

Chapitre 16

Développements limités

Elle peut sembler un paradoxe, mais toutes les sciences exactes sont dominées par l'idée de l'approximation.

Bertrand Russell

Dans ce chapitre, nous allons voir comment approcher localement une fonction par des fonctions polynomiales. Cette approximation locale permet l'étude locale du graphe d'une fonction (tangentes et asymptotes en particulier). C'est aussi un outil pratique pour obtenir des équivalents et calculer des limites.

Dans ce chapitre D désigne une partie de $\mathbf{R}$ de la forme $D = I$ ou bien $D = I \setminus \{\alpha\}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point et α est un point de I ou une de ses extrémités. De plus, n désignera un entier naturel. Enfin, $\mathbf{K}$ désignera le corps des réels $\mathbf{R}$ ou celui des complexes $\mathbf{C}$.

1. Définition et premières propriétés

Définition 1.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_n(x - a) + o((x - a)^n)$$

ou de manière équivalente

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P_n(h) + o(h^n)$$

ou encore, en notant $P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - a)^k + o((x - a)^k).$$

Le polynôme P_n est appelé **partie principale** ou **régulière** du développement limité.

Remarque 2. 1. Dans ces formules, il ne faut surtout pas développer les puissances de $x - a$, car elles sont intéressantes à considérer lorsque l'on se situe au voisinage de a .

2. En posant $g(h) = f(a + h)$, on peut toujours se ramener à un développement limité en 0, et dans la suite du cours, on ne considérera que des développements limités au voisinage de 0.

3. Désormais, lorsqu'on parlera du développement limité en 0 (respectivement en a) d'une fonction f définie sur D , cela signifiera implicitement que 0 (respectivement a) est un point ou une extrémité de D .

4. Quand on écrit un développement limité, le degré maximal des monômes qui apparaît avant $\text{o}((x - a)^n)$ est inférieur ou égal n . Une écriture comme

n'est pas un développement limité. Puisque $x^4 = o(x^3)$, on peut écrire

et l'on a maintenant un développement limité à l'ordre 3.

- $$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^4 + o(x^6)$$

Exemple 3. La fonction $f :]-1; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ a un $\text{DL}_4(0)$. En effet,

$$\begin{array}{ccc} & & x \longmapsto x - x^2 + x^3 \ln(1+x) + 2x^4 \\ \text{si } x > -1, & & \end{array}$$

En effet, il est clair que $2x^4 = o(x^2)$ et $x^3 \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4$, d'où $x^3 \ln(1+x) = o(x^2)$. Ainsi,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + o(x^2).$$

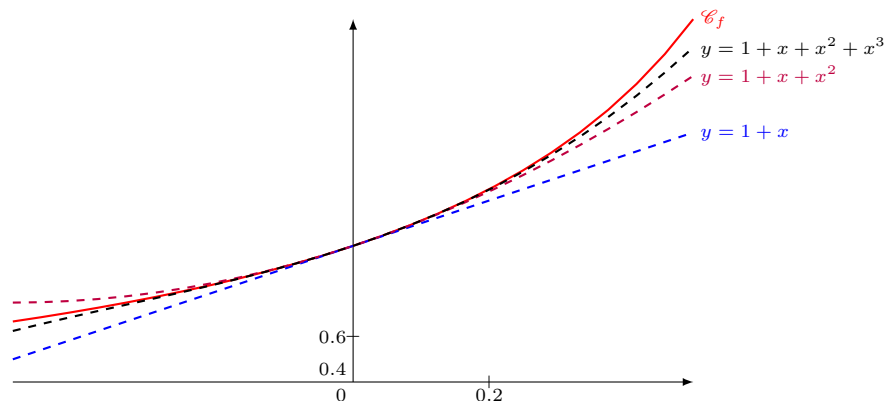
Exercice d'application 5. Déterminer le $\text{DL}_2(0)$ et le $\text{DL}_7(0)$ de $x \mapsto (1+x)^4$.

$$(1+x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 4x + 6x^2 + o(x^2)$$
$$(1+x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + o(x^7).$$

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Or $\frac{x}{1-x} x^n = o(x^n)$, d'où

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$



Complément : notons qu'en remplaçant x par $-x$ dans la formule précédente, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

⚠ Attention ⚠. Deux fonctions admettant les mêmes développements limités à tous les ordres en un point peuvent être différentes au voisinage de ce point.

