

# Chapitre 19

## Espaces vectoriels

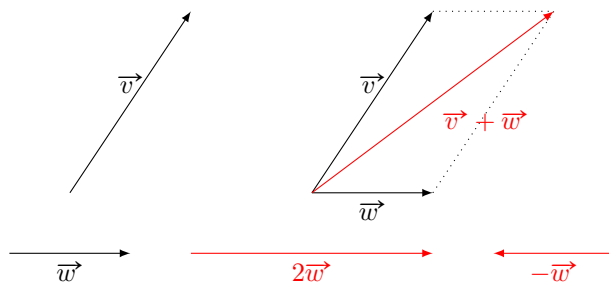
*Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.*

David Hilbert<sup>1</sup>

Dans ce cours,  $\mathbf{K}$  représente  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### 1. L'exemple du plan

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs du plan, on sait construire le vecteur somme  $\vec{v} + \vec{w}$  et les vecteurs  $\lambda \vec{v}$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ .



La loi  $+$  ainsi définie munit l'ensemble  $\vec{\mathcal{P}}$  des vecteurs du plan d'une structure de **groupe commutatif**.

- $+$  est une loi associative : pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3$ ,  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- $+$  est une loi commutative : pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2$ ,  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- Le vecteur nul est neutre pour la loi  $+$  : pour tout  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ ,  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ .
- Tout vecteur admet un symétrique pour la loi  $+$  : pour tout  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ ,  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ .

De plus, l'opération de multiplication par un nombre réel, notée  $\cdot$ , se comporte « bien » vis à vis de cette loi.

1. David HILBERT, mathématicien allemand (1862-1943)

- Pour tout  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .
- Pour tout  $(\lambda, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbf{R} \times \vec{\mathcal{P}}^2, \lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$ .
- Pour tout  $(\lambda, \mu, \vec{v}) \in \mathbf{R}^2 \times \vec{\mathcal{P}}, (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$ .
- Pour tout  $(\lambda, \mu, \vec{v}) \in \mathbf{R}^2 \times \vec{\mathcal{P}}, (\lambda\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$ .

D'autres ensembles déjà rencontrés possèdent ces mêmes caractéristiques, par exemple l'ensemble des matrices de taille  $n \times p$  : on sait faire la somme de deux telles matrices et multiplier une matrice par un coefficient. Les règles de calculs sont analogues à celles dégagées ci-avant.

On peut donc mettre en évidence une structure commune à ces ensembles, structure qu'on appellera espace vectoriel, même si les éléments de l'ensemble ne sont pas des vecteurs au sens de ce qui a été vu dans l'enseignement secondaire.

## 2. Structure d'espace vectoriel

### Définition 1.

On appelle **espace vectoriel** sur  $\mathbf{K}$  (ou  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel) tout triplet  $(E, +, \cdot)$  où  $E$  est un ensemble non vide,  $+: E \times E \longrightarrow E$  est une loi interne et  $\cdot: \mathbf{K} \times E \longrightarrow E$  est une loi externe qui vérifient les propriétés suivantes.

EV1 :  $\forall u, v \in E, u + v = v + u$  (commutativité)

EV2 :  $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$  (associativité)

EV3 :  $\exists 0_E \in E, \forall u \in E, 0_E + u = u + 0_E = u$ .

$0_E$  est l'élément neutre de l'addition, il est appelé **vecteur nul**.

EV4 :  $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$ .

Tout élément possède un opposé pour la loi  $+$ . L'opposé de  $u$  est noté  $-u$ . On peut montrer en combinant les quatre propriétés précédentes que cet opposé est unique.

EV5 :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$  (distributivité par rapport à la somme de scalaires)

EV6 :  $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall u, v \in E, \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$  (distributivité par rapport à la somme de vecteurs)

EV7 :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall u \in E, (\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$  (associativité mixte)

EV8 :  $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$ . L'élément unité de  $\mathbf{K}$  est un élément neutre pour la multiplication externe.

Les éléments de  $\mathbf{K}$  sont appelés des **scalaires**, ceux de  $E$  des **vecteurs**.

**Notation 2.** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Lorsque  $\lambda$  est un scalaire et  $u$  un vecteur, on écrira  $\lambda u$  pour  $\lambda \cdot u$ , mais pas  $u\lambda$ .

On notera également  $u - v$  pour désigner  $u + (-v)$ .

### 2.1. Exemples fondamentaux

Les exemples suivants sont fondamentaux, il faut les connaître.

- $(\mathbf{R}, +, \times)$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Ici, la loi externe est la loi de multiplication des réels. Le vecteur nul est 0.
- $(\mathbf{C}, +, \times)$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, avec  $\times: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$   
 $(\lambda, z) \longmapsto \lambda \times z$ .
- $(\mathbf{C}, +, \times)$  est aussi un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, avec cette fois  $\times: \mathbf{R} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$   
 $(\lambda, z) \longmapsto \lambda \times z$ .

- L'ensemble  $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$  des vecteurs de la géométrie plane avec l'addition classique des vecteurs et la multiplication par un réel est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.  
Idem pour l'ensemble  $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$  des vecteurs de la géométrie dans l'espace.
- $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, où les opérations sont définies par

$$+ : \quad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{et} \quad \cdot : \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad (\lambda, (x_1, x_2)) \longmapsto (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Le vecteur nul est  $0_{\mathbf{R}^2} = (0, 0)$ .

Plus généralement, si  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

- $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est le polynôme nul.
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est la matrice nulle  $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ .
- Soit  $\Omega$  un ensemble quelconque non vide. On s'intéresse à l'ensemble  $\mathbf{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$  des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbf{K}$ , qu'on munit d'une loi de composition interne :

$$+ : \quad \mathbf{K}^\Omega \times \mathbf{K}^\Omega \longrightarrow \mathbf{K}^\Omega$$

$$(f, g) \longmapsto \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & f(x) +_{\mathbf{K}} g(x) \end{array} \right]$$

ainsi que d'une loi de composition externe :

$$\cdot : \quad \mathbf{K} \times \mathbf{K}^\Omega \longrightarrow \mathbf{K}^\Omega$$

$$(\lambda, g) \longmapsto \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot_{\mathbf{K}} g(x) \end{array} \right]$$

$(\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}), +, \cdot)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est

$$0 : \quad \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$x \longmapsto 0$$

Cet exemple est fondamental. En effet, il inclut les cas particuliers suivants :

- Si  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$  et on retrouve l'exemple cité plus haut.
  - Si  $\Omega = \mathbf{N}$ , alors  $\mathbf{K}^\mathbf{N}$ , l'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbf{K}$ , muni de l'addition classique des suites et de la multiplication par un scalaire est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul est la suite nulle  $(0)_{n \in \mathbf{N}}$ .
  - Si  $D$  est une partie de  $\mathbf{R}$ , l'ensemble des fonctions de  $D$  dans  $\mathbf{R}$ , muni de l'addition de fonctions et de la multiplication par un scalaire est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, dont le vecteur nul est  $0 : D \longrightarrow \mathbf{R}$ .
- $x \longmapsto 0$
- On peut encore généraliser l'exemple précédent. Soit  $(E, \star, \bullet)$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $\Omega$  un ensemble quelconque. On munit alors l'ensemble  $\mathcal{F}(\Omega, E)$  des applications de  $\Omega$  vers  $E$  des opérations

$$\boxplus : \quad \mathcal{F}(\Omega, E) \times \mathcal{F}(\Omega, E) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, E)$$

$$(f, g) \longmapsto \left[ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \star g(x) \end{array} \right]$$

et

$$\boxdot : \quad \mathbf{K} \times \mathcal{F}(\Omega, E) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, E)$$

$$(\lambda, f) \longmapsto \left[ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \bullet f(x) \end{array} \right]$$

$(\mathcal{F}(\Omega, E), \boxplus, \boxdot)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et le vecteur nul est  $0 : \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$ .

$$x \longmapsto 0$$

Par exemple, on peut choisir  $\Omega = [0; 1]$  et  $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ , qui est bien un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. On définit

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad g : [0; 1] \longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t & 2 & 4 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs de  $\mathcal{F}([0, 1], \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}))$ . Alors

$$\begin{aligned} f \boxplus g : [0; 1] &\longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t & 3 & 4+t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Remarque 3.** On peut toujours considérer les  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels  $E$  comme des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels : il suffit de restreindre la loi externe  $\cdot : \mathbf{C} \times E \longrightarrow E$  à  $\mathbf{R} \times E : \cdot : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E$ . Par exemple,  $\mathbf{C}[X]$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, mais c'est également un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. De même,  $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel et également un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

## 2.2. Premières propriétés

### Proposition 4.

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Alors pour tout  $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$ ,

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

*Démonstration.* • Soit  $x \in E$ . Alors  $0_{\mathbf{K}} \cdot x = (0_{\mathbf{K}} + 0_{\mathbf{K}}) \cdot x = 0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_{\mathbf{K}} \cdot x$  d'après EV5.

D'après EV4, tout vecteur de  $E$  possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x) \\ &= (0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_{\mathbf{K}} \cdot x) + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x) \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + (0_{\mathbf{K}} \cdot x + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x)) && \text{EV2} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_E && \text{EV4} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x && \text{EV3} \end{aligned}$$

- Soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Alors,  $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$ . (EV3) et (EV6)

D'après EV4, tout vecteur de  $E$  possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= \lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= (\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E) + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + (\lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E)) && \text{EV2} \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E && \text{EV4} \\ &= \lambda \cdot 0_E && \text{EV3} \end{aligned}$$

- Soient  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$  tels que  $\lambda \cdot x = 0_E$ . Montrons que  $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$  ou  $x = 0_E$ .

Si  $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$ , le résultat est obtenu.

Si  $\lambda \neq 0_{\mathbf{K}}$ , alors  $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$  d'après le premier point.

Or,  $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \cdot x$  d'après EV7, donc  $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 1 \cdot x = x$  par EV8. Donc  $x = 0_E$ .  $\square$

### Proposition 5.

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel. Alors,

1.  $\forall x \in E, \quad (-1) \cdot x = -x$  (opposé de  $x$ ).
2.  $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in E, \quad (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x = \alpha \cdot x + (-\beta \cdot x)$ .
3.  $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $x \in E$ . Alors

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{EV8} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{EV6} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x \\ &= 0_E && \text{avec la proposition précédente.} \end{aligned}$$

2. EV5 et le point 1.

3. EV6 et le point 1.

□

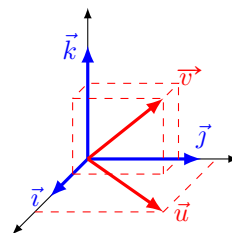
## 2.3. Combinaisons linéaires de vecteurs

### Définition 6.

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . On dit qu'un vecteur  $u$  de  $E$  est une **combinaison linéaire** des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  s'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $\mathbf{K}$  tels que

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

La notion de combinaison linéaire est géométriquement très simple à représenter dans le plan (ou dans l'espace). Sur la figure ci-contre,  $\vec{u}$  est combinaison linéaire de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , mais ça n'est pas le cas de  $\vec{v}$ . Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .



**Exemple 7.** 1. On se place dans un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ . Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . Alors,  $u, -v, 2u - 4v$  sont des combinaisons linéaires de  $u$  et  $v$ .

2. Dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$ , le vecteur  $(3, -2, 4)$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  et  $k = (0, 0, 1)$  car

$$(3, -2, 4) = 3 \cdot i - 2 \cdot j + 4 \cdot k.$$

3. On se place dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbf{R}[X], +, \cdot)$ . Alors le polynôme  $2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8$  est une combinaison linéaire des polynômes  $X^7, X^6, X^5, X^4, X^3, X^2, X$ , et  $1$  car

$$2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8 = 2 \cdot X^7 + 0 \cdot X^6 + 0 \cdot X^5 + 3 \cdot X^4 + (-1) \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X + (-8) \cdot 1.$$

**Exercice d'application 8.** Dans  $\mathbf{R}^3$ ,  $x = (2, 3, 5)$  est-il combinaison linéaire des vecteurs  $e_1 = (1, 0, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 1, 1)$ ?

↔ Soit  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . On a

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = x \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 3 \\ a + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

donc  $2e_1 + e_3 = x$  et ainsi  $x$  est combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ .

**Exercice d'application 9.** Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ , considérons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A^2$  est-elle combinaison linéaire de  $A$  et  $I_2$ ?

$$A^2 = aA + bI_2 \iff \begin{cases} a+b = 7 \\ 2a = 10 \\ 3a = 15 \\ 4a+b = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$$

**Exercice d'application 10.** Dans  $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ ,  $u = (n^2)_{n \in \mathbf{N}}$  est-elle combinaison linéaire de  $v = (1)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $w = (n)_{n \in \mathbf{N}}$  ?

$$u = av + bw \iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad n^2 = a + bn.$$

*Analyse.* Supposons  $u = av + bw$ . Alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n^2 = a + bn$ , donc en particulier  $a = 0$  et  $b = 1$  (pour  $n = 0$  et  $n = 1$ ). Ainsi  $n^2 = n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , ce qui est absurde.

**Remarque technique 11.** Si  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont trois fonctions telles que  $f = ag + bh$ , où l'on souhaite déterminer  $a$  et  $b$  des scalaires, on peut exploiter les égalités en certaines valeurs. On peut aussi utiliser l'égalité des limites (lorsqu'elles existent) ou, dans le cas de fonctions dérivables, l'égalité des dérivées.

