

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout le chapitre la lettre $\mathbf{K}$ désignera le corps commutatif $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$ —espace vectoriel.

1. Familles libres, génératrices et bases

Rappel : dans une famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de p vecteurs de E , les v_i peuvent être distincts ou non et l'ordre des éléments compte.

1.1. Familles génératrices

Définition 1.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E est dite **génératrice** si, et seulement si, $E = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ autrement dit si, et seulement si, tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ou encore si, et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice, on dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ **engendrent** E .

Remarque 2. Le caractère générateur ou non d'une famille ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs.

Remarque 3. On convient que la famille vide est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\{0_E\}$. Dans les énoncés suivants, si $n = 0$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E , alors on convient que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est la famille vide.

Exemple 4. 1. $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$ —espace vectoriel car tout nombre complexe z s'écrit $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

2. (1) est une famille génératrice de $\mathbf{C}$ considéré comme un $\mathbf{C}$ —espace vectoriel, puis tout nombre complexe z s'écrit $z = z \cdot 1$.

3. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E . Cette famille est une famille génératrice de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

4. Dans $\mathbf{R}^2$ les vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$ car pour tout vecteur $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on a $(a, b) = ae_1 + be_2$.

De même, la famille $((1, 1), (1, -1)(1, 0))$ est génératrice car pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a = a(1, 1) + 0(1, -1) + (a - b)(1, 0)$ (d'autres coefficients pourraient convenir).

5. Dans $E = \{y \in D^2(\mathbf{R}) \mid y'' + y = 0\}$, la famille $(\cos, \sin)$ est génératrice car après résolution de l'équation différentielle, on obtient

$$E = \{A \cos + B \sin : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} = \text{Vect}(\cos, \sin).$$

6. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbf{R}_n[X]$ car les vecteurs $1, X, \dots, X^n$ appartiennent à $\mathbf{R}_n[X]$ et pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

7. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ car les quatre vecteurs de la famille appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 5. Déterminer une famille génératrice de $E = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(2) = 0\}$.

$\hookrightarrow$ On a

$$\begin{aligned} E &= \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid (X - 2) \text{ divise } P\} \\ &= \{(X - 2)(aX^2 + bX + c) : (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((X - 2)X^2, (X - 2)X, X - 2), \end{aligned}$$

donc la famille $((X - 2)X^2, (X - 2)X, X - 2)$ est une famille génératrice de E .

Exercice d'application 6. Les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 4)$ et $(3, 1, -1)$ engendrent-ils $\mathbf{R}^3$?

$\hookrightarrow$ Ces trois vecteurs sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(2, 1, 4) + \lambda_3(3, 1, -1) = (a, b, c)$$

si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= b \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= c \end{cases}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ admet au moins une solution. Cherchons le rang de ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 3 & 4 & -1 & c \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 0 & a - 3b \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5}(b + c) \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & a - 3b + \frac{1}{5}(b + c) \\ 1 & 0 & 1 & b - \frac{1}{5}(b + c) \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5}(b + c) \end{array}\right).$$

Il est inutile d'aller plus loin dans la réduction de la matrice : cette matrice présente trois pivots donc le système est de rang 3. Or c'est un système à trois équations, il ne présente donc pas de ligne incompatible et admet toujours une solution (ici une unique solution car il n'y a pas d'inconnue auxiliaire).

Par conséquent, pour tout $x = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(2, 1, 4) + \lambda_3(3, 1, -1) = (a, b, c).$$

Les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 4)$ et $(3, 1, -1)$ engendrent donc $\mathbf{R}^3$.

Exercice d'application 7. Les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, -1)$ engendrent-ils $\mathbf{R}^3$?