Par exemple, considérons la fonction

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$\frac{f(x)}{x^n} = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{n}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Ainsi,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n).$$

La fonction f admet les mêmes développements limités que la fonction nulle (en effet pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 = o(x^n)$) et bien sûr f n'est pas la fonction nulle.

Un développement limité n'est donc qu'une propriété *locale* : une fonction possède un unique développement limité à l'ordre n en un point mais les développements limités à tous les ordres en un point d'une fonction ne suffisent pas pour la caractériser entièrement.

Proposition 7.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On suppose que f admet un $\text{DL}_n(a)$.

1. La partie régulière de ce développement limité est unique.
2. f admet aussi un $\text{DL}_p(a)$ pour tout entier naturel $p \leq n$. De plus, la partie principale est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à p de la partie régulière du $\text{DL}_n(a)$ (on parle de **troncature** à l'ordre p).

Démonstration. 1. Suppose par l'absurde qu'il existe deux $(n+1)$ -uplets $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$ différents tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Notons p le plus petit indice de $\llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $a_p \neq b_p$. En faisant la différence de ces deux développements limités, on obtient, puisque les p premiers coefficients sont égaux,

$$(a_p - b_p)(x - a)^p + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)(x - a)^k \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n)$$

et, en divisant le tout par $(x - a)^p$, on obtient qu'il existe $\varepsilon \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$ qui tend vers 0 en a telle que

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{a\}, \quad b_p = a_p + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)x^{k-p} + (x - a)^{n-p}\varepsilon(x).$$

Lorsqu'on prend la limite en a , on obtient $a_p = b_p$ ce qui contredit la minimalité de p .

2. Immédiat en observant que pour tout $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $(x - a)^j = o((x - a)^p)$. $\square$

Exercice d'application 8. Déterminer la troncature à l'ordre 4 du développement limite $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + 2x^4 + x^5 + o(x^6)$

$\hookrightarrow$ On a immédiatement $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + 2x^4 + o(x^4)$.

Définition 9.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On suppose que f admet un $\text{DL}_n(a)$ de partie régulière non nulle :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Notons p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. On appelle **forme normalisée** de ce développement limité le développement

$$f(x) = (x - a)^p (a_p + a_{p+1}(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p})),$$

i.e.

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p})).$$

Proposition 10.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$ dont la forme normale du développement limité à l'ordre n en a est :

$$f(x) = (x - a)^p (a_p + a_{p+1}(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p}))$$

(donc $a_p \neq 0$). Alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x - a)^p$.

Démonstration.

En tronquant à l'ordre p , on a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$, d'où $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x - a)^p + o(a_p(x - a)^p)$ puis $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x - a)^p$. $\square$

Corollaire 11.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$ dont la forme normale du développement limité à l'ordre n en a est :

$$f(x) = (x - a)^p (a_p + a_{p+1}(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p}))$$

(donc $a_p \neq 0$). Alors $f(x)$ est du même signe que $a_p(x - a)^p$ si x est au voisinage de a .

Démonstration.

Immédiat en utilisant le signe local d'un équivalent. $\square$

Sous les mêmes hypothèses que la proposition, la fonction $x \mapsto f(x) - a_p(x-a)^p$ possède un DL à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x \rightarrow a}{=} a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si la partie régulière de celui-ci n'est pas nulle et possède pour forme normalisée

$$f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x \rightarrow a}{=} (x-a)^q (a_q + a_{q+1}(x-a) + \dots + a_n(x-a)^{n-q} + o(x^{n-q})),$$

où $a_q \neq 0$, on obtient l'équivalent $f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_q(x-a)^q$.

Proposition 12.

Supposons que f a un $DL_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire), son développement limité ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration.

Soit f une fonction paire admettant un développement limité à l'ordre n en 0. On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k + o(x^n).$$

Par unicité du développement limité, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = (-1)^k a_k$. Ce qui montre que les coefficients des puissances impaires sont nuls. La démonstration est similaire pour une fonction impaire. $\square$

Remarque 13. Cette proposition n'admet pas de réciproque : une fonction qui admet des développements limités paires en 0 à tout ordre n'est pas nécessairement paire. Un développement limité est une propriété locale et on ne peut pas déduire des développements limités des propriétés globales sur les fonctions.

2. Existence d'un développement limité

2.1. Régularité et développement limité

Proposition 14.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$.