$\hookrightarrow$  A nouveau, on ne peut pas raisonner directement par équivalences (car dire que deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbf{R}$  sont égales revient à dire que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = g(x)$  ce qui conduit à une infinité d'équations). On préfère ici conduire une analyse-synthèse.

*Synthèse.* Soit  $x \in \mathbf{R}$ .

$$\operatorname{sh}(x)^2 + \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x).$$

*Conclusion.* Finalement,  $f$  est combinaison linéaire des fonctions  $\text{sh}^2$  et  $\text{ch}^2$ .

Par exemple,  $1 + i$  est combinaison linéaire de 1 et 2 dans le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $(\mathbf{C}, +, \times)$  (puisque  $1 + i = (1 + i) \cdot 1 + 0 \cdot 2$  par exemple), mais  $1 + i$  n'est pas combinaison linéaire de 1 et 2 dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbf{C}, +, \times)$  (car  $\Im m(1 + i) = 1 \neq 0 = \Im m(a \cdot 1 + b \cdot 2)$  pour tous  $a, b \in \mathbf{R}$ ).

Autrement dit, on ne peut pas faire d'identification quand on a deux décompositions linéaires avec les mêmes vecteurs, car une telle décomposition n'est *a priori* pas unique. Par exemple,

$$(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0).$$

Dans toute cette partie,  $(E, +, \cdot)$  désigne un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel

### 3.1. Définition et exemples à connaître

#### Définition 13.

Soit  $F$  une partie de  $E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si

SEV1 :  $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$  ( $F$  est stable par addition)

SEV2 :  $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot u \in F$  ( $F$  est stable par multiplication externe)

SEV3 :  $0_E \in F$ .

#### Proposition 14.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors,  $F$  muni de l'addition et de la multiplication externe définies sur  $E$  (ou plutôt des restrictions de ces lois à  $F$ , dites **lois induites**) est **K-espace vectoriel**.

*Démonstration.* •  $F$  est bien non vide car  $0_E \in F$ .

- $+$  est bien une loi interne à  $F$  d'après SEV 1.
- EV1 et EV2 sont vérifiées car les éléments de  $F$  sont aussi des éléments de  $E$ .
- $0_E \in F$  par SEV3 donc EV3 est vérifiée. Et  $0_F = 0_E$ .
- Montrons que les opposés des éléments de  $F$  sont aussi dans  $F$ .  
Soit  $x \in F$ . Alors, par SEV2,  $(-1) \cdot x \in F$ . Or, dans  $E$ , on sait que  $(-1) \cdot x = -x$  est l'opposé de  $x$ . Donc  $-x \in F$ . EV4 est bien vérifiée.
- Les propriétés EV5, EV6, EV7, EV8 sont vérifiées car les éléments de  $F$  sont aussi des éléments de  $E$ .  $\square$

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on utilise plutôt la proposition suivante.

#### Proposition 15 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Soit  $F$  une partie de  $E$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :

1.  $0_E \in F$ .
2.  $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$ .

*Démonstration.* • Supposons que  $F$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . Par définition,  $0_E \in F$ .

Soient  $x, y \in F, \lambda \in \mathbf{K}$ . Alors, par SEV2,  $\lambda \cdot x \in F$  et par SEV1,  $\lambda \cdot x + y \in F$ .

- Soit  $F$  une partie de  $E$  vérifiant
  1.  $0_E \in F$ .
  2.  $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$ .

Alors, on a bien  $0_E \in F$  (SEV3).

Soient  $x$  et  $y$  dans  $F$ . Alors,  $1 \cdot x + y \in F$ , donc  $x + y \in F$  (SEV1).

Soient  $\lambda \in \mathbf{K}, x \in F$ . Comme  $0_E \in F$ ,  $\lambda \cdot x + 0_E \in F$ , donc  $\lambda \cdot x \in F$  (SEV2).  $\square$

**Exemple 16.** • Les ensembles  $\{0_E\}$  et  $E$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  (dits **sous-espaces vectoriels triviaux**).

- Dans le plan vectoriel  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  de la géométrie vectorielle plane, les droites vectorielles sont des sous-espaces vectoriels. Rappelons qu'une droite vectorielle est un ensemble  $\{k\overrightarrow{u} : k \in \mathbf{K}\}$  (où  $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ ), soit l'ensemble des vecteurs colinéaires à  $\overrightarrow{u}$ .
- Dans l'espace vectoriel  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de la géométrie vectorielle dans l'espace, les droites vectorielles et les plans vectoriels (*i.e.* les ensembles de la forme  $\{a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} : a, b \in \mathbf{K}\}$ , où  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$  ne sont pas colinéaires) sont des sous-espaces vectoriels.

**Exercice d'application 17.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ .

$\hookrightarrow$  On a bien  $F \subset \mathbf{R}^n$ .

1. Le vecteur nul de  $\mathbf{R}^n$  est  $0_{\mathbf{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ . Comme  $0 + 0 + \dots + 0 = 0$ ,  $0_{\mathbf{R}^n} \in F$ .
2. Soit  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$ ,  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors, d'après les définitions,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + v &= \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \dots, \lambda x_n + y_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + \dots + (\lambda x_n + y_n) &= (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots + \lambda x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\lambda \cdot u + v \in F$ .

Finalement,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ .

**Exercice d'application 18.** On pose  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 1\}$ .  $F$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  ?

$\hookrightarrow$   $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  car  $0_{\mathbf{R}^3} = (0, 0, 0) \notin F$  (en effet,  $0 + 2 \times 0 + 0 \neq 1$ ).

**Exercice d'application 19.** Montrer que  $F = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \tilde{P}(0) = \tilde{P}(1)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ .

$\hookrightarrow$

- $F \subset \mathbf{R}[X]$ .
- Le vecteur nul de  $\mathbf{R}[X]$  est le polynôme nul qu'on note  $\theta$ .  $\tilde{\theta}(0) = 0$  et  $\tilde{\theta}(1) = 0$  donc  $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(1)$  et  $\theta \in F$ .
- Soient  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $(P, Q) \in F^2$ . Montrons que  $\lambda P + Q \in F$ , c'est à dire que  $\widetilde{\lambda P + Q}(0) = \widetilde{\lambda P + Q}(1)$ .

$$\widetilde{\lambda P + Q}(0) = \lambda \tilde{P}(0) + \tilde{Q}(0) = \lambda \tilde{P}(1) + \tilde{Q}(1) = \widetilde{\lambda P + Q}(1).$$

Donc  $\lambda P + Q \in F$  et  $F$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice d'application 20.** Soit  $n \in \mathbf{N}$  Montrer que  $\mathbf{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ .

$\hookrightarrow$

- $\mathbf{K}_n[X] \subset \mathbf{K}[X]$ .
- Le polynôme nul est de degré  $-\infty$ , donc inférieur à  $n$ . Donc il appartient à  $\mathbf{K}_n[X]$ .
- Soient  $P, Q \in \mathbf{K}_n[X]$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$  Montrons que  $\lambda P + Q \in \mathbf{K}_n[X]$ . Alors :  
 $\deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(Q))$ .  
 $\deg(\lambda P) = \deg(P)$  si  $\lambda \neq 0$  et  $\deg(\lambda P) = -\infty$  si  $\lambda = 0$ . Dans tous les cas  $\deg(\lambda P) \leq \deg(P) \leq n$ .  
Comme  $\deg(Q) \leq n$ ,  $\max(\deg(\lambda P), \deg(Q)) \leq n$ , donc  $\lambda P + Q \in \mathbf{K}_n[X]$ .



Donc  $\mathbf{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ .

Remarque technique 21. Pour démontrer qu'un ensemble est un espace-vectoriel, on peut montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu. Cette méthode est très utile et particulièrement adaptée aux ensembles décrits par équations.

**Exercice d'application 22.** Montrer que  $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

$\hookrightarrow$  Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^2$ .

- $F \subset \mathbf{R}^2$ .
- $0_{\mathbf{R}^2} \in F$  car  $2 \times 0 - 0 = 0$ .
- Soit  $u_1 = (x_1, y_1)$ ,  $u_2 = (x_2, y_2)$  des éléments de  $F$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors  $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$ .  
De plus,

$$2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) = (2\lambda x_1 - \lambda y_1, 2\lambda x_2 - y_2) = (0, 0)$$

puisque  $u, v \in F$ . Il s'ensuit que  $\lambda u + v \in F$ .

Finalement,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^2$  et c'est donc en particulier un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice d'application 23.** Soit  $F = \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} + u_n = u_0\}$ . Montrer que  $F$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

$\hookrightarrow$  Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

- $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .
- Soit  $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite nulle. Alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\theta_{n+2} + \theta_n = 0 + 0 = 0 = \theta_0$ . Donc  $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}} \in F$ .
- Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $F$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . On note  $w = \lambda u + v$ . Montrons que  $(w_n)_{n \in \mathbf{N}} \in F$ .  
Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} w_{n+2} + w_n &= (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + (\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} + \lambda u_n + v_n \\ &= \lambda(u_{n+2} + u_n) + (v_{n+2} + v_n) \\ &= \lambda u_0 + v_0 \\ &= w_0. \end{aligned}$$

Donc  $(w_n)_{n \in \mathbf{N}} \in F$ .

Finalement,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  et c'est donc en particulier un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice d'application 24.** Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle  $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

$\hookrightarrow$  L'ensemble des solutions est

$$F = \left\{ f \in D^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid \forall x \in \mathbf{R}, f'(x) + \frac{1}{1+x^2}f(x) = 0 \right\}.$$

Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ .

- $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ .
- La fonction nulle appartient à  $F$  car cette fonction est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  
 $0 + 0 \times \frac{1}{1+x^2} = 0$ .
- Soit  $(\lambda, y_1, y_2) \in \mathbf{R} \times F^2$ . Alors  $y_1 + \mu y_2$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$(y_1 + \lambda y_2)'(x) + \frac{1}{1+x^2}(y_1 + \lambda y_2)(x) = y_1'(x) + \frac{1}{1+x^2}y_1(x) + \lambda \left( y_2'(x) + \frac{1}{1+x^2}y_2(x) \right) = 0$$

car  $y_1, y_2 \in F$ . Ainsi  $y_1 + \lambda y_2 \in F$ .



Ainsi  $F$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $(\mathcal{C}^2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ .

**Proposition 28.**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$ . Alors  $F$  est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in F, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in F.$$

*Démonstration.*

Soit  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  une famille de vecteurs de  $F$  et  $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  une famille de scalaires de  $\mathbf{K}$ . Posons pour tout

$n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H_n : \ll \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F \gg$ .

On a  $\lambda_1 x_1 \in F$  car  $F$  est stable par produit externe, donc  $H_1$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $H_n$  soit vraie. On a  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ . Or, via  $H_n$ ,  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F$ .

De plus, puisque  $F$  est stable par produit externe,  $\lambda_{n+1} x_{n+1} \in F$ . Enfin, puisque  $F$  est stable par somme,  $(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in F$ . Donc  $H_{n+1}$  est vraie.

Le principe de récurrence assure que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H_n$  est vraie. □

### 3.2. Sous-espace vectoriel engendré

**Définition 29.**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de  $x_1, \dots, x_n$  est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par  $x_1, \dots, x_n$  et se note  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) &= \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\} \\ &= \{u \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout vecteur  $u$  de  $E$ , on a l'équivalence

$$u \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \text{ tels que } u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

**Définition 30.**

On appelle **droite vectorielle** de  $E$  un sous-espace vectoriel  $D$  de  $E$  qu'on peut écrire  $D = \text{Vect}(u)$  avec  $u \in E$ . On dit que  $u$  est un **vecteur directeur** de  $D$ .

Par définition,  $D = \{\lambda \cdot u : \lambda \in \mathbf{K}\}$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}(u) & & \text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u) = \text{Vect}(v) \\ \text{---} \bullet \xrightarrow{u} & & \text{---} \xleftarrow{v} \bullet \xrightarrow{u} \end{array}$$

**Définition 31.**

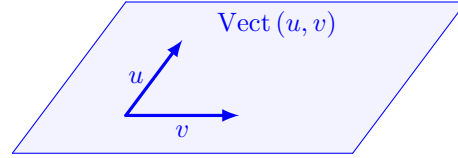
Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont **colinéaires** lorsqu'il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $u = \lambda v$  ou  $v = \lambda u$ .

**Exemple 32.** Dans  $\mathbf{R}[X]$ ,  $X^2$  et  $3X^2$  sont colinéaires.

**Définition 33.**

On appelle **plan vectoriel** de  $E$  un sous espace vectoriel  $P$  de  $E$  qu'on peut écrire  $P = \text{Vect}(u, v)$  où  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs non colinéaires de  $E$ . On a alors, par définition,

$$P = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v : \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}.$$



**Exemple 34.** • Dans  $\mathbf{R}^2$ , posons  $e_1 = (2, 1)$ . Alors

$$\text{Vect}(e_1) = \{\lambda \cdot e_1 : \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

• Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ , posons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors

$$\text{Vect}(I_2, A) = \{\lambda_1 I_2 + \lambda_2 A : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

**⚠ Attention ⚠.** A nouveau, lorsqu'il y a ambiguïté, il est important de préciser si l'on travaille dans un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel ou dans un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, ce qui l'on peut éventuellement indiquer en précisant  $\text{Vect}_{\mathbf{C}}$  ou  $\text{Vect}_{\mathbf{R}}$ .