$\hookrightarrow$ Ces deux vecteurs sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(3, 1, -1) = (a, b, c)$$

si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= b \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= c \end{cases}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ admet au moins une solution. Cherchons le rang de ce système.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & \boxed{1} & b \\ 3 & -1 & c \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & a-5b \\ 2 & \boxed{1} & b \\ \boxed{5} & 0 & b+c \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a-4b+c \\ 0 & \boxed{1} & 5b-2(b+c) \\ \boxed{5} & 0 & b+c \end{array} \right).$$

Si $a - 4b + c \neq 0$, alors le système est incompatible. Par exemple, le vecteur $(1, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, -1)$. Par conséquent, les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, -1)$ n'engendrent pas $\mathbf{R}^3$.

Proposition 8.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E .

1. Pour tout $x \in E$, la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ est encore génératrice de E . De manière plus générale, toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est elle-même une famille génératrice de E .
2. La famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est génératrice de E si et seulement si e_n est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Démonstration. 1. Une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est encore clairement combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n, x$.

2. Supposons $(e_1, \dots, e_{n-1})$ génératrice de E . Le vecteur e_n appartient à $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc e_n est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Réciproquement, supposons que e_n sont combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Alors $e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Ainsi $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $e_1, \dots, e_n$, donc

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Ainsi

$$E \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

puis $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = E$. Par conséquent, la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille génératrice de E . $\square$

Proposition 9.

Soient E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E . Alors la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est génératrice de F .

Démonstration.

Soit $y \in F$. Puisque φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Le vecteur x appartient à E et les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ engendrent E , donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$. Alors, en utilisant la linéarité de φ , on obtient

$$y = \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi(e_i).$$

On a montré que tout vecteur y de F est combinaison linéaire des vecteurs $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)$. Puisque ces p vecteurs sont des vecteurs de F , on en déduit qu'ils engendrent F . $\square$

Proposition 10.

Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$. Soit $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si le rang de la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, \dots, e_p$ est n .

Démonstration.

Notons A la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, \dots, e_p$ et B l'unique matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à la matrice A . On sait qu'il existe une matrice inversible M tel que $MA = B$. Dire que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice revient à dire que pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, il existe

$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ ou encore que pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation matricielle $AX = x$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ admet au moins une solution. Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Puisque la ma-

trice M est inversible, $AX = x \iff MAX = MX \iff BX = Mx$. Notons k le nombre de pivots de B , c'est-à-dire le rang de A .

Supposons que $k = n$. Alors le système $BX = Mx$ admet n pivots et n équations donc il ne présente pas de ligne incompatible : il admet toujours au moins une solution. Dans ce cas, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Supposons que $k \neq n$. Alors $k < n$ (car la matrice B compte n lignes donc admet au plus n pivots) et la dernière ligne de la matrice B est nulle (car B est échelonnée réduite par ligne et son nombre de pivots est strictement inférieur à son nombre de lignes). Par conséquent, l'équation matricielle $BX = y$ où y est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le dernier égal à 1, n'admet pas de solution. Ainsi l'équation matricielle $AX = M^{-1}y$ n'admet pas de solution.

Il existe donc $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ ($x = M^{-1}y$ convient) tel que l'équation matricielle $AX = x$ d'inconnue

$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ n'admette pas de solution : la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Par contraposée : si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors $k = n$.

Finalement, on a établi l'équivalence cherchée en montrant les deux implications. $\square$

Exercice d'application 11. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$?

$\hookrightarrow$ C'est une famille de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ mais

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \leq 2$$

car il ne peut y avoir qu'un seul pivot par colonne donc cette matrice compte au plus deux pivots : la famille n'est donc pas génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Exercice d'application 12. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$?

$\hookrightarrow$ C'est une famille de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

donc le rang de cette matrice est 3. Par conséquent, la famille est génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

1.2. Familles libres et familles liées

Définition 13.

Soit v_1 et v_2 deux vecteurs de E . On dit que v_1 et v_2 sont **colinéaires** s'il existe un scalaire λ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

Remarque 14. Si v_1 et v_2 sont colinéaires, alors on peut écrire $v_1 - \lambda v_2 = 0_E$ ou $\lambda v_1 - v_2 = 0_E$ donc il existe une combinaison linéaire de v_1 et v_2 qui donne 0_E où l'un au moins des coefficients de la combinaison linéaire n'est pas nul.