1. f a un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a . Le cas échéant,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1).$$

2. f a un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a . Le cas échéant,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Démonstration. 1. Supposons que f a un $DL_0(a)$, qu'on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + o(1)$. Par définition du petit o , $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} a_0$, donc f est continue en a et $a_0 = f(a)$.

Réciproquement, supposons que f est continue en a . Alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$, puis $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

2. Voir cours de dérivation. □

Exemple 15. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x)$.

Remarque 16. Si f est une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ admettant un $DL_1(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a),$$

alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- le prolongement par continuité de f en a est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$.

Exercice d'application 17. Etudier $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ au voisinage de 0. On admettra que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$\hookrightarrow$ On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, donc f a un $DL_1(0)$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.

⚠ Attention ⚠. Ce résultat ne se généralise pas pour des développements limités d'ordre supérieur.

Exemple 18. Considérons $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbf{R}^*$.

- f admet un $DL_2(0)$. En effet, $\sin$ est bornée et donc $f(x) = x^2 \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, donc $f(x) = o(x^2)$.
- f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (cf. Remarque 16).
- f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, avec pour tout $n \neq 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

- f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (cf. Remarque 16 ou le théorème de la limite de la dérivée).
- Par contre, f n'est pas deux fois dérivable en 0, car

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

n'a pas de limite en 0.

2.2. Formule de Taylor-Young

Théorème 19 - Formule de Taylor-Young.

Soit $f \in \mathcal{C}^n(D, \mathbf{K})$. Alors f possède un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

ou encore

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$ est appelé **polynôme de Taylor** de f en a à l'ordre n .

Ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet donc un DL_p ($p \leq n$) en tout point de son domaine de définition, de partie principale son polynôme de Taylor.

⚠ Attention ⚠. f peut posséder un $DL_n(a)$ sans que le k -ième coefficient de sa partie principale soit $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ (pour $k \geq 2$) : cf. Exercice d'application 18.

Exemple 20. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et elle est égale à ses dérivées successives et en particulier pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$. Elle admet ainsi un développement limité en 0 de tout ordre, donné à l'ordre n par :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Exemple 21. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; +\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1).$$

Il s'ensuit

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

3. Développements limites usuels

On donne ici les développements limités usuels en 0. Certains sont déjà démontrés, les autres le seront dans la suite de ce chapitre. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n, p \in \mathbf{N}$.

1. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
3. $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
4. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
5. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
6. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
7. $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

Exercice d'application 22. Donner les $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$\hookrightarrow$ Il suffit de considérer le dernier DL usuel avec $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\alpha = -\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3).$$

4. Opérations sur les développements limités

4.1. Développement limité d'une combinaison linéaire

Proposition 23.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f + g$ est la somme des parties régulières des DL l'ordre n en 0 de f et g .

Démonstration.

Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g en introduisant ε_1 et ε_2 deux fonctions qui tendent vers 0 en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x).$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \quad (f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + x^n (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)),$$

puis, comme $\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + o(x^n).$$

□

Proposition 24.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Si f admet un $\text{DL}_n(0)$, alors λf admet un $\text{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est le produit de la partie régulière du $\text{DL}_n(0)$ de f multipliée par λ .

Démonstration.

Sous les hypothèses de la proposition, on écrit le $\text{DL}_n(0)$ de f en introduisant ε une fonction qui tend vers 0 en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}, \quad \lambda f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \lambda x^n \varepsilon(x).$$

On conclut en remarquant que $\lambda \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

□

Exemple 25. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. On a

$$e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + o((-x)^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^{2n})$$

d'où

$$e^x + e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

Or ch est une fonction paire. On en déduit que les coefficients de sa partie régulière sont tous pairs, puis

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

De même, on montre que

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Exercice d'application 26. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\operatorname{sh} - \sin$.

↪ On a

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \quad \text{et} \quad -\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

donc

$$\operatorname{sh}(x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^6).$$

Remarque 27. Si f admet un DL à l'ordre n et si g admet un DL à l'ordre p , alors en faisant la somme des développements limités de f et g , on ne peut obtenir qu'un DL à l'ordre $\min(n, p)$ de $f + g$.

4.2. Développement limité d'un produit

Proposition 28.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f \times g$ est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et g .

Démonstration.

Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g en introduisant $P_n, Q_n \in \mathbf{K}_n[X]$, ε_1 et ε_2 deux fonctions qui tendent vers 0 en 0 :

$$\forall x \in D \setminus \{0\}, \quad f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Dans le produit $P_n Q_n$, isolons les termes de degré inférieur ou égal à n : $P_n Q_n = R_n + X^{n+1} S_n$ avec $(R_n, S_n) \in \mathbf{K}_n[X] \times \mathbf{K}[X]$. Alors, en multipliant les deux égalités précédentes traduisant les DL, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in D \setminus \{0\}, \quad (fg)(x) &= P_n(x)Q_n(x) + x^n(P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \\ &= R_n(x) + x^n(xS_n(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \end{aligned}$$

Puisque $xS_n(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, ceci montre que fg a un $DL_n(0)$. $\square$

Exercice d'application 29. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^x(1 + \sin(x))$:

↪

$$\begin{aligned} e^x(1 + \sin(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Exercice d'application 30. Déterminer le

-

$$f(x) = x^p(a_p + a_{p+1}x + \dots + a_r x^{r-p} + o(x^{r-p})) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_r x^r + o(x^r) \text{ (avec } a_p \neq 0)$$
$$g(x) = x^q(b_q + b_{q+1}x + \cdots + b_s x^{s-q} + o(x^{s-q})) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_q x^q + b_{q+1} x^{q+1} + \cdots + b_s x^s + o(x^s). \text{ (avec } b_q \neq 0),$$
$$a_p x^p \circ (x^s) = o(x^{s+p}) \quad \text{et} \quad b_q x^q \circ (x^r) = o(x^{r+q}).$$

- Si le premier terme du développement limité en 0 de f à un ordre supérieur ou égal à p commence par $a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$,
- et si le premier terme du développement limité en 0 de g à un ordre supérieur ou égal à q commence par $b_q x^q$ avec $b_q \neq 0$,

Proposition 35.
$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Exercice d'application 37. Calculer le

1. $\text{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+2x}$.
2. $\text{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+2x-x^2)$.
3. $\text{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto e^{\sin(x)}$.
4. $\text{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sin(\text{sh}(x))$.
5. $\text{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{3+\sqrt{1+2x}}$.

1. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, on a

$$\sqrt{1+2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

2. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 2x - x^2 = 0$, on a

$$\begin{aligned} \ln(1+2x-x^2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (2x-x^2) - \frac{(2x-x^2)^2}{2} + \frac{(2x-x^2)^3}{3} - \frac{(2x-x^2)^4}{4} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - 3x^2 + \frac{14x^3}{3} - \frac{17x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

3. Puisque $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a :

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

4. Puisque $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a :

$$\sin(\operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^3).$$

5. On a $\sqrt{1+2x} = 4 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$, d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{3 + \sqrt{1 + 2x}} &= \sqrt{4 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}\right)^3\right) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{x}{4} - \frac{9}{64}x^2 + \frac{73}{512}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

[illegible]

Remarque technique 38. Avec les notations de la proposition, si on veut un $\text{DL}_n(0)$ de $g \circ f$, on n'est pas toujours obligé d'utiliser un $\text{DL}_n(0)$ de g ou de f .

Exercice d'application 39. Calculer le

1. $\text{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
2. $\text{DL}_6(0)$ de $x \mapsto \sin(x^2)$.
3. $\text{DL}_4(0)$ de $x \mapsto (1+x)^x$.

1. $\sqrt{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5).$

$$2. \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6).$$

$$3. \text{ Puisque } x \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \text{ et } e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$(1+x)^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}(x^2)^2 + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + o(x^4).$$

Remarque technique 40. Pour obtenir un $DL_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \mapsto \exp(C + a_1x + a_2x^2 + \dots),$$

on utilise la propriété algébrique de l'exponentielle suivante : $f(x) = \exp(C) \exp(a_1x + a_2x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 41. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$.

$$\hookrightarrow \text{On a } \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \text{ et } e^{x+1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2). \text{ Ainsi,}$$

$$e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right) + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4).$$