Par exemple,  $\text{Vect}(1) = \{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$  dans le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $(\mathbf{C}, +, \times)$ . Par contre,  $\text{Vect}(1) = \{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$  dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbf{C}, +, \times)$ . On pourra ainsi écrire  $\text{Vect}_{\mathbf{C}}(1) = \mathbf{C}$  et  $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{R}$ .

**Lemme 35.**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Alors  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.* 1.  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset E$ .

2.  $0_E = 0_{\mathbf{K}}x_1 + 0_{\mathbf{K}}x_2 + \dots + 0_{\mathbf{K}}x_n$ . Donc  $0_E \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

3. Soient  $u, v \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  et  $\alpha \in \mathbf{K}$ .

$u \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  donc il existe  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$  tels que  $u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ .

$v \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  donc il existe  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbf{K}$  tels que  $v = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$ . Alors,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u + v &= \alpha \cdot (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n) \\ &= \alpha \cdot (\lambda_1 x_1) + \dots + \alpha \cdot (\lambda_n x_n) + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \end{aligned} \quad (\text{EV6})$$

$$= (\alpha \times \lambda_1) \cdot x_1 + \dots + (\alpha \times \lambda_n) \cdot x_n + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \quad (\text{EV7})$$

$$= (\alpha \times \lambda_1 + \mu_1) \cdot x_1 + \dots + (\alpha \times \lambda_n + \mu_n) \cdot x_n \quad (\text{EV5})$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\alpha \times \lambda_i + \mu_i \in \mathbf{K}$ , donc  $\alpha \cdot u + v \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

**Théorème 36.**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ .

$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  (au sens de l'inclusion) qui contient à la fois  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Cela signifie que pour tout sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$  contenant  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on a  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset G$ .

*Démonstration.* • On a montré dans le lemme que  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

De plus,  $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$ , donc  $x_1 \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

De même, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{i-1} + 1 \cdot x_i + 0 \cdot x_{i+1} + \dots + 0 \cdot x_n$ , donc  $x_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

Donc  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $x_1, \dots, x_n$ .

- Reste à montrer que c'est le plus petit. Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $u \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . Alors  $u$  s'écrit  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Or,  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $G$  et  $G$  est un sous-espace vectoriel, donc est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs, donc  $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \in G$ , c'est à dire  $u \in G$ .

Donc  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset G$ . □

**Exemple 37.** • Soit  $F = \{3aX^2 + (a+b)X - b : (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ . On a  $F = \text{Vect}(3X^2 + X, X - 1)$ , donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ .

- Reprenons l'Exercice d'application 22. On a

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x \cdot (1, 2)) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2)),$$

donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

- Reprenons l'Exercice d'application 24. L'équation différentielle  $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$  admet comme ensemble de solution

$$F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-\text{Arctan}(x)} \end{array} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( x \longmapsto e^{-\text{Arctan}(x)} \right)$$

donc  $F$  est l'espace vectoriel engendré par le vecteur  $x \longmapsto e^{-\text{Arctan}(x)}$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  : c'est en particulier un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice d'application 38.** Montrer que  $F = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0\}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

↔ *Première méthode.*

- $F \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .
- La suite nulle appartient à  $F$ .
- Soit  $(\lambda, u, v) \in \mathbb{C} \times F^2$ . Posons  $w = u + \lambda v$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} w_{n+2} + w_{n+1} + w_n &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} + u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + u_n + \lambda v_n \\ &= u_{n+2} + u_{n+1} + u_n + \lambda(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) \\ &= 0 + \lambda \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $w \in F$ .

Finalement  $F$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . En particulier,  $F$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

*Seconde méthode.* Les suites de  $F$  sont les suites récurrentes linéaires d'ordre deux dont le polynôme caractéristique associé est  $P = X^2 + X + 1$ . Les racines de  $P$  sont  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ . Donc, d'après le cours sur les suites,

$$F = \left\{ \left( a \left( \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n + b \left( \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} : (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Par conséquent, en notant  $u = \left( \left( \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = \left( \left( \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a

$$F = \{au + bv : (a, b) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(u, v).$$

$F$  est donc un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . En particulier,  $F$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

**Exercice d'application 39.** Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t + z = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

$\hookrightarrow$  Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^4$ . Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} \boxed{1}.x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{1}.x + y + z + t = 0 \\ \boxed{1}.y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda - 3\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = (\lambda, -2\lambda, \lambda, 0) + (2\mu, -3\mu, 0, \mu) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = \lambda(1, -2, 1, 0) + \mu(2, -3, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v) \end{aligned}$$

avec  $u = (1, -2, 1, 0)$  et  $v = (2, -3, 0, 1)$ . Donc  $F = \text{Vect}(u, v)$ , en particulier,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

$u$  et  $v$  n'étant pas colinéaires,  $F$  est un plan vectoriel.

**Exercice d'application 40.** Soit  $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  en l'écrivant sous la forme  $F = \text{Vect}(\dots)$ .

$\hookrightarrow$  Soit  $P$  un polynôme quelconque de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ .

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \tilde{P}(1) = 0 \\ &\iff a + b + c + d = 0 \\ &\iff \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = -\lambda - \mu - \nu \\ b = \lambda \\ c = \mu \\ d = \nu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, P = (-\lambda - \mu - \nu)X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \nu \\ &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, P = \lambda(-X^3 + X^2) + \mu(-X^3 + X) + \nu(-X^3 + 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1) \end{aligned}$$

Donc  $F = \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

*Autre méthode :* Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ .

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \tilde{P}(1) = 0 \\ &\iff 1 \text{ est racine de } P \\ &\iff X - 1 \mid P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], P = (X - 1)Q \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1) \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), X - 1) \end{aligned}$$

Donc  $F = \text{Vect} (X^2(X-1), X(X-1), X-1)$ .

**Remarque 41.** Il n'y a donc PAS unicité des vecteurs engendrant un sous-espace vectoriel.

**Exercice d'application 42.** Soit  $H = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0\}$ , c'est à dire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$ . Montrer que  $H$  est un plan vectoriel.

$\hookrightarrow$  L'équation caractéristique de cette équation différentielle est  $r^2 + 2r + 1 = 0$  qui admet une unique solution double  $-1$ .

Donc l'ensemble des solutions de  $y'' + 2y' + y = 0$  est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{-t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

On pose  $g_1 : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto e^{-t} \end{array}$  et  $g_2 : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto te^{-t} \end{array}$ . Ainsi, les solutions de  $y'' + 2y' + y = 0$  sont toutes les fonctions  $f$  qui peuvent s'écrire  $f = \lambda g_1 + \mu g_2$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Donc  $F = \text{Vect} (g_1, g_2)$ .

Comme  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas colinéaires,  $H$  est un plan vectoriel.

En effet, il n'existe pas de réel  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $g_1(t) = \alpha g_2(t)$  ou pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $g_2(t) = \alpha g_1(t)$ .

### 3.3. Intersection de sous-espaces vectoriels

#### Proposition 43.

Soit  $I$  un ensemble. Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors,

$$G = \bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in F_i\},$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.* • Pour tout  $i \in I$ ,  $F_i \subset E$ , donc  $G \subset E$ .

• Pour tout  $i \in I$ ,  $F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $0_E \in F_i$ , donc  $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i = G$ .

• Soit  $\lambda \in \mathbf{K}, x, y \in G$ . Montrons que  $\lambda \cdot x + y \in G$ .

Soit  $i \in I$ . Alors,  $x \in F_i$  et  $y \in F_i$ . Comme  $F_i$  est un sous-espace vectoriel,  $\lambda \cdot x + y \in F_i$ .

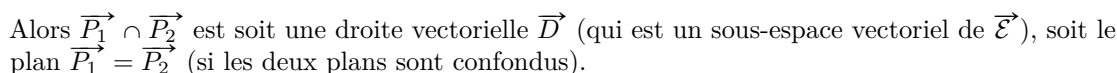
Donc, pour tout  $i \in I$ ,  $\lambda \cdot x + y \in F_i$ , d'où  $\lambda \cdot x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i = G$ .

Donc  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

**Remarque 44.** Notons que dans la proposition,  $I$  est un ensemble quelconque, non nécessairement fini, ni même dénombrable.

**Exemple 45.** 1. On se place dans l'espace vectoriel  $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$  des vecteurs de l'espace de la géométrie dans l'espace.

Soient deux plans vectoriels  $\overrightarrow{P_1}$  et  $\overrightarrow{P_2}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .



- $F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire}\}$  (vérifier que c'est un bien un sous-espace vectoriel).

Alors leur intersection  $F \cap G = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire et } \tilde{P}(42) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}[X]$ .

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(2a, b, a + b) : (a, b) \in \mathbf{R}^2\}.$$
$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 3x + 2y \} = \{ (x, y, 3x + 2y) : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \} = \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, 2)).$$

Décrivons  $F$  à l'aide d'équations. Soit  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ .

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y = 2z \}.$$

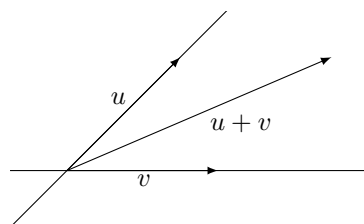
$$E \cap F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \right\}.$$
$$(x, y, z) \in E \cap F \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = \frac{5}{4}z \end{cases}$$
$$E \cap F = \left\{ \left( -\frac{z}{2}, \frac{5z}{4}, z \right) : z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left( \left( -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1 \right) \right).$$



### 3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

On se place dans un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ .

**⚠ Attention ⚠.** La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est en général PAS un sous-espace vectoriel. Dans l'exemple représenté ci-après, on a  $u + v \notin \text{Vect}(u) \cup \text{Vect}(v)$ , donc  $\text{Vect}(u) \cup \text{Vect}(v)$  n'est pas stable par somme.



Il est alors naturel de se demander quel est le « plus petit » sous-espace vectoriel de  $E$  contenant la réunion de  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

#### Définition 48.

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On note  $F + G$  et on appelle **somme** des sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  l'ensemble

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}.$$

#### Proposition 49.

$F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

*Démonstration.* • Soit  $u \in F + G$ . Alors, il existe  $f \in F, g \in G, u = f + g$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $E$ , on a  $u = f + g \in F$ . D'où  $F + G \subset E$ .

- $0_E \in F$  et  $0_E \in G$ . Donc  $0_E + 0_E \in F + G$ . Comme  $\underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = 0_E$ , on a  $0_E \in F + G$ .
- Soit  $(u, v) \in (F + G)^2, \lambda \in \mathbf{K}$ . Alors il existe  $(f_1, g_1) \in F \times G$  et  $(f_2, g_2) \in F \times G$  tels que  $u = f_1 + g_1$  et  $v = f_2 + g_2$ .

$$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda(f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) \\ &= (\lambda f_1 + f_2) + (\lambda g_1 + g_2). \end{aligned}$$

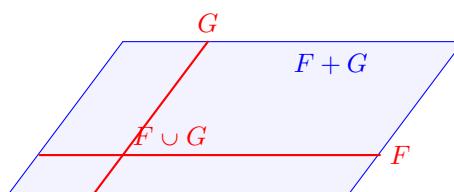
Or  $\lambda f_1 + f_2 \in F$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\lambda g_1 + g_2 \in G$  car  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Donc  $\lambda u + v \in F + G$ . Finalement,  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\square$

#### Proposition 50.

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors  $F + G$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  (au sens de l'inclusion) contenant  $F \cup G$ .

C'est à dire que pour tout sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  contenant  $F \cup G$ , alors

$$F + G \subset H.$$



*Démonstration.*

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $F \cup G$ . Soit  $u \in F + G$ . Il existe  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $u = f + g$ .  $F \subset H$  et  $G \subset H$  donc  $f, g \in H$ . Comme  $H$  est un sous-espace vectoriel,  $f + g \in H$ . Ainsi,  $F + G \subset H$ .  $\square$

**Exemple 51.** Dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $(\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \cdot)$ , on considère le sous-espace vectoriel  $F$  des fonctions polynomiales de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  et  $G = \text{Vect}(\exp)$ . On pose

$$\begin{aligned} h: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} & f: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} & g: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto 3x^4 - 2x + 7\exp(x) & x &\longmapsto 3x^4 - 2x & x &\longmapsto 7\exp(x) \end{aligned}$$

Alors,  $h \in F + G$  car  $h$  est la somme de la fonction  $f$  qui appartient à  $F$  et de la fonction  $g$  qui appartient à  $G$ .

**Exercice d'application 52.** Posons  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ . Montrer que  $\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) = \mathbf{R}^2$ .

$\hookrightarrow$  Il faut démontrer une égalité d'ensembles : procédons par double inclusion.

Les ensembles  $\text{Vect}(e_1)$  et  $\text{Vect}(e_2)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^2$ , donc  $\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^2$ . En particulier,

$$\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) \subset \mathbf{R}^2.$$

Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . On remarque que  $(x, y) = \underbrace{xe_1}_{\in \text{Vect}(e_1)} + \underbrace{ye_2}_{\in \text{Vect}(e_2)}$ , d'où  $(x, y) \in \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2)$ . Par conséquent,

$$\mathbf{R}^2 \subset \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2).$$

Finalement,

$$\text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) = \mathbf{R}^2.$$

**Exercice d'application 53.** Posons

$$E = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(X + 1).$$

Prouver que  $E + F = \mathbf{R}[X]$ .