Définition 15.

Soit v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs de E . On dit que v_1, v_2 et v_3 sont **coplanaires** si l'un de ces trois vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque 16. Dans le cas, où v_1 s'écrit $v_1 = \lambda v_2 + \mu v_3$ où λ et μ sont des scalaires, on a $v_1 - \lambda v_2 - \mu v_3 = 0_E$, donc il existe une combinaison linéaire des trois vecteurs qui donne le vecteur nul et qui n'est pas $0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0_E$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille finie de p vecteurs de E .

Supposons temporairement que $p \geq 2$, c'est-à-dire que la famille contient au moins 2 vecteurs.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$ («lié linéairement» aux autres vecteurs), autrement dit, si et seulement si, il existe $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p$ tels que

$$v_i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} \lambda_k v_k.$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$$

ce qui signifie que le vecteur nul de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ dont l'un au moins des coefficients n'est pas nul.

En particulier, deux vecteurs colinéaires forment une famille liée, même chose avec trois vecteurs coplanaires.

Définition 17.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E .

- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **liée** si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ qui ne sont pas tous nuls tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$$

c'est-à-dire si, et seulement si l'un au moins des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille (lorsque $p \geq 2$).

- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **libre** si et seulement si elle n'est pas liée, autrement dit si, et seulement si, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0,$$

ou encore, si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres (lorsque $p \geq 2$).

Dans ce cas, on dit que les vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

On convient que la famille vide est libre.

Remarque 18. Le caractère libre ou liée d'une famille ne dépend pas de l'ordre des éléments dans cette famille.

- Exemple 19.**
1. Une famille à un élément (x) est libre si, et seulement si, x est non nul.
 2. Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
 3. Une famille de trois vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas coplanaires.
 4. Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est liée : par exemple, en considérant la famille $(x_1, x_2, x_3, 0_E)$ de vecteurs de E , on a $0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 1.0_E = 0_E$ donc cette famille est liée.
 5. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires n'est pas libre : si $(v_1, \dots, v_n)$ est une telle famille et que par exemple $v_1 = \lambda v_2$, alors on a $v_1 - \lambda v_2 + 0.v_3 + \dots + 0.v_p = 0_E$.

Exercice d'application 20. Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((1, 0), (0, 1))$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$,

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0) \iff \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0.$$

Donc la famille $((1, 0), (0, 1))$ est libre.

Exercice d'application 21. Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((1, 1), (1, -1), (1, 0))$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ On remarque (après avoir cherché au brouillon) que

$$(1, 1) + (1, -1) - 2(1, 0) = (0, 0),$$

donc la famille $((1, 1), (1, -1), (1, 0))$ est liée.

Exercice d'application 22. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +, \cdot)$.

$\hookrightarrow$ Soit λ et μ des scalaires tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$. En $x = 0$, on a $\lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = 0$, c'est à dire $\lambda = 0$. En $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda \cos(\frac{\pi}{2}) + \mu \sin(\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc $\mu = 0$. On a montré que si $\lambda \cos + \mu \sin = 0$, alors $\lambda = \mu = 0$. Donc $(\cos, \sin)$ est libre.

Exercice d'application 23. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, on considère $\mathcal{F} = (f, g, h)$, avec $f = \cos$, $g : x \mapsto xe^x$ et $h : x \mapsto (x-1)^3$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$. On pourrait évaluer cette relation en trois valeurs réelles pour en déduire trois égalités qui nous permettraient de déterminer a , b et c . Mais on peut également utiliser les limites : si $b \neq 0$,

$$\cos(x) + bxe^x + c(x-1)^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} bxe^x$$

donc la limite en $+\infty$ de $af + bg + cg$ vaut $\pm\infty$ suivant le signe de b . Or cette limite est nulle car la fonction $af + bg + ch$ est nulle par hypothèse. Donc $b = 0$.

