est donc une fonction à valeurs réelles!**). Pour tous réels a et b éléments de I ,

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \, dy.$$

Théorème 45 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Pour tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt.$$