$\hookrightarrow$  L'ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ . Montrons que  $E$  en est un également :

- $E \subset \mathbf{R}[X]$ .
- $0 \in E$ .
- Soit  $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X]^2$ . Alors  $(\lambda P + Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$  car  $P'(0) = 0$  et  $Q'(0) = 0$ . Il s'ensuit  $\lambda P + Q \in E$ . Ainsi  $E$  est stable par combinaison linéaire.

Finalement, ces trois points assurent que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ . En particulier,  $E + F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ , donc  $E + F \subset \mathbf{R}[X]$ .

Il reste à établir l'inclusion réciproque. Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Le but est de prouver que  $P \in E + F$ , *i.e.* qu'il existe  $(Q, T) \in E \times F$  tel que  $P = Q + T$ . C'est un problème d'existence : on fait l'analyse au brouillon et on ne rédige que la synthèse !

*Analyse (au brouillon).* Supposons qu'il existe  $Q \in E$  et  $T \in F$  tel que  $P = Q + T$ . Puisque  $T \in F$ , il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $T = a(X + 1)$ . Puisque  $Q \in E$ ,  $Q'(0) = 0$ . Ainsi

$$P'(0) = (Q + T)'(0) = Q'(0) + T'(0) = 0 + a$$

donc  $a = P'(0)$  et  $Q = P - P'(0)(X + 1)$ .

*Synthèse (à rédiger précisément).* Posons  $Q = P - P'(0)(X + 1)$  et  $T = P'(0)(X + 1)$ . Alors  $Q + T = P$ . De plus,  $T \in F$  car  $P'(0) \in \mathbf{R}$ . Enfin,  $Q'(0) = ((P - P'(0)(X + 1))'(0) = P'(0) - P'(0) = 0$ , donc  $Q \in E$ .

Ainsi  $P \in E + F$ . On vient de montrer que  $\mathbf{R}[X] \subset E + F$ .

Finalement, on a démontré par double inclusion que  $\mathbf{R}[X] = E + F$ .

**Proposition 54.**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_p)$  deux familles de vecteurs de  $E$ . On note  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  et  $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$ . Alors,

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

*Démonstration.*

On procède par double inclusion.

- Sens  $\subset$ . Soit  $w \in F + G$ . Alors il existe  $u \in F$  et  $v \in G$  tels que  $u + v = w$ .  $u \in F$  donc il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$  tels que  $u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ . De même  $v \in G$  donc il existe  $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbf{K}$  tels que  $v = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$ .

Alors  $w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$ .

Donc  $w \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$  et  $F + G \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ .

- Sens  $\supset$ . Soit  $w \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ . Alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p} \in \mathbf{K}$  tels que

$$w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} y_1 + \dots + \lambda_{n+p} y_p.$$

On pose  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  et  $y = \lambda_{n+1} y_1 + \dots + \lambda_{n+p} y_p$ .

$x$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $F$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs. Donc  $x \in F$ . De même,  $y$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $G$  et  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $y \in G$ .

Donc  $w = x + y$  avec  $x \in F$  et  $y \in G$ , donc  $w \in F + G$ .

On a donc  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \subset F + G$ .

Par double inclusion,  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = F + G$ . □

**Proposition 55.**

Toute combinaison linéaire d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$  est un élément de  $F + G$ .

*Démonstration.*

Soit  $u \in F$  et  $v \in G$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ . Alors  $\lambda u \in F$  et  $\mu v \in G$  car  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Donc  $\lambda x + \mu y \in F + G$ . □

**3.5. Sous-espaces vectoriels en somme directe**

La somme de sous-espaces vectoriels est un outil intéressant, mais elle souffre d'un défaut important : le manque d'unicité des décompositions. Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors un vecteur de  $F + G$  peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un de  $G$ .

**Exemple 56.** Dans l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  des vecteurs de la géométrie dans l'espace, on considère deux plans non confondus  $\vec{\mathcal{P}}_1$  et  $\vec{\mathcal{P}}_2$ . Alors leur intersection est une droite vectorielle  $\vec{D}$  dirigée par un vecteur  $\vec{u}$ , qui appartient aux deux plans.

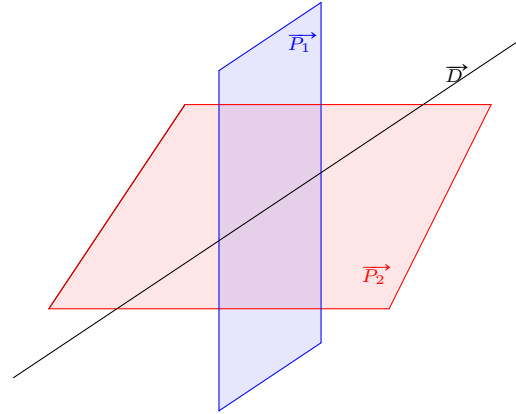
$\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2$  car  $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$  avec  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_1$  et  $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}_2$ .

Mais  $\vec{u}$  s'écrit aussi  $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$  avec  $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}_1$  et  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_2$ . On peut également écrire  $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{u}$  avec  $\frac{1}{3}\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_1$  et  $\frac{2}{3}\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}_2$ .

Ainsi, il n'y a pas unicité de la décomposition de  $\vec{u}$ . On a trouvé deux couples différents (et même trois!)  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  et  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$  tels que :

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \in \vec{\mathcal{P}}_1, \vec{v}_2 \in \vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{w}_1 \in \vec{\mathcal{P}}_1, \vec{w}_2 \in \vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \end{cases}$$

Se pose donc la question : quelle condition doit-on rajouter pour que les décompositions dans  $F + G$  soient uniques ?



#### Définition 57.

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de  $F + G$  se décompose de manière **unique** en la somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ . Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x, x' \in F, \forall y, y' \in G, \quad x + x' = y + y' \implies \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Lorsque la somme de  $F$  et  $G$  est directe, on la note  $F \oplus G$ .

**Exercice d'application 58.** Posons  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ . Montrer que  $\text{Vect}(e_1)$  et  $\text{Vect}(e_2)$  sont en somme directe.

$\hookrightarrow$  Soit  $a \in \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2)$ . Il existe  $(f, g) \in \text{Vect}(e_1) \times \text{Vect}(e_2)$  tel que  $a = f + g$ . Soit  $(f_0, g_0) \in \text{Vect}(e_1) \times \text{Vect}(e_2)$  tel que  $a = f_0 + g_0$ .

Puisque  $f \in \text{Vect}(e_1)$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $f = \lambda \cdot e_1$ . Ainsi  $f = (\lambda, 0)$ . De même, il existe  $\mu, \lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{R}$  tels que

$$g = \mu \cdot e_2 = (0, \mu), \quad f_0 = \lambda_0 \cdot e_1 = (\lambda_0, 0), \quad g_0 = \mu_0 \cdot e_2 = (0, \mu_0).$$

Alors  $a = f + g = (\lambda, 0) + (0, \mu) = (\lambda, \mu)$  et  $a = f_0 + g_0 = (\lambda_0, 0) + (0, \mu_0) = (\lambda_0, \mu_0)$ , donc  $\lambda = \lambda_0$  et  $\mu = \mu_0$ . Par conséquent,  $f = f_0$  et  $g = g_0$ . Donc il existe un unique couple  $(f, g) \in \text{Vect}(e_1) \times \text{Vect}(e_2)$  tels que  $a = f + g$ .

Finalement, les sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}(e_1)$  et  $\text{Vect}(e_2)$  sont en somme directe.

**Exercice d'application 59.** Posons  $F = \text{Vect}((1, 0))$  et  $G = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$ . Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont-ils en somme directe ?

$\hookrightarrow F$  et  $G$  ne sont pas en somme directe car  $(2, 0) \in F + G$  avec

$$(2, 0) = \underbrace{2 \times (1, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, 0)}_{\in G} = \underbrace{(0, 0)}_{\in F} + \underbrace{(1, 1) + (1, -1)}_{\in G}.$$

**Proposition 60 - Une première caractérisation.**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$$

*Démonstration.* • Supposons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

Soient  $x \in F$  et  $y \in G$  tels que  $x + y = 0_E$ . On peut décomposer  $0_E$  en  $0_E = 0_E + 0_E$  avec  $0_E \in F$  et  $0_E \in G$ . Comme on a supposé que  $F$  et  $G$  sont en somme directe, la décomposition de  $0_E$  est unique donc  $x = 0_E$  et  $y = 0_E$ .

- Supposons que

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$$

Soient  $x, x' \in F$  et  $y, y' \in G$  tels que  $x + y = x' + y'$ . Alors  $(x - x') + (y - y') = 0_E$ . De plus,  $x - x' \in F$  et  $y - y' \in G$ . Ainsi, d'après l'hypothèse,  $x - x' = 0_E$  et  $y - y' = 0_E$ . Finalement,  $x = x'$  et  $y = y'$ .  $\square$

**Proposition 61 - Seconde caractérisation.**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0_E\}$ .

*Démonstration.* • Supposons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. Nous allons montrer par double inclusion que  $F \cap G = \{0_E\}$ .

$F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , donc ils contiennent tous les deux  $0_E$ . Donc  $\{0_E\} \subset F \cap G$ .

Soit  $x \in F \cap G$ . Alors  $x \in F$  et  $x \in G$ . Montrons que  $x = 0_E$ .

On peut écrire  $x = x + 0_E$  avec  $x \in F$  et  $0_E \in G$ . On peut également écrire  $x = 0_E + x$  avec  $0_E \in F$  et  $x \in G$ . Comme  $F$  et  $G$  sont en somme directe, ces deux décompositions sont identiques, donc  $x = 0_E$ . Donc  $F \cap G \subset \{0_E\}$ .

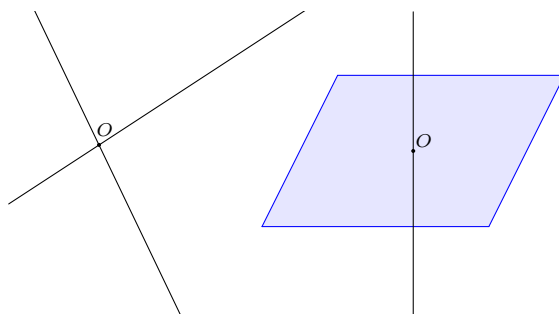
- Supposons que  $F \cap G = \{0_E\}$ . Montrons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

Soient  $x, x' \in F$  et  $y, y' \in G$ .

On suppose que  $x + y = x' + y'$ . Alors  $x - x' = y' - y$ .  $x - x' \in F$  et  $y' - y \in G$  car  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Donc  $x - x' \in F \cap G = \{0_E\}$ , d'où  $x - x' = 0_E$  et  $x = x'$ . Donc  $y = y'$ .

$F$  et  $G$  sont donc en somme directe.  $\square$

**Exemple 62.** Dans  $\vec{E}$  l'espace des vecteurs de la géométrie dans l'espace, deux droites non confondues sont en somme directe, une droite et un plan ne contenant pas cette droite sont en somme directe.



**Exercice d'application 63.** Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ , on pose  $F$  l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et  $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \mid g(0) = g'(0) = g''(0)\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ .
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

$\hookrightarrow$  Le point 1. est laissé à l'exercice. Montrons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. Pour cela, on va montrer que  $F \cap G = \{\theta\}$  où  $\theta$  est la fonction nulle. Procédons par double inclusion.

- Il est facile de voir que  $\theta \in F \cap G$ . En effet,  $F$  et  $G$  étant tous deux des sous-espaces vectoriels de  $E$ , il contiennent  $\theta$ . Donc  $\{\theta\} \subset F \cap G$ .
- Soit  $h \in F \cap G$ . Alors  $h \in F$  et  $h \in G$ .  $h$  est une fonction polynomiale de degré 2, donc il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $h(x) = ax^2 + bx + c$ . On a  $h(0) = c$ .  
Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $h'(x) = 2ax + b$ . Donc  $h'(0) = b$ .  
Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $h''(x) = 2a$ . Donc  $h''(0) = 2a$ .  
Comme  $h''(0) = h'(0) = h(0)$ , on a forcément  $a = b = c = 0$ . Donc pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $h(x) = \theta(x)$  donc  $h = \theta$ . Ainsi,  $F \cap G \subset \{\theta\}$ .
- Par double inclusion,  $F \cap G = \{\theta\}$ . Donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

### 3.6. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

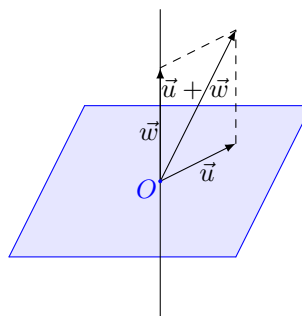
On cherche maintenant à rajouter une nouvelle condition aux sommes directes : pouvoir décomposer TOUS les vecteurs de  $E$  comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ . Pour cela, on a besoin de la notion de supplémentaire.

#### Définition 64.

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  lorsque tout élément  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  :

$$\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

**Exemple 65.** Dans l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  des vecteurs de la géométrie dans l'espace, un plan  $\vec{\mathcal{P}}$  et une droite  $\vec{\mathcal{D}}$  qui n'est pas incluse dans  $\vec{\mathcal{P}}$  sont supplémentaires dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .



#### Proposition 66 - Une première caractérisation.

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si  $F + G = E$  et  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

*Démonstration.* • Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Supposons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ . Comme  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on sait que  $F + G \subset E$ .