Par conséquent $a \cos(x) + c(x-1)^3 = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On pourrait à nouveau montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ est absurde en utilisant les limites. On peut également évaluer cette relation en 1 pour en déduire que $a \cos(1) = 0$, donc $a = 0$. Alors $c(x-1)^3 = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $-c = 0$ donc $c = 0$.

Finalement, on a montré que si $af + bg + ch = 0$, alors $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, donc (f, g, h) est libre.

Exercice d'application 24. Dans $\mathbf{K}_n[X]$, la famille $\mathcal{F} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i X^i = 0$. Comme l'égalité entre deux polynômes entraîne l'égalité des coefficients, on obtient que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Proposition 25.

1. Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée est liée.

Démonstration.

Soit p et n deux entiers tels que $1 \leq p < n$. Soit $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E$. Alors on a aussi $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + 0x_{p+1} + \dots + 0x_n = 0_E$, donc la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée. Par contraposition, si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. L'ordre des vecteurs n'influe pas sur le caractère libre ou lié d'une famille, la proposition est démontrée. $\square$

Proposition 26.

Soit $p \in \mathbf{N}$, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Alors pour tout $x \in E$, $(e_1, \dots, e_p, x)$ est libre si et seulement si $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Démonstration.

Soit $x \in E$. Montrons que $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ si et seulement si $(e_1, \dots, e_p, x)$ est liée.

Supposons que $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p.$$

On en déduit

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + (-1) \cdot x = 0$$

et puisque $-1 \neq 0$, la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est liée.

Réciproquement, supposons $(e_1, \dots, e_p, x)$ liée. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbf{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbf{K}^{p+1}}\}$ tel que

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + \lambda_{p+1} \cdot x = 0_E.$$

Alors $-\lambda_{p+1} \cdot x = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p$.

Supposons $\lambda_{p+1} = 0$. On obtient $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p = 0_E$. Or la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, ce qui est absurde car $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ ne sont pas tous nuls.

Ainsi $\lambda_{p+1} \neq 0$ et ainsi $x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}} e_1 + \dots + \frac{-\lambda_p}{\lambda_{p+1}} e_p$ donc $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. $\square$

Définition 27.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $P_0, \dots, P_n \in \mathbf{K}[X]$. On dit que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une **famille de polynômes échelonnés en degré** lorsque

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n).$$

Proposition 28.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $P_0, \dots, P_n \in \mathbf{K}[X]$. On suppose que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés et que $P_0 \neq 0$. Alors la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Démonstration.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons H_k : « la famille $(P_0, \dots, P_k)$ est libre ».

L'assertion H_0 est vraie car (P_0) est une famille constituée d'un seul vecteur et ce vecteur est non nul.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons que H_k soit vraie. Posons $p = \deg(P_k)$. Puisque

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_k) = p,$$

alors $P_0, \dots, P_k \in \mathbf{K}_p[X]$, ce qui prouve que $\text{Vect}(P_0, \dots, P_k) \subset \mathbf{K}_p[X]$ car $\mathbf{K}_p[X]$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel contenant $P_0, \dots, P_k$. Or $\deg(P_{k+1}) > p$, donc $P_{k+1} \notin \mathbf{K}_p[X]$. Ainsi $P_{k+1} \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$. On sait que $(P_0, \dots, P_k)$ est libre d'après H_k et $P_{k+1} \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$, donc la proposition précédente assure que $(P_0, \dots, P_{k+1})$ est libre et ainsi H_{k+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie. $\square$

Exemple 29. Soit $a \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}$. La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une famille libre de polynômes de degrés échelonnés ne contenant pas 0, donc c'est une famille libre.

Proposition 30.

Soit $p \in \mathbf{N}$, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E .

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$ sont en somme directe.

Démonstration.

Montrons que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p) \subset \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-k} \in \mathbf{K}$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \quad \text{et} \quad x = \alpha_1 e_{k+1} + \dots + \alpha_{p-k} e_p.$$

Alors

$$0_E = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + (-\alpha_1) e_{k+1} + \dots + (-\alpha_{p-k}) e_p.$$

Or $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = -\alpha_1 = \dots = -\alpha_{p-k} = 0$. Par conséquent $x = 0$, ce qui prouve l'inclusion.