Remarque technique 42. Pour obtenir un $DL_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \mapsto \ln(C + a_1x + a_2x^2 + \dots),$$

où $C \neq 0$, on utilise la propriété algébrique suivante : $f(x) = \ln(C) + \ln(1 + \frac{a_1}{C}x + \frac{a_2}{C}x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 43. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

$$\hookrightarrow \text{On a } \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \text{ et } \log(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \text{ Ainsi,}$$

$$\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

4.4. Développement limité d'un quotient

Proposition 44.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si u est une fonction définie sur D , possédant un développement limité à l'ordre n en 0, telle que $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ possède un développement limité à l'ordre n en 0. Plus précisément, si le DL de u à l'ordre n en 0 est

$$u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n),$$

alors le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est obtenu en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n dans les développements des $(u(x))^k$ (où $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$) dans l'égalité

$$\frac{1}{1-u(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + u(x) + (u(x))^2 + \dots + (u(x))^n + o(x^n).$$

Démonstration.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est la composée des fonctions $h \mapsto \frac{1}{1-h}$ et u , et le DL à l'ordre n de $h \mapsto \frac{1}{1-h}$ est

$$\frac{1}{1-h} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + o(h^n).$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat du paragraphe précédent sur les DL des composées de fonctions. $\square$

Exemple 45. $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$

Exercice d'application 46. Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-\sin(x)}$.

$\hookrightarrow$ On a $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Il s'ensuit

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + x^2 + x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

Proposition 47.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et ayant une limite finie ℓ non nulle en 0.

Si f a un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en va de même pour $\frac{1}{f}$.

Démonstration.

Il suffit d'écrire que pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1 - \frac{\ell - f(x)}{\ell}}$$

et la fonction $g : x \mapsto \frac{\ell - f(x)}{\ell}$ tend vers 0 en 0 et possède un DL à l'ordre n en 0. Il ne reste plus qu'à développer $x \mapsto \frac{1}{1-g(x)}$. $\square$

Exercice d'application 48. Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x) + \exp(x)}$.

$\hookrightarrow$ On a $f(x) = \frac{1}{\cos(x) + e^x - 2 + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\cos(x) + e^x - 2}{2}}$. Or $\frac{\cos(x) + e^x - 2}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$, donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} \right) + \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^3 \right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + o(x^3).$$

Proposition 49.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant 0 et admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Si g possède une limite finie non nulle en 0, alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en 0.

Il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'appliquer les résultats précédents. $\square$


$$\frac{1}{(\cos(x) - 1) + 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$
$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5\right) + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

On écrit un DL de f et de g à des ordres respectifs n_1 et n_2 sous forme normalisée :

$$g(x) = x^{p_2}(b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n_2-p_2})) \quad \text{avec } b_{p_2} \neq 0.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p_1-p_2} \underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n_1-p_1})}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n_2-p_2})} \right)}_{=h(x)}$$

Si l'exposant $p_1 - p_2$ devant la fraction est strictement négatif, alors $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0 donc ne possède pas de développement limité en 0. Si cet exposant est positif ou nul, en développant la fonction h à l'ordre m , on obtient un développement limité du quotient $\frac{f}{g}$ à l'ordre $n = m + p_1 - p_2$.

Exercice d'application 52. Calculer, s'il existe, le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots} = \frac{x^2(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots)}{x(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots)} = x \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots} \right)}_{=h(x)}.$$

16 - DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Rédaction.

$$e^x - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

ou sous forme normalisée :

$$e^x - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) \right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right).$$

Or,

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$



4.5. Intégration d'un développement limité

Théorème 53.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f possède un développement limité en 0 à l'ordre n ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0 et F une primitive de f . On suppose que f possède un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Considérons la fonction définie sur I par

$$\varphi : x \longmapsto F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Montrons que $\varphi(x) = o(x^{n+1})$. La fonction φ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x^n} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. La limite précédente assure qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x| \leq \alpha \implies |\varphi'(x)| \leq \varepsilon |x|^n.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x| \leq \alpha$. Pour tout réel t compris entre 0 et x , on a $|\varphi'(t)| \leq \varepsilon |t|^n \leq \varepsilon |x|^n$.

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ ce qui nous donne

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon |x|^n |x - 0| = \varepsilon |x|^{n+1}.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1}$. On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x| \leq \alpha \implies |\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1},$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = 0$ ce qui signifie exactement que $\varphi(x) = o(x^{n+1})$. □

Remarque 54. Le résultat reste valable pour un développement limité en a avec

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n), \quad F(a+h) = F(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{n+1}).$$

⚠ Attention ⚠. La réciproque de ce théorème est fautive : si une fonction dérivable f admet un développement limité à l'ordre n en a , sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$ en a .