Réciproquement, soit  $x \in E$ . Alors,  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . Donc  $x \in F + G$ . D'où  $E \subset F + G$  et  $E = F + G$  par double inclusion.

Soit  $x \in E$ . Alors  $x \in F + G$ . Comme  $F$  et  $G$  sont en somme directe,  $x$  se décompose de manière unique comme  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . Donc  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .  $\square$

En combinant ce résultat avec seconde caractérisation des sommes directes (cf. Proposition 61), on obtient :

$$F + G = E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

2. On a aussi déjà vu que toute fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donc

$$\{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ paire}\} \oplus \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ impaire}\} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Par exemple, la décomposition de  $\exp$  est  $\exp = \text{ch} + \text{sh}$ .

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0; 1]) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ f \in \mathcal{C}^0([0; 1]) \mid f \text{ est constante sur } [0; 1] \}.$$

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{C}^0([0; 1])$ .
2. Montrer que  $F \oplus G = E$ .



- On a donc que  $\int_0^1 f = 0$  et qu'il existe  $c \in \mathbf{R}$  telle que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $g(x) = c$ . Alors,

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 (f(t) + g(t)) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 c dt = c.$$

Donc  $c = \int_0^1 \varphi(t) dt$ , d'où l'on déduit que  $g$  est la fonction constante égale à  $\int_0^1 \varphi(t) dt$  et  $f = \varphi - c$ , *i.e.*

$$\begin{aligned} f : [0; 1] &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt \end{aligned} .$$

Il y a donc un unique couple solution candidat, le couple  $(f, g)$  obtenu ci-dessus.

*Synthèse.* On définit

$$\begin{aligned} f : [0; 1] &\rightarrow \mathbf{R} & g : [0; 1] &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt & x &\mapsto \int_0^1 \varphi(t) dt \end{aligned} .$$

Ces fonctions sont bien continues sur  $[0; 1]$ .

- $g$  est bien une fonction constante, donc  $g \in G$ .
- On pose  $c = \int_0^1 \varphi(t) dt$ . Alors,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (\varphi(t) - c) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt - \int_0^1 c dt = c - c = 0$$

Donc  $f \in F$ .

- Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt + \int_0^1 \varphi(t) dt = \varphi(x).$$

Donc  $f + g = \varphi$ .

*Conclusion.*  $\varphi$  s'écrit bien de manière unique  $\varphi = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ . Ce raisonnement est valable pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}^0([0; 1])$ , donc  $F$  et  $G$  sont bien supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice d'application 72.** Posons  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ . Montrer que  $F \oplus G = \mathbf{R}^3$ .

$\hookrightarrow$  On vérifie d'abord (laissé en exercice) que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$ . Montrons à présent que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ . On cherche à montrer qu'il existe un unique couple  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $u = f + g$ .

*Analyse.* On suppose qu'il existe  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $u = f + g$ .

Puisque  $f \in F$ , il existe  $(x_f, y_f, z_f) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $f = (x_f, y_f, z_f)$  avec  $x_f - y_f + 2z_f = 0$ .

Puisque  $g \in G$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $g = \lambda \cdot (1, 1, 1)$ .

On a  $u = f + g$ , d'où

$$\begin{cases} x &= x_f + \lambda \\ y &= y_f + \lambda \\ z &= z_f + \lambda \end{cases}$$

Alors  $0 = x_f - y_f + 2z_f$  entraîne  $0 = x - y + 2z - 2\lambda$  puis  $\lambda = \frac{x-y-2z}{2}$ . On obtient

$$g = \frac{x-y+2z}{2}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad f = u - \frac{x-y+2z}{2}(1, 1, 1),$$

ce qui montre l'unicité du couple  $(f, g)$  s'il existe.

*Synthèse.* Posons

$$g = \frac{x-y+2z}{2}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad f = u - \frac{x-y+2z}{2}(1, 1, 1).$$

Alors  $f + g = u$  et  $g \in G$ . Vérifions que  $f \in F$ .

$$f = (x, y, z) - \frac{x-y+2z}{2}(1, 1, 1) = \left(x - \frac{x-y+2z}{2}, y - \frac{x-y+2z}{2}, z - \frac{x-y+2z}{2}\right)$$



$$\left(x - \frac{x-y+2z}{2}\right) - \left(y - \frac{x-y+2z}{2}\right) + 2\left(z - \frac{x-y+2z}{2}\right) = 0$$

*Conclusion.* Par analyse-synthèse, on a montré que

$$\forall u \in \mathbf{R}^3, \exists!(f, q) \in F \times G, \quad u = f + q.$$

[illegible]

$E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels dans toute la suite de ce cours.

Si  $u$  est linéaire et à valeurs dans  $\mathbf{K}$ , on dit alors que c'est une **forme linéaire**.

PCSI 2

*Démonstration.* 1.  $u(0_E) = u(0_E + 0_E) = u(0_E) + u(0_E)$ . D'où  $0_F = u(0_E)$ .

2. Par récurrence sur  $n$  à partir de la définition.

□

**Proposition 77 - Caractérisation.**

Soit  $f : E \longrightarrow F$ .

$$f \in \mathcal{L}[E, F] \iff \forall (\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2, \quad f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

*Démonstration.*

Le sens direct est immédiat. Réciproquement, supposons que pour tout  $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E$ ,  $f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$ . En choisissant  $\lambda = 1$  dans cette relation et pour  $(x, y) \in E^2$  quelconques, on a

$$f(x + y) = f(1 \cdot x + y) = 1 \cdot f(x) + f(y) = f(x) + f(y).$$

En choisissant  $x = 0$  dans la relation et  $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$  quelconque, on a

$$f(\lambda \cdot x + 0) = \lambda \cdot f(x) + f(0) = \lambda \cdot f(x).$$

Finalement, par double implication, on a établi l'équivalence cherchée.

□

**Exercice d'application 78.** Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} & f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} & f_3 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^2 & x \longmapsto -3x & x \longmapsto 2x + 1 \\ f_4 : \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K} & f_5 : \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K} & f_6 : \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}[X] \\ (x, y) \longmapsto 2x + 3y & (x, y) \longmapsto 2x + 3y + 1 & P \longmapsto P' \\ f_7 : \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R}) & f_8 : \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} & f_9 : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ P \longmapsto P' & f \longmapsto \int_0^1 f(t) dt & M \longmapsto M^T \end{array}$$

$\hookrightarrow f_1$  n'est pas linéaire car  $f_1(1 + 2) = (1 + 2)^2 = 9$  tandis que  $f_1(1) + f_1(2) = 1 + 4 = 5$ .

$f_2$  est une homothétie donc est linéaire.

$f_3(0) \neq 0$  donc  $f_3$  n'est pas linéaire.

Soit  $(\lambda, (x, y), (x', y')) \in \mathbf{K} \times (\mathbf{K}^2)^2$ . On a

$$f_4(\lambda(x, y) + (x', y')) = f_4(\lambda x + x', \lambda y + y') = 2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') = \lambda f_4(x, y) + f_4(x', y')$$

donc  $f_4$  est linéaire.

Toutes les autres applications sont linéaires d'après les propriétés étudiées dans les chapitres précédents.

**Exercice d'application 79.** On admet que  $D^1(\mathbf{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  (à démontrer). Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{ll} \phi : D^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ y \longmapsto \left[ \begin{array}{ll} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto y'(x) + \frac{1}{1+x^2}y(x) \end{array} \right] \end{array}$$

$\hookrightarrow$  Soit  $(\lambda, y, z) \in \mathbf{R} \times D^1(\mathbf{R})^2$ . Posons  $f = \phi(\lambda y + z)$  et  $g = \lambda \phi(y) + \phi(z)$ . On doit prouver que  $f$  et  $g$  sont égales, donc que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = g(x)$ .

Soit  $x \in \mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \phi(\lambda y + z)(x) \\
 &= (\lambda y + z)'(x) + \frac{1}{1+x^2}(\lambda y + z)(x) \\
 &= \lambda y'(x) + z'(x) + \frac{1}{1+x^2}(\lambda y(x) + z(x)) \\
 &= \lambda \left( y'(x) + \frac{1}{1+x^2} y(x) \right) + \left( z'(x) + \frac{1}{1+x^2} z(x) \right) \\
 &= \lambda \phi(y)(x) + \phi(z)(x) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

Donc  $f = g$ . Il s'ensuit que  $\phi$  est linéaire.

#### Définition 80.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- Si  $F = E$ , on dit que  $f$  est un **endomorphisme**. L'ensemble des endomorphismes est notée  $\mathcal{L}(E)$  (ainsi  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ ).
- Si  $f$  est bijective,  $f$  est un **isomorphisme**.
- Si  $F = E$  et  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de  $E$  est noté  $\text{GL}(E)$ . Cet ensemble est appelé **groupe linéaire** de  $E$ .

**Exemple 81.** 1.  $\text{Id}_E : E \longrightarrow E$  est un automorphisme de  $E$ .

2. Pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}^*$ ,  $\lambda \cdot \text{Id}_E$  est un automorphisme (la réciproque est  $\frac{1}{\lambda} \cdot \text{Id}_E$ ).

**Exemple 82.** 1.  $\mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2$  est un endomorphisme de  $\mathbf{K}^2$ .  
 $(x, y) \longmapsto (2x - 5y, -x + y)$

2.  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ .  
 $\varphi \longmapsto \varphi'$

3.  $\mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}[X]$  est un endomorphisme de  $\mathbf{K}[X]$ .  
 $P \longmapsto (X^3 + 5X + 2)P$

#### Définition 83.

On dit que deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de  $E$  vers  $F$ .

**Exemple 84.**  $\mathbf{R}_1[X]$  est isomorphe à  $\mathbf{R}^2$  puisque  $\varphi : \mathbf{R}_1[X] \longrightarrow \mathbf{R}^2$  est un isomorphisme.  
 $P \longmapsto (P(0), P'(0))$

## 4.2. Supplémentaires et restrictions

**Théorème 85.**

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels,  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans  $E$  (c'est à dire que  $E = E_1 \oplus E_2$ ).

Soient  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$  et  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors, il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ .

Cette application est définie de la manière suivante : pour tout  $x \in E$ ,  $x$  s'écrit de manière unique  $x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  et

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2).$$

*Démonstration.*

Soient  $x, y \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ . Alors il existe des uniques  $x_1, x_2, y_1, y_2$  tels que  $x_1, y_1 \in E_1$ ,  $x_2, y_2 \in E_2$  et  $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ . On a

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u(\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + u_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1) + \lambda u_2(x_2) + \mu u_2(y_2) \\ &= \lambda(u_1(x_1) + u_2(x_2)) + \mu(u_1(y_1) + u_2(y_2)) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc  $u$  est linéaire.

Soit  $x \in E_1$ . Alors, la décomposition de  $x$  dans la somme directe  $E_1 \oplus E_2$  est  $x + 0_E$ . Donc  $u(x) = u_1(x) + u_2(0_E) = u_1(x) + 0_E = u_1(x)$ .

D'où  $u|_{E_1} = u_1$ . De même, on montre que  $u|_{E_2} = u_2$ .

Montrons enfin que  $u$  est unique. Soit  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $v|_{E_1} = u_1$  et  $v|_{E_2} = u_2$ .

Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique couple  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  tel que  $x = x_1 + x_2$ .

$v|_{E_1} = u_1$  donc  $v(x_1) = u_1(x_1)$ . De même,  $v(x_2) = u_2(x_2)$ . Par linéarité de  $v$ , on a

$$v(x) = v(x_1) + v(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) = u(x).$$

Donc  $v = u$ . □

**Remarque 86.** Le but de ce mode de définition est de pouvoir définir une application linéaire en donnant ses valeurs uniquement sur deux sous-vectoriels supplémentaires (et non sur tout l'espace vectoriel).

### 4.3. Opérations et structure

**Proposition 87.**

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\alpha \in \mathbf{K}$ .

Alors  $\alpha u + v : E \longrightarrow F$  est une application linéaire.

$$x \longmapsto \alpha u(x) + v(x)$$

*Démonstration.*

Soient  $x, y \in E$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ . Alors,

$$\begin{aligned}(\alpha u + v)(\lambda x + \mu y) &= \alpha u(\lambda x + \mu y) + v(\lambda x + \mu y) \\&= \alpha u(\lambda x + \mu y) + v(\lambda x + \mu y) \text{ car } u, v \text{ linéaires} \\&= \alpha(\lambda u(x) + \mu u(y)) + \lambda v(x) + \mu v(y) \\&= \lambda(\alpha u(x) + v(x)) + \mu(\alpha u(y) + v(y)) \\&= \lambda(\alpha u + v)(x) + \mu(\alpha u + v)(y)\end{aligned}$$

Donc  $\alpha u + v$  est bien linéaire. □

**Corollaire 88.**

$\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ .

En particulier, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

*Démonstration.*

On a  $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$ . On conclut en utilisant la proposition précédente et le fait que l'application nulle est linéaire. □

**Proposition 89.**

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

*Démonstration.*

Soient  $u : E \longrightarrow F$  et  $v : F \longrightarrow G$  deux applications linéaires. Alors, pour tout  $x, y \in E$ , pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned}(v \circ u)(\alpha x + \beta y) &= v(u(\alpha x + \beta y)) \\&= v(\alpha u(x) + \beta u(y)) \\&= \alpha v(u(x)) + \beta v(u(y)) \\&= \alpha(v \circ u)(x) + \beta(v \circ u)(y)\end{aligned}$$

$v \circ u$  est donc linéaire. □

**Proposition 90.**

Pour tout  $u, u' \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v, v' \in \mathcal{L}(F, G)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ , on a :

$$v \circ (\lambda u + \mu u') = \lambda v \circ u + \mu v \circ u' \quad (\lambda v + \mu v') \circ u = \lambda v \circ u + \mu v' \circ u$$

Une autre façon de le voir est de dire que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ \varphi & \longmapsto & v \circ \varphi \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ u \end{array}$$

sont des applications linéaires.