L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p) = \{0_E\}$, puis on conclut que ces sous-espaces engendrés sont en somme directe. $\square$

Proposition 31.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Alors la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est une famille libre de vecteurs de F .

Démonstration.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi(e_i) = 0$. Puisque φ est linéaire, on en déduit que $\varphi(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i) = 0$, donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in \text{Ker}(\varphi)$. Or φ est injective, donc $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$. On utilise alors le fait que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre pour conclure : tous les λ_i sont nuls. $\square$

Proposition 32.

Soit $n, p \in \mathbf{N}^*$. Soit $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si le rang de la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, \dots, e_p$ est p .

Démonstration.

Notons A la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, \dots, e_p$ et B l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à la matrice A . On sait qu'il existe une matrice inversible M tel que $MA = B$. Dire que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre c'est dire que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tel que $0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ ou encore que l'équation matricielle $AX = 0$ d'inconnue

$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ admet une unique solution (la matrice nulle est toujours solution de cette

équation matricielle.

Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Puisque la matrice M est inversible, on a $AX = 0 \iff MAX = M0 \iff BX = 0$.

Notons k le nombre de pivots de B , i.e. le rang de A .

Supposons que $k = p$. Alors le système $BX = 0$ admet p pivots et p inconnues donc il n'admet pas d'inconnue auxiliaire : il admet toujours exactement une solution. Dans ce cas, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Supposons que $k \neq p$. Alors $k < p$ (car la matrice B compte p colonnes donc admet au plus p pivots). Le système $BX = 0$ admet donc au moins une solution auxiliaire : il admet donc une infinité de solutions. Dans ce cas, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ n'est pas libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Par contraposée, si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors $k = p$.

Finalement, on a établi l'équivalence cherchée en montrant les deux implications. $\square$

Théorème 33.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille libre. Pour tout vecteur $u \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$, il existe un unique p -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$. Autrement dit pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^p \mu_i v_i \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = \mu_i.$$

Cela signifie que la décomposition de tout vecteur $u \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ est unique.

Démonstration.

Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^p \mu_i v_i$, alors $\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0_E$ et comme la famille est libre on obtient $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i . □

1.3. Bases**Définition 34.**

Soit $n \in \mathbf{N}$, $e_1, \dots, e_n \in E$. On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, et seulement si, cette famille est à la fois libre et génératrice de E .

Remarque 35. Si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, c'est une base de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple 36. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- $(1, i)$ est une base du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}$. Les coordonnées d'un nombre complexe dans la base $(1, i)$ sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- (1) est une base du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}$. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe un unique $y \in \mathbf{C}$ (à savoir z), tel que $z = y \cdot 1$.
- En géométrie vectorielle plane, une base est formée de deux vecteurs non colinéaires, et en géométrie vectorielle dans l'espace, de trois vecteurs non coplanaires.
- Dans $\mathbf{K}^n$, les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

forment une base de $\mathbf{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{K}^n$.

- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbf{K}_n[X]$. Cette base est appelée **base canonique** de $\mathbf{K}_n[X]$. $\mathbf{K}_n[X]$ sont ses coefficients $(a_0, \dots, a_n)$.
- Soit n, p deux entiers naturels non nuls. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices de format $n \times p$, si l'on note $(E_{i,j})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la i -ème ligne et j -ième colonne qui vaut 1, alors la famille

$$(E_{1,1}, \dots, E_{1,p}, E_{2,1}, \dots, E_{2,p}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,p})$$

est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ appelée la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Exercice d'application 37. Soit $(n, a) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{K}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

$\hookrightarrow \mathcal{B}$ est une famille de polynômes échelonnés en degré ne contenant pas 0 donc $\mathcal{F}$ est libre. De plus, pour tout $P \in \mathbf{K}_n[X]$, la formule de Taylor fournit :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

donc $\mathcal{B}$ est génératrice. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice d'application 38. Déterminer une base de $E = \{y \in D^2(R) \mid y'' + y = 0\}$.