Exemple 55. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré précédemment que $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ donc, en intégrant,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

et donc, en tronquant le développement limité précédent à l'ordre n :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)}$$

Exercice d'application 56. Déterminer le $DL_6(0)$ de

1. Arctan
2. Arcsin
3. Arccos

↪

1. On a $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$ d'où $\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$.
2. On a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5)$ donc $\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$.
3. On a $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o(x^5)$ donc $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$.

5. Applications des développements limités

5.1. Recherche d'équivalents et calcul de limites

On utilise la Proposition 10.

Exercice d'application 57. Chercher un équivalent en 0 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$ et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$

$\hookrightarrow$ On a

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

donc

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$

d'où

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

et donc

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad \text{puis} \quad \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8}x^2.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2} = \frac{1}{8}.$$

Exercice d'application 58. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x \operatorname{ch}(x)}$.

$\hookrightarrow$ On a

$$\sin(x) - x \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\operatorname{sh}(x) - x \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - x \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Finalement,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{-\frac{x^3}{3}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

Exercice d'application 59. Donner un équivalent simple de $f : x \mapsto x(1 + \cos(x)) - 2 \tan(x)$ en 0.

$\hookrightarrow$ On a

$$x(1 + \cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad 2 \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{7x^3}{6} + o(x^3)$$

et ainsi $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{7x^3}{6}$.

Exercice d'application 60. Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}.$$

↪ Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2(1 + \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

On a

$$\frac{1+u}{1+u^2} \underset{u \rightarrow 0}{=} (1+u)(1-u^2) + o(u^2) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1+u-u^2 + o(u^2).$$

Donc

$$e^u - \frac{1+u}{1+u^2} \underset{u \rightarrow 0}{=} \left(1+u+\frac{u^2}{2}\right) - (1+u-u^2) + o(u^2) = \frac{3u^2}{2} + o(u^2).$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2x^2}.$$

5.2. Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente

Remarque technique 61. Si une fonction f possède un DL à l'ordre 1 au voisinage de a , celui-ci détermine une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point A de coordonnées $(a, f(a))$. Plus précisément, si

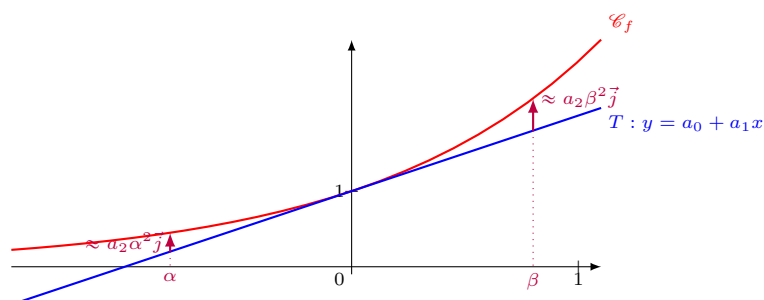
$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + o(h) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

alors une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

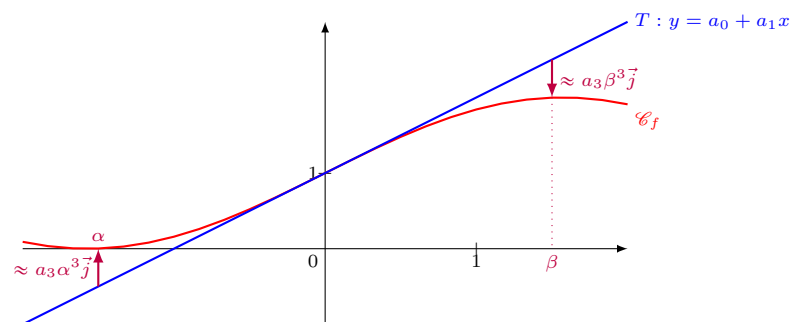
Si on a un DL de f en a à un ordre supérieur, le premier terme non nul de degré supérieur ou égal à 2 donne la position de la tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$. Plus précisément, si

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + a_n h^n + o(h^n) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $n \geq 2$ et $a_n \neq 0$, alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et donc $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est localement du signe de $a_n(x - x_0)^n$. Si n est pair, la courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente suivant le signe de a_n . Si n est impair, la courbe traverse la tangente.