*Démonstration.*

Laissé en exercice. □

**Proposition 91 - Cas particulier des endomorphismes.**

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

$$u + v \in \mathcal{L}(E) \quad \lambda u \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v \in \mathcal{L}(E).$$

**⚠ Attention ⚠.** On pourrait donc être tenté de dire que  $\mathcal{L}(E)$  muni la composition et de la multiplication externe par un scalaire est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Ce n'est a priori pas vrai car les éléments de  $\mathcal{L}(E)$  ne sont pas tous inversibles pour la loi  $\circ$  (c'est-à-dire bijectifs).

**Notation 92.** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $u^2$  l'endomorphisme  $u \circ u$ . Plus généralement, si  $n \in \mathbf{N}$ , on définit  $u^n$  en posant

$$u^0 = \text{Id}_E, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, u^n = u \circ u^{n-1} = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}.$$

Notons que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u^n = u^{n-1} \circ u$ .

**Définition 93.**

Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . On dit que  $u$  et  $v$  **commutent** lorsque  $u \circ v = v \circ u$ .

**⚠ Attention ⚠.** La composition est notée comme un produit : ainsi  $u^2 \neq u \times u$  ! Cette notation pourrait par ailleurs faire penser que la commutation est commutative : ça n'est pas le cas ! (il vaut mieux la voir comme la multiplication des matrices carrées).

Pr exemple, pour  $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  et  $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , on a  $v \circ u(0, 1) = (-1, 1)$  et  $u \circ v(0, 1) = (1, 1)$ .

**Remarque 94.** Comme pour le produit de matrices, on peut avoir  $u \circ v = 0$  avec  $u$  et  $v$  toutes les deux non nulles.

Considérer par exemple  $u : (x, y) \mapsto (0, y)$  et  $v : (x, y) \mapsto (x, 0)$ .

**Proposition 95.**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$ . Si  $u$  et  $v$  commutent, alors

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}, \quad u^n - v^n = (u - v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k-1}.$$

*Démonstration.*

Laissé en exercice. □

**Exemple 96.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$u \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ u = u.$$

$$(u + \text{Id}_E)^3 = (u + \text{Id}_E) \circ (u + \text{Id}_E) \circ (u + \text{Id}_E) = u^3 + 3u^2 + 3u + \text{Id}_E.$$

$$u \circ u - \text{Id}_E = u^2 - \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E) \circ (u + \text{Id}_E).$$

**Proposition 97.**

Soit  $u \in F^E$  un isomorphisme. Alors  $u^{-1}$  est aussi un isomorphisme.

*Démonstration.*

L'application  $u$  étant bijective,  $u^{-1}$  l'est aussi. Il reste à montrer que  $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .  
Soit  $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times F^2$ . Alors  $u^{-1}(x) \in E$  et  $u^{-1}(y) \in E$ . Donc, puisque  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,

$$u(\lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)) = \lambda u(u^{-1}(x)) + u(u^{-1}(y)) = \lambda x + y = u(u^{-1}(\lambda x + y))$$

L'application  $u$  étant bijective, on en déduit que  $\lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y) = u^{-1}(\lambda x + y)$ , ce qui entraîne  $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .  $\square$

En particulier, si  $u \in \text{GL}(E)$ , alors  $u^{-1} \in \text{GL}(E)$ .

**Remarque 98.**  $\text{GL}(E)$  s'appelle « groupe linéaire » car il s'agit effectivement d'un groupe, en considérant l'opération  $\circ$ . La composition est bien interne (Proposition 91), associative (la composition d'application est toujours associative), possède un élément neutre ( $\text{Id}_E$ , d'après l'Exemple 81) et tout élément de  $\text{GL}(E)$  possède un inverse dans  $\text{GL}(E)$  pour la loi  $\circ$  (Proposition 97).

#### 4.4. Noyau et image d'une application linéaire

##### Proposition 99 - Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $u(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
2. Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , alors  $u^{-1}(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- $u(G) \subset F$  par définition de  $u$ .
- $0_E \in G$  car  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Donc  $u(0_E) \in u(G)$ . Or on a vu que  $u(0_E) = 0_F$ , donc  $0_F \in u(G)$ .
- Soient  $y, y' \in u(G)$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Alors il existe  $x$  et  $x'$  dans  $G$  tels que  $u(x) = y$  et  $u(x') = y'$ . Alors,  $\lambda y + y' = \lambda u(x) + u(x') = u(\lambda x + x')$  par linéarité de  $u$ . Or  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x, x' \in G$ , donc  $\lambda x + x' \in G$ . D'où  $\lambda y + y' \in u(G)$ .

Donc  $u(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

2. Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $F$ .

- Par définition de  $u$ ,  $u^{-1}(H) \subset E$ .
- Comme  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $0_F \in H$ . Or  $u(0_E) = 0_F$  donc  $0_E \in u^{-1}(H)$ .
- Soient  $x, x' \in u^{-1}(H)$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Alors  $u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$ .  $x \in u^{-1}(H)$  donc  $u(x) \in H$ . De même,  $u(x') \in H$ . Comme  $H$  est sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $\lambda u(x) + u(x') \in H$ . Donc  $\lambda x + x' \in u^{-1}(H)$ .

Donc  $u^{-1}(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\square$

##### Définition 100.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **noyau** de  $u$  et on note  $\text{Ker}(u)$  l'ensemble des antécédents de  $0_F$  par  $u$ .

$$\text{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

On appelle **image** de  $u$ , notée  $\text{Im}(u)$  l'ensemble des images des éléments de  $E$  par  $u$ .

$$\text{Im}(u) = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, u(x) = y\}.$$

**Proposition 101.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors,

- $\text{Ker}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,
- $\text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

- $\text{Ker}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,
- $\text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

C'est une conséquence de la Proposition 99.

De même,  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , donc  $u(E) = \text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .  $\square$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathcal{D}(I) & \longrightarrow & \mathcal{D}(I) \quad , \quad \text{et} \quad \psi: \mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathcal{D}(I) \\ h & \longmapsto & h' + ah \qquad \qquad \qquad h \longmapsto h'' + ah' + bh \end{array}$$

$\text{Ker}(\varphi)$  est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène  $y' + a(t)y = 0$  et  $\text{Ker}(\psi)$  est l'ensemble des solutions de  $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ .

2. Soit  $u : \begin{matrix} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x + y - z, y - 2z) \end{matrix}$  (c'est une application linéaire).

$$u(x, y, z) = (a, b) \iff \begin{cases} x + y - z &= a \\ y - 2z &= b \end{cases} \\ \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x &= a - b - \lambda \\ y &= b + 2\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$$

En prenant  $a = b = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(u) &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, (x, y, z) = \lambda(-1, 2, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-1, 2, 1)) \end{aligned}$$

[illegible]

**Exercice d'application 104.** Posons  $u :$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y) \end{array}$$

1. Vérifier que  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}(u)$ . Le décrire comme un sous-espace vectoriel engendré.
3. Déterminer  $\text{Im}(u)$  : à quelles conditions sur  $a$  et  $b$  a-t-on  $(a, b) \in \text{Im}(u)$  (autrement dit : décrire  $\text{Im}(u)$  sous forme d'équations, si possible).



1. Soient  $a = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ,  $b = (s, t, v) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors  $a + \lambda b = (x + \lambda s, y + \lambda t, z + \lambda v)$ . Donc

et

Ainsi  $u(a + \lambda b) = u(a) + \lambda u(b)$ . Donc  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ .

2. Soit  $a = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ .

Donc

$$\text{Ker}(u) = \{(y, y, -2y) : y \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((1, 1, -2)).$$

3.  $\text{Im}(u) = \{u(a) : a \in \mathbf{R}^3\} = \{(x+y+z, x-y) : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\} = \text{Vect}((1, 1), (1, -1), (1, 0)).$   
 Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ .

Or ce système admet deux pivot, donc ne présente pas de ligne incompatible : il admet toujours une solution (même une infinité, dépendant d'une inconnue auxiliaire). Donc  $(a, b) \in \text{Im}(u)$ . Finalement, on a montré que  $\text{Im}(u) = \mathbf{R}^2$  (il n'y a donc pas d'équations pour décrire  $\text{Im}(u)$ ).



**Exercice d'application 105.** Montrer que l'application

est un endomorphisme et déterminer son noyau.

$\hookrightarrow$  Montrons dans un premier temps que  $\phi$  est linéaire. Soit  $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Posons  $w = \phi(u + \lambda v)$  et  $r = \phi(u) + \lambda \phi(v)$ . On cherche à montrer que  $w = r$ , *i.e.* que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $w_n = r_n$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$ .

$$w_n = \phi(u + \lambda v)_n = (u + \lambda v)_{n+1} - 2(u + \lambda v)_n = u_{n+1} - 2u_n + \lambda(v_{n+1} - 2v_n) = \phi(u)_n + \lambda\phi(v)_n = r_n.$$

Par conséquent,  $w = r$  donc  $\phi(u + \lambda v) = \phi(u) + \lambda\phi(v)$  pour tous  $u, v \in \mathbf{R}^N$  et pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ . L'application  $\phi$  est donc linéaire. Puisque l'espace de départ est égal à l'espace d'arrivée,  $\phi$  est un endomorphisme.

Déterminons le noyau de  $\phi$ . Par définition,

$$\text{Ker}(\phi) = \{u \in \mathbf{R}^N \mid \phi(u) = 0_{\mathbf{R}^N}\} = \{u \in \mathbf{R}^N \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} - 2u_n = 0\}.$$

Ainsi, pour tout  $u \in \mathbf{R}^N$ ,

$$u \in \text{Ker}(\phi) \iff \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2u_n \iff u \text{ est géométrique de raison } 2.$$

Donc

$$\text{Ker}(\phi) = \{(a \cdot 2^n)_{n \in \mathbf{N}} : a \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbf{N}}).$$

Le résultat suivant est fondamental, c'est en effet presque toujours ainsi que l'on montre l'injectivité d'une application linéaire.

### Théorème 106.

Soit  $u : E \longrightarrow F$  une application linéaire. Alors

$$u \text{ est injective} \iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}.$$

*Démonstration.*

Supposons que  $u$  est injective.  $u(0_E) = 0_F$  donc  $0_E \in \text{Ker}(u)$  puis  $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(u)$ . Alors  $u(x) = 0_F$ . Or  $u$  est injective donc  $x = 0_E$ . D'où  $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$ .

Finalement,  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ . Soient  $x, x' \in E$  tels que  $u(x) = u(x')$ . Montrons qu'alors  $x = x'$ .

On a  $u(x) - u(x') = 0_F$ . Par linéarité,  $u(x - x') = 0_F$ , donc  $x - x' \in \text{Ker}(u)$ . Or  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ , donc  $x - x' = 0_E$  et  $x = x'$ .

Donc  $u$  est injective.  $\square$

Remarque technique 107. Pour montrer qu'une application linéaire  $u : E \longrightarrow F$  est injective, on montre que

$$\forall x \in E, \quad (u(x) = 0) \implies (x = 0).$$

En effet, cela montre que  $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$  et comme  $u(0) = 0$ , l'inclusion réciproque  $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$  est toujours vérifiée (il faut tout de même la préciser à chaque fois).

**Exercice d'application 108.** L'application  $u : \mathbf{K}^3 \longrightarrow \mathbf{K}^2$  est-t-elle injective ?  
$$(x, y, z) \longmapsto (2x + 3y - z, 5x + 6y - 4z)$$

$\hookrightarrow$  Le système  $u(x, y, z) = 0$  a trois inconnues et deux équations. Il y a donc une inconnue secondaire et une infinité de solutions.

Donc  $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$  et  $u$  n'est pas injective.

**Exercice d'application 109.** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(0), P(1), P(2)) \end{aligned}$$

est une application surjective.

$\hookrightarrow$  On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\phi$  est linéaire. Montrons que  $\phi$  est injective.

Soit  $P \in \text{Ker}(\phi)$ . Alors  $\phi(P) = 0_{\mathbf{R}^3}$  donc  $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ . En particulier,  $P$  admet au moins trois racines distinctes. Or  $P$  est de degré au plus deux, donc  $P$  est le polynôme nul.

On vient de montrer que  $\text{Ker}(\phi) \subset \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$ . L'autre inclusion étant évidente, on en déduit  $\text{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$  ce qui prouve l'injectivité de  $\phi$ .

## 5. Equations linéaires

### Définition 110.

On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme

$$f(x) = y$$

d'inconnue  $x \in E$ , de second membre  $y \in F$  et où  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Exemple 111.** On reprend les notations de la définition.

1. L'équation  $y' + \frac{1}{x^2+1}y = 0$  est une équation linéaire car on peut l'écrire sous la forme  $\phi(y) = 0$  avec ici  $E = D^1(\mathbf{R})$ ,  $F = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  et

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow F \\ y &\longmapsto \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & y'(x) + \frac{1}{x^2+1}y(x) \end{array} \right] \end{aligned}$$

2. L'équation  $y'' + 2y' + y = \cos(x)e^{-2x}$  est une équation linéaire car on peut l'écrire sous la forme  $\phi(y) = f$ , avec ici  $E = D^2(\mathbf{R})$ ,  $F = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ,

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow F & \text{et} & \quad f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ y &\longmapsto y'' + 2y' + y & & \quad x \longmapsto \cos(x)e^{-2x} \end{aligned}$$

3. Déterminer le terme général de la suite  $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  définie par la donnée de  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = 2u_n - 3$  revient à déterminer le terme général de la solution de l'équation linéaire  $\phi(u) = v$  vérifiant  $u_0 = 1$ , où ici  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ,  $F = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} &\longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u &\longmapsto (u_{n+1} - 2u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{aligned}$$

et  $v = (-3)_{n \in \mathbf{N}}$ .

### Théorème 112.

Soit  $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $b \in F$ . On considère l'équation linéaire  $\phi(x) = b$  d'inconnue  $x \in E$ . On suppose que l'on connaît une solution  $x_0$  de cette équation. Alors l'ensemble des solutions est

$$\{x_0 + x_H : x_H \in \text{Ker}(\phi)\}.$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} \phi(x) = b &\iff \phi(x) = \phi(x_0) \\ &\iff \phi(x) - \phi(x_0) = 0_F \\ &\iff \phi(x - x_0) = 0_F \\ &\iff x - x_0 \in \text{Ker}(\phi) \\ &\iff \exists x_H \in \text{Ker}(\phi), x = x_0 + x_H. \end{aligned}$$

□

**Remarque 113.** Dire que  $x \in \text{Ker}(\phi)$  revient à dire que  $\phi(x) = 0_F$ , ce qui correspond à l'équation homogène associée à l'équation linéaire  $\phi(x) = b$ . On retrouve ainsi le résultat classique sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire : les solutions sont la somme d'une solution particulière avec les solutions de l'équation homogène associée.

**Exercice d'application 114.** Déterminer le terme général de la suite  $u$  définie par la donnée de  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$$

(sans utiliser les résultats sur les suites arithmético-géométriques, qu'on redémontrant ici dans un cas particulier).

↔ La suite  $u$  est solution de l'équation linéaire  $\phi(u) = v$ , avec  $v = (-3)_{n \in \mathbf{N}}$  et

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} &\longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u &\longmapsto (u_{n+1} - 2u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{aligned}$$

On a déjà montré (cf. Exercice d'application 105) que

$$\text{Ker}(\phi) = \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Déterminons une solution particulière de l'équation linéaire. On la cherche sous la forme d'une suite constante.

Soit  $r \in \mathbf{R}$ . Soit  $w = (r)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $w$  est solution de l'équation linéaire si et seulement si  $r - 2r = -3$  si et seulement si  $r = 3$ . Ainsi  $w = (3)_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de l'équation linéaire.

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire est donc

$$\{(3 + \lambda \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}} : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Or  $u$  est une solution, donc il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $u = (3 + \lambda \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . De plus,  $u_0 = 1$  donc  $\lambda = -2$ . Finalement, le terme général de la suite  $u$  est  $u_n = 3 - 2^{n+1}$ .

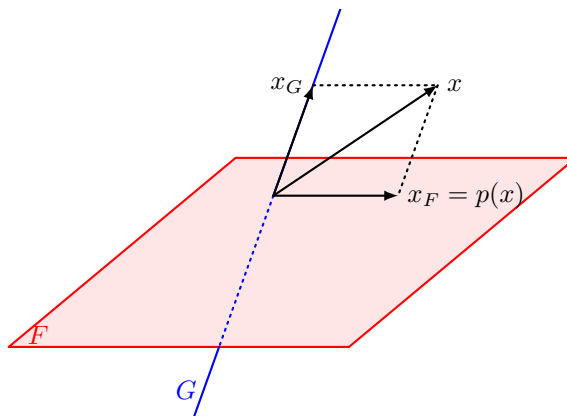
## 6. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

### 6.1. Projecteurs

#### Définition 115.

Soit  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$  (i.e.  $E = F \oplus G$ ). On appelle **projection** (ou **projecteur**) sur  $F$  parallèlement à  $G$  l'application

$$\begin{aligned} p : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} &\longmapsto x_F \end{aligned}$$



**Exemple 116.** Considérons le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ . Puisque tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous forme algébrique,  $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$ .

La projection sur  $\mathbf{R}$  parallèlement à  $i\mathbf{R}$  est l'application  $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$   $z \longmapsto \Re(z)$ .

La projection sur  $i\mathbf{R}$  parallèlement à  $\mathbf{R}$  est l'application  $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$   $z \longmapsto i \Im(z)$ .

**Exercice d'application 117.** Considérons  $E = \mathbf{R}^2$ ,  $E_1 = \text{Vect}((1, 0))$  et  $E_2 = \text{Vect}(0, 1)$ . Montrer que  $E_1 \oplus E_2 = E$  et déterminer les projecteurs associés à cette décomposition.

$\hookrightarrow$  Tout d'abord,  $E_1$  et  $E_2$  sont bien des sous-espaces vectoriels. Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

*Analyse.* Supposons qu'il existe  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_2$  tels que  $(x, y) = u_1 + u_2$ . Puisque  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_2$ , il existe  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $u_1 = a \cdot (1, 0)$  et  $u_2 = b \cdot (0, 1)$ . Alors

$$(x, y) = u_1 + u_2 = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

donc  $a = x$  et  $b = y$ . On vient de montrer l'unicité sous réserve d'existence.

*Synthèse.* Posons  $u_1 = x \cdot (1, 0)$  et  $u_2 = y \cdot (0, 1)$ . Alors  $u_1 \in E_1$ ,  $u_2 \in E_2$  et  $u_1 + u_2 = (x, y)$ . On vient d'établir l'existence.

*Conclusion.* Finalement, par analyse-synthèse, on a montré que tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de  $E_1$  et d'un vecteur de  $E_2$ . Donc  $E = E_1 \oplus E_2$ .

D'après la décomposition précédente, la projection sur  $E_1$  parallèlement sur  $E_2$  et la projection sur  $E_2$  parallèlement à  $E_1$  sont données respectivement par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, y) \end{array}$$

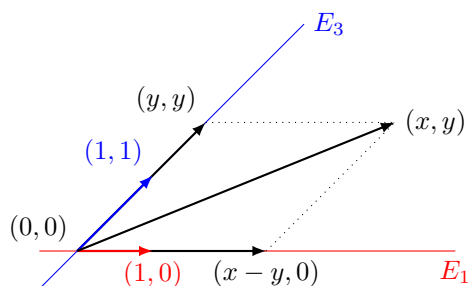
**Exemple 118.** Considérons  $E = \mathbf{R}^2$ ,  $E_1 = \text{Vect}((1, 0))$  et  $E_3 = \text{Vect}((1, 1))$ .

On admet que  $E_1 \oplus E_3 = E$  (se démontre par analyse-synthèse : à faire!) avec, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$(x, y) = \underbrace{(x - y, 0)}_{\in E_1} + \underbrace{(y, y)}_{\in E_3}.$$

La projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_3$  et sur  $E_3$  parallèlement à  $E_1$  sont données respectivement par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, y) \end{array}.$$



**Remarque 119.** Si  $F \oplus G = E$  et si  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors :

- pour tout  $x \in G$ ,  $p(x) = 0_E$  car  $x = 0_E + x$  ;
- pour tout  $x \in F$ ,  $p(x) = x$  car  $x = x + 0_E$ .

### Proposition 120.

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . La projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  est un endomorphisme de  $E$ .

*Démonstration.*

*Première démonstration.* C'est une conséquence du Théorème 85, puisque cette projection  $p$  est définie par  $p|_F = \text{Id}_F$  et  $p|_G = 0$ .

*Seconde démonstration.* Soit  $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2$ . Il existe  $(x_1, x_2) \in F^2$  et  $(y_1, y_2) \in G^2$  tels que  $x = x_1 + x_2$  et  $y = y_1 + y_2$ . Ainsi,

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2).$$

Or  $\lambda x_1 + y_1 \in F$  et  $\lambda x_2 + y_2 \in G$  puisque  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels. Par conséquent, en notant  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ ,

$$p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y).$$

On a montré que  $p \in \mathcal{L}(E)$ . □

### Proposition 121.

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors

1.  $\text{Im}(p) = F = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$  ;
2.  $\text{Ker}(p) = G$ .

*Démonstration.* 1. Pour tout  $x \in E$ , on a  $p(x) \in F$ , donc  $\text{Im}(p) \subset F$ .

Réciproquement, si  $y \in F$ , alors  $y = p(x)$  avec  $x \in E$ . On a donc  $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$ . Donc  $F \subset \text{Im}(p)$ . Donc  $\text{Im}(p) = F$ .

De plus, soit  $x \in E$ . Il existe  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tel que  $x = x_F + x_G$ .

$$x \in \text{Ker}(\text{Id}_E - p) \iff (\text{Id}_E - p)(x) = 0 \iff x - p(x) = 0 \iff x = p(x) \iff x \in F.$$

Donc  $F = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$ .

2. On a

$$x \in \text{Ker}(p) \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \iff x \in G.$$

Donc  $\text{Ker}(p) = G$ . □

### Théorème 122 - Caractérisation.

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

L'application  $u$  est un projecteur si et seulement si  $u \circ u = u$ .

Le cas échéant,  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u) = E$  et  $u$  est la projection sur  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Im}(u)$  parallèlement à  $\text{Ker}(u)$  :

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{u(x)}_{\in \text{Im}(u)} + \underbrace{x - u(x)}_{\in \text{Ker}(u)}.$$

*Démonstration.*

Supposons que  $u$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , où  $F, G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Soit  $x \in E$ . Alors il existe  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x = x_F + x_G$ . Par définition  $u(x) = x_F$ , donc

$$u \circ u(x) = u(x_F) = x_F = u(x).$$

Donc pour tout  $x \in E$ ,  $u(x) = u \circ u(x)$ , donc  $u = u^2$ .

Supposons  $u \circ u = u$ . On pose alors  $F = \text{Ker}(\text{Id}_E - u)$  et  $G = \text{Ker}(u)$ . Montrons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Soit  $x \in E$ . On pose  $x_1 = x - u(x)$  et  $x_2 = u(x)$ . On a donc  $x = x_1 + x_2$ .

Alors  $u(x_1) = u(x) - u(u(x)) = u(x) - u(x) = 0$ . Donc  $x_1 \in G$ .

$(u - \text{Id}_E)(x_2) = u(u(x)) - u(x) = u(x) - u(x) = 0$  Donc  $x_2 \in F$ .

Donc  $x \in F + G$ . D'où  $F + G = E$ .

Soient  $x \in F \cap G$ . Alors  $u(x) = 0$  et  $x - u(x) = 0$ . Donc  $x = 0$ . On en déduit que  $F \cap G = \{0_E\}$ .

$F$  et  $G$  sont donc supplémentaires dans  $E$ . Comme  $u(x) = x_2$ , on en déduit que  $u$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . □

Remarque technique 123. Pour montrer qu'un endomorphisme  $u$  est un projecteur, on montre que  $u \circ u = u$ . Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de  $u$  :

- pour trouver  $\text{Ker}(u)$ , on résout  $u(x) = 0_E$  ;
- pour trouver  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ , on résout  $u(x) = x$  (recherche des vecteurs invariants par  $u$ ).

Exercice d'application 124. Soit  $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$  . L'application  $f$  est-elle un projecteur ? Si oui, préciser par rapport à quel espace vectoriel et dans quelle direction.

↪ Montrons déjà que  $f$  est linéaire. Soit  $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $v = (a, b) \in \mathbf{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . On a

$$f(u + \lambda v) = f(x + \lambda a, y + \lambda b) = (x + y + \lambda(a + b), 0) = (x + y, 0) + \lambda(a + b, 0) = f(u) + f(v)$$

donc  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ .

Par ailleurs, si  $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$f \circ f(u) = f(f(x, y)) = f(x + y, 0) = (x + y + 0 + 0) = f(u).$$

On a montré que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  vérifiant  $f^2 = f$ , donc  $f$  est un projecteur. Plus précisément,  $f$  est le projecteur sur  $F = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbf{R}^2})$  parallèlement à  $G = \text{Ker}(f)$ . Déterminons ces deux espaces.

Soit  $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

$$u \in \text{Ker}(f) \iff f(u) = 0 \iff (x + y, 0) = 0 \iff y = -x,$$

et

$$u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbf{R}^2}) \iff f(u) = u \iff (x + y, 0) = (x, y) \iff (y, -y) = (0, 0) \iff y = 0.$$

Donc

$$F = \{(x, -x) : x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((1, -1)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}((1, 0)).$$

Exercice d'application 125. Montrer que  $u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$  est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

↪ On peut montrer que (à faire) :  $p$  linéaire,  $p \circ p = p$ ,  $\text{Ker}(p) = \text{Vect}((1, 1))$  et  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, 0))$ .