Exemple où $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$, avec $a_2 > 0$



Exemple où $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3)$, avec $a_3 < 0$

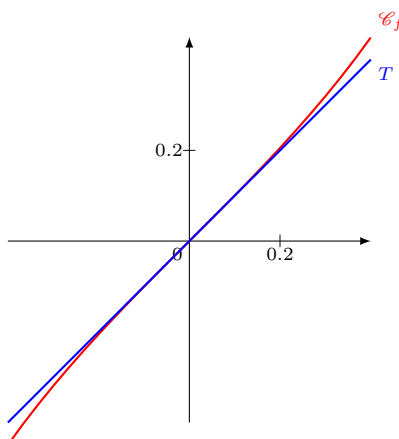
$\hookrightarrow$ Tout d'abord $f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$, et ainsi

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 est $y = \ln(2) + x$. De plus, comme

cette différence est positive à gauche de 0 et négative à droite de 0 ce qui se traduit par le fait que la courbe est au dessus de sa tangente à gauche de 0 et en dessous à droite de 0.

Exercice d'application 63. Donner le $\text{DL}_2(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1 - \sin(x)}$. En déduire l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f au voisinage de 0.

$\hookrightarrow f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$ donc une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0 est $y = x$. De plus, le terme d'ordre 3 de ce DL assure que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T à gauche de 0 et au dessus à droite de 0.



Remarque technique 65. La Proposition 14 permet de déterminer des prolongements à partir de DL.

Exercice d'application 66. Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

↪ On a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$. De plus, ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f est $y = 1$ et cette tangente est au dessus de $\mathcal{C}_f$ localement en 0.

5.3. Étude des branches infinies

Définition 67.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. La droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est dite **asymptote** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$).

Remarque technique 68. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Alors la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$ au voisinage de $+\infty$. De plus, si $\gamma \neq 0$, alors la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de γ .

Un résultat analogue existe en $-\infty$.

Exercice d'application 69. Trouver les asymptotes à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et les placer par rapport à cette courbe.

↪ On a

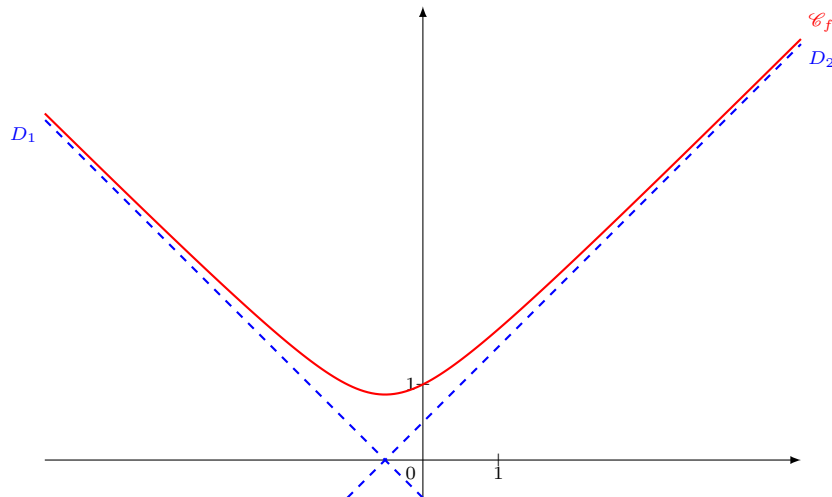
$$f(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi la droite D_1 d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. De plus, au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T .

De même,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc la droite D_2 d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. En outre, au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T .



5.4. Recherche d'extrema

Remarque technique 70. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I qui n'en est pas une extrémité. On sait qu'une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en a est que $f'(a) = 0$. En un tel point où $f'(a) = 0$, pour savoir si $f(a)$ est bien un extremum de f , on écrit un DL de f en a à un ordre suffisant pour pouvoir trouver un équivalent de $f(a+h) - f(a)$ lorsque h tend vers 0.

- Si $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$ où p est un nombre pair, alors $f(a)$ est un extremum local de f (maximum si $a_p < 0$ et minimum si $a_p > 0$).
- Si $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_q h^q$ où q est un nombre impair, alors $f(a)$ n'est pas un extremum local de f .

Exercice d'application 71. La fonction $f : x \mapsto 2 + (\sin(x) - \text{sh}(x)) \text{Arctan}(x)$ admet-elle un extremum en 0 ?

$\hookrightarrow$ On a $\sin(x) - \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{3} + o(x^4)$. On en déduit

$$f(x) = 2 + \left(\frac{-x^3}{3} \right) \times x + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Donc $f'(0) = 0$ et $f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{3}$. Finalement, f admet un maximum local en 0.