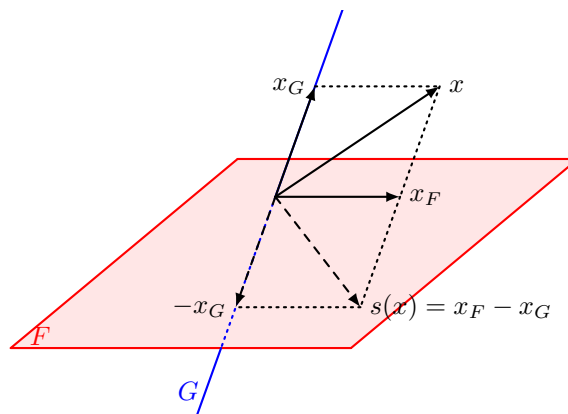
## 6.2. Symétries

### Définition 126.

Soit  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

On appelle **symétrie** par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  l'application

$$p : \begin{array}{l} E = F \oplus G \longrightarrow E \\ x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} \longmapsto x_F - x_G \end{array}$$



**Proposition 127.**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . La symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  est un endomorphisme de  $E$ .

*Démonstration.*

C'est une conséquence du Théorème 85, puisque cette symétrie  $s$  est définie par  $s|_F = \text{Id}_F$  et  $s|_G = -\text{Id}_G$ .  $\square$

**Remarque 128.** Reprenons les notations précédentes. Pour tout  $x \in F$ ,  $s(x) = x$  et pour tout  $x \in G$ ,  $s(x) = -x$ .

**Proposition 129.**

Avec les notations de la définition précédente,

$$s = 2p - \text{Id}_E \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E).$$

**Exemple 130.** 1. Les symétries et les projections géométriques dans le plan et dans l'espace sont des projections et des symétries au sens qui vient d'être défini.

2. Dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$  est la symétrie par rapport à  $\mathbf{R}$  parallèlement à  $i\mathbf{R}$ .  
 $z \longmapsto \bar{z}$

**Proposition 131.**

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ . Lorsque  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors :

- la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$  est  $\text{Id}_E - p$  ;
- la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$  est  $-s$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in E$ . Alors  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . Alors,  $(\text{Id}_E - p)(x) = x_F + x_G - x_F = x_G$ . De plus,  $(-s)(x) = -(x_F - x_G) = x_G - x_F$ .  $\square$



### Proposition 132.

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ . Si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors

1.  $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ ;
2.  $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

*Démonstration.*

On a

$$x \in F \iff x_G = 0_E \iff x = s(x) \iff x - s(x) = 0_E \iff (\text{Id}_E - s)(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker}(\text{Id}_E - s).$$

Donc  $F = \text{Ker}(\text{Id}_E - s)$ . De plus,

$$x \in G \iff x_F = 0_E \iff x = -s(x) \iff x + s(x) = 0_E \iff (\text{Id}_E + s)(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker}(\text{Id}_E + s).$$

Donc  $G = \text{Ker}(\text{Id}_E + s)$ .

### Théorème 133 - Caractérisation.

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

L'application  $u$  est une symétrie si et seulement si  $u \circ u = \text{Id}_E$ .

Le cas échéant,  $u$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ .

*Démonstration.*

Supposons que  $u$  est une symétrie sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Soit  $x \in E$ . Alors il existe  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x = x_F + x_G$ . Comme  $s(x) = x_F - x_G$ , on a  $s(s(x)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G$ . D'où  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

Réciproquement, supposons  $u \circ u = \text{Id}_E$ . On pose alors  $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ . Montrons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ . Soit  $x \in E$ . On pose  $x_1 = \frac{1}{2}(x + u(x))$  et  $x_2 = \frac{1}{2}(x - u(x))$ . On a  $x_1 + x_2 = x$ .

Alors  $(u - \text{Id}_E)(x_1) = u(\frac{1}{2}(u(x) + x)) - \frac{1}{2}(u(x) + x) = \frac{1}{2}(u(u(x)) + u(x) - u(x) - x) = \frac{1}{2}(x - x) = 0_E$ .

Donc  $x_1 \in F$ .

Alors  $(u + \text{Id}_E)(x_2) = u(\frac{1}{2}(x - u(x))) + \frac{1}{2}(x - u(x)) = \frac{1}{2}(u(x) - u(u(x)) + x - u(x)) = \frac{1}{2}(-x + x) = 0_E$ .

Donc  $x_2 \in G$ .

Donc  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$ .

Donc  $x \in F + G$ . D'où  $F + G = E$ .

Soient  $x \in F \cap G$ . Alors  $u(x) - x = 0_E$  et  $u(x) + x = 0_E$ . Donc  $x = -x$  et  $x = 0$ . On en déduit que  $F \cap G = \{0_E\}$ .  $F$  et  $G$  sont donc supplémentaires dans  $E$ .

Comme  $u(x) = x_1 - x_2$ , on en déduit que  $u$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Remarque 134.**  $s$  est donc un automorphisme de  $E$  et  $s^{-1} = s$ .

**Remarque technique 135.** Pour montrer qu'un endomorphisme  $u$  est une symétrie, on montre que  $u \circ u = \text{Id}_E$ . Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de  $u$  :

- pour trouver  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ , l'espace par rapport auquel s'effectue la symétrie, on résout  $u(x) = x$  pour  $x \in E$  ;
- pour trouver  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ , l'espace parallèlement auquel s'effectue la symétrie, on résout  $u(x) = -x$ .

**Exercice d'application 136.** Soit  $f : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ . Montrer que  $f$  est une symétrie

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - 2P(0) \end{array}$$

et préciser ses éléments caractéristiques (les sous-espaces vectoriels supplémentaires subjacents).

$f(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - 2(P + \lambda Q)(0) = P - 2P(0) + \lambda(Q - 2Q(0)) = f(P) + \lambda f(Q)$ ,  
donc  $f$  est une application linéaire. C'est en particulier un endomorphisme de  $\mathbf{R}[X]$ .

$$f^2(P) = f(f(P)) = f(P) - 2f(P)(0).$$
$$f^2(P) = P - 2P(0) - 2(-P(0)) = P.$$

Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$  ?

$$P \in F \iff (f - \text{Id}_{\mathbf{R}[X]})(P) = 0 \iff f(P) = P \iff P(0) = 0.$$

$$F = \{XQ : Q \in \mathbf{R}[X]\}.$$
$$P \in G \iff (f + \text{Id}_{\mathbf{R}[X]})(P) = 0 \iff f(P) + P = 0 \iff P = P(0).$$
$$G = \{a : a \in \mathbf{R}\}.$$

↪ On peut montrer (à faire!) que  $s$  linéaire,  $s \circ s = \text{Id}_E$ ,  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, 1))$  et  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, -1))$ .

↪ On peut montrer (à faire!) que  $u$  linéaire,  $u \circ u = \text{Id}_E$ ,  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \mathcal{S}_n$ ,  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E) = \mathcal{A}_n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
$$\begin{array}{ccc} \varphi: & E & \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ & u & \longmapsto (u_0, u_1). \end{array}$$

L'application  $\varphi$  est clairement linéaire. Or, pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ , il existe une unique suite  $u$  telle que

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

c'est-à-dire une unique suite  $u \in E$  telle que  $\varphi(u) = (\alpha, \beta)$ . Donc  $\varphi$  est bijective et c'est un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathbf{K}^2$ .

Puisque  $\varphi^{-1}$  est une application linéaire dont l'espace de départ  $(\mathbf{K}^2)$  est de dimension finie, elle est de rang fini, autrement dit son image  $\text{Im}(\varphi^{-1}) = E$  est de dimension finie. Comme de plus,  $\varphi$  est un isomorphisme, on peut même affirmer que  $\dim(E) = \dim(\mathbf{K}^2) = 2$ .

Ainsi, pour décrire complètement  $E$ , il suffit d'en trouver une base, qui est donc formée de deux suites linéairement indépendantes.

La première idée est de chercher ces suites parmi les suites géométriques.

Soit  $r$  un élément de  $\mathbf{K}$ . On considère la suite géométrique  $u = (r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Remarquons que  $u_0 = 1$  ce qui fait que si  $r = 0$ , on a  $\underbrace{u_2}_{=0} \neq \underbrace{au_1}_{=0} + \underbrace{bu_0}_{=b \neq 0}$ . On peut donc supposer que  $r \neq 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad \underbrace{r^n}_{\neq 0} (r^2 - ar - b) = 0 \\ &\iff r^2 - ar - b = 0 \quad (C) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation caractéristique  $(C)$  associée à cette suite.

### Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ : les suites de $E$ sont des suites complexes

Dans ce cas,  $(C)$  a soit deux racines complexes distinctes, soit une seule.

- Si  $(C)$  a deux racines complexes distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , on obtient que les deux suites  $u = (r_1^n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $v = (r_2^n)_{n \in \mathbf{N}}$  appartiennent à  $E$ .

Dans ce cas, puisque  $\varphi(u) = (1, r_1)$  et  $\varphi(v) = (1, r_2)$  sont deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbf{C}^2$  (car  $r_1 \neq r_2$ ), les suites  $u$  et  $v$  sont aussi linéairement indépendantes (car  $(u, v)$  est l'image par l'injection  $\varphi^{-1}$  de la famille libre  $((1, r_1), (1, r_2))$  de  $\mathbf{C}^2$ ).

Ainsi,  $(u, v)$  est une famille libre de deux vecteurs de  $E$ , qui est de dimension 2 donc une base de  $E$ , ce qui prouve que

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbf{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

- Si  $(C)$  n'a qu'une seule racine  $r_0$ , on n'obtient alors que la suite  $u = (r_0^n)_{n \in \mathbf{N}}$  dans  $E$  sous la forme cherchée. Puisque  $E$  est de dimension 2, il faut encore trouver une autre suite dans  $E$ , non colinéaire à  $u$  pour obtenir une base de  $E$ .

On a  $\varphi(u) = (1, r_0)$ . Si l'on trouve une suite  $v$  de  $E$  telle que  $\varphi(v) = (0, r_0)$  ( $r_0 \neq 0$  car  $b \neq 0$ ), on pourra affirmer (pour la même raison que précédemment), que la famille  $(u, v)$  est une famille libre de  $E$  et donc une base de  $E$ .

On cherche donc  $v$  telle que  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = r_0$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ . Avec les relations coefficients-racines de l'équation  $(C)$ , on a  $a = 2r_0$  et  $b = -r_0^2$  ce qui donne que  $v$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+2} = 2r_0 v_{n+1} - r_0^2 v_n.$$

On calcule :  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = r_0$ ,  $v_2 = 2r_0^2$ ,  $v_3 = 4r_0^3 - r_0^3 = 3r_0^3$ ,  $v_4 = 6r_0^4 - 2r_0^4 = 4r_0^4$ , etc. On peut montrer par récurrence double que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = nr_0^n$ . La suite  $v$  ainsi trouvée est non colinéaire à la suite  $u$  et ainsi la famille  $(u, v)$  est une base de  $E$ . On obtient :

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda r_0^n + \mu n r_0^n)_{n \in \mathbf{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

### Cas où $K = \mathbf{R}$ : les suites de $E$ sont des suites réelles

Dans ce cas,  $(C)$  a soit deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , soit une seule racine réelle  $r_0$  soit deux racines complexes non réelles et conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$  où  $\rho > 0$  et  $\theta \in ]0; \pi[$ .

- Si  $(C)$  a deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , on obtient comme dans le cas complexe

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbf{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}.$$

- Si  $(C)$  a une seule racine réelle  $r_0$ , on obtient comme dans le cas complexe

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda r_0^n + \mu n r_0^n)_{n \in \mathbf{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}.$$

- Reste le cas où  $(C)$  a deux racines complexes conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$  où  $\rho > 0$  et  $\theta \in ]0; \pi[$ . On sait que les suites complexes de  $E$  sont les suites de la forme  $(\lambda(\rho e^{i\theta})^n + \mu(\rho e^{-i\theta})^n)_{n \in \mathbf{N}}$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont complexes.

Supposons qu'une telle suite ne prenne que des valeurs réelles. Alors pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , on obtient

$$\lambda + \mu \in \mathbf{R} \quad (1) \quad \text{et} \quad \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{-i\theta} \in \mathbf{R} \quad (2).$$

Posons  $\lambda = x + iy$  et  $\mu = p + iq$  où  $x, y, p, q$  sont réels. La condition (1) donne  $y = -q$ . On a alors

$$\begin{aligned} \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{-i\theta} &= \rho \left[ (x + iy)(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) + (p - iq)(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) \right] \\ &= \rho \left[ (x + p) \cos(\theta) - 2y \sin(\theta) + i \cos(\theta)(x - p) \right]. \end{aligned}$$

La condition (2) impose alors  $p = x$ . Ainsi  $\lambda$  et  $\mu$  sont conjugués. On obtient pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

$$\begin{aligned} \lambda(\rho e^{i\theta})^n + \mu(\rho e^{-i\theta})^n &= \rho^n \left[ (x + iy)(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + (x - iy)(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)) \right] \\ &= 2x\rho^n \cos(n\theta) - 2y\rho^n \sin(n\theta) \end{aligned}$$

et l'on constate que ce nombre est réel pour toutes les valeurs de  $n$ .

Pour  $x = 1/2$  et  $y = 0$ , on obtient que la suite réelle  $u = (\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbf{N}}$  est dans  $E$  et pour  $x = 0$  et  $y = -1/2$ , on obtient que la suite  $v = (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbf{N}}$  est aussi dans  $E$ . Ces deux suites ne sont pas colinéaires donc forment une base de  $E$ . On retrouve alors

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbf{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}.$$

**Autre chose ?** En procédant de façon très similaire, on peut aussi retrouver tous les résultats sur les solutions des équations différentielles linéaires.