$\hookrightarrow$ On a vu précédemment que $(\cos, \sin)$ est une famille génératrice et libre de E , donc c'est une base de E .

Proposition 39.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E . La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i.$$

Démonstration.

Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Soit $x \in E$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E , donc il existe $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i$.

Supposons qu'il existe $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \xi'_i \cdot e_i$. Alors

$$0_E = x - x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^n \xi'_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi'_i) \cdot e_i.$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\xi_i - \xi'_i = 0$, puis $\xi_i = \xi'_i$.

On vient de montrer que

$$\forall x \in E, \exists!(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i.$$

Réciproquement, supposons cette dernière assertion vérifiée. En particulier, tout vecteur $x \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs e_i , donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E . De plus, puisque $0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i$, si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i = 0$, alors $\xi_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (par unicité des coefficients). Donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Libre et génératrice, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de E . □

Définition 40.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $x \in E$. On appelle **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ l'unique n -uplet $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i$.

On définit alors la **matrice de x relativement à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 41. 1. Dans $\mathbf{C}$ vu comme un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et muni de la base $(1, i)$, les coordonnées de $a + ib$ (où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$) sont (a, b) .

2. Les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbf{K}^n$ muni de sa base canonique sont $(x_1, \dots, x_n)$.

3. Dans $\mathbf{K}_4[X]$ muni de sa base canonique, considérons $P = -4 + X - 7X^2 + X^3$. Alors

$$\text{Mat}_{(1, X, \dots, X^4)}(P) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1, 8, 9, -1, 7, 8)$, *i.e.*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Proposition 42.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que E possède une base $\mathcal{B}$ constituée de n vecteurs. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.

La base $\mathcal{B}$ est constituée de n vecteurs, que l'on note $e_1, \dots, e_n : \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrons d'abord que φ est linéaire. Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées respectives de x et de y dans E . Alors

$$x + \lambda y = \sum_{i=1}^n x_i e_i + \lambda \sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) e_i,$$

puis

$$\varphi(x + \lambda y) = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$$

donc φ est linéaire.

On montre que φ est bijective en introduisant l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i \end{aligned}$$

et en vérifiant que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}$ et $\psi \circ \varphi = \text{Id}_E$ (à faire!).

□

Corollaire 43.

On suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B}$ qui contient n vecteurs. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteur de E .

1. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p)$ formée des vecteurs colonnes $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p)$ est de rang p .
2. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p)$ est de rang n .

Démonstration.

On reprend les notations de la proposition. Puisque φ est injective, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p))$ est libre et on a vu que cela revient à dire que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p)$ est de rang p .

Puisque φ est surjective, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice si et seulement si $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p))$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et on a vu que cela revient à dire que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p)$ est de rang n .

Exercice d'application 44. Montrer que la famille de polynômes

$$\mathcal{F} = (X^3 + 3x + 1, 2X^2 - 7X + 2, X^3 + 4X - 1, X^3 + X^2 + X + 1)$$

est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

$\hookrightarrow$ C'est une famille de quatre vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$. Travaillons dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que cette matrice est de rang 4. Par conséquent, elle est libre (autant de pivots que de colonnes) et génératrice (autant de pivots que de lignes). Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Théorème 45.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_1 et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de E_2 .

E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une base de E .

Le cas échéant, $\mathcal{B}$ est appelée **base adaptée** à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.

Démonstration. • Supposons que E_1 et E_2 sont supplémentaires. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E .

- Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de E .

$$E = E_1 + E_2 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) + \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$$

donc $\mathcal{B}$ est génératrice de E .

- Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+r} \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} \varepsilon_1 + \dots + \lambda_{p+r} \varepsilon_r = 0_E$. Alors

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{\in E_1} = \underbrace{(-\lambda_{p+1}) \varepsilon_1 + \dots + (-\lambda_{p+r}) \varepsilon_r}_{\in E_2}$$

donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \in E_1 \cap E_2$ et $\lambda_{p+1} \varepsilon_1 + \dots + \lambda_{p+r} \varepsilon_r \in E_1 \cap E_2$. Puisque E_1 et E_2 sont supplémentaires, on obtient $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Par conséquent, $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E$. Or $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. De même, on montre que $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{p+r} = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de E : c'est une base de E .

- Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E . En particulier, $(e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est libre donc, d'après la Proposition 30, E_1 et E_2 sont en somme directe. De plus, $\mathcal{B}$ engendre E , donc

$$E_1 + E_2 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) + \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = E.$$

Par conséquent, E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E .

- Finalement on a démontré par double implication que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E . $\square$

1.4. Opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille

Définition 46.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle **opération élémentaire** sur les vecteurs de cette famille

- la permutation de deux vecteurs de cette famille ;
- la multiplication d'un des v_i par un scalaire non nul ;
- la transformation d'un des vecteurs v_i en $v_i + \alpha v_j$ où α est un scalaire et v_j un autre vecteur de la famille (**transvection**).

Proposition 47.

Si on effectue une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille de vecteurs de E , alors la famille obtenue garde le même caractère libre, lié, générateur ou base que la famille initiale.

Idem si l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration. • Avec la permutation de deux vecteurs, c'est évident.

- Vu que l'ordre des vecteurs n'influe pas sur les caractères étudiés, on multiplie le premier vecteur par un scalaire. Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E . Soit α un scalaire non nul. On considère la famille $\mathcal{G} = (\alpha v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Supposons que $\mathcal{F}$ est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. On a

$$\begin{aligned} \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E &\Rightarrow (\alpha \lambda_1) v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \\ &\Rightarrow \alpha \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad \text{car } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est libre.

Supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $x \in E$. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = x$. Alors on a $\frac{\lambda_1}{\alpha}(\alpha v_1) + \dots + \lambda_n v_n = x$ donc $x \in \text{Vect}(\mathcal{G})$. Donc $E \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$ or il est clair que $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset E$ et donc $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$ donc $\mathcal{G}$ est génératrice.

Comme on peut également obtenir $\mathcal{F}$ à partir d'une dilatation d'un vecteur de $\mathcal{G}$, on a que $\mathcal{G}$ libre implique $\mathcal{F}$ libre et que $\mathcal{G}$ génératrice implique $\mathcal{F}$ génératrice.

- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1(v_1 + \alpha v_2) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + (\lambda_2 + \alpha \lambda_1) v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_1 \alpha = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\end{aligned}$$

Comme on peut également obtenir $\mathcal{F}$ à partir d'une transvection d'un vecteur de $\mathcal{H}$, on a que $\mathcal{H}$ libre implique $\mathcal{F}$ libre et que $\mathcal{H}$ génératrice implique $\mathcal{F}$ génératrice.

1

↪ La famille $(-v_1 + v_4, -v_2 + v_4, -v_3 + v_4, v_4) = (1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ donc c'est une base donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Remarque technique 49. Pour déterminer le caractère libre ou générateur d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs dans un espace vectoriel dont on connaît une base $\mathcal{B}$, on procède par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$ pour obtenir une famille échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Pour ce faire, on part de la matrice M des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ et l'on applique la méthode du pivot sur les colonnes de M pour obtenir une matrice échelonnée par colonne.

1. Étudier le caractère libre ou générateur de (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (-1, 2, -1)$, $v_2 = (2, -1, 3)$ et $v_3 = (2, 5, 5)$.
2. La famille (P, Q, R) de $\mathbf{R}_3[X]$ telle que $P = -2 + 3X^2 + X^3$, $Q = 1 + 2X + X^3$, $R = 4X + 3X^2 + X^3$ est-elle liée ou libre ?

1. La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \end{array}$$

Cette matrice est échelonnée, contient une colonne nulle et la 3ème ligne ne contient pas de pivot, donc la famille de ses vecteurs colonnes est une famille liée non-génératrice de $\mathbf{R}^3$. Comme (v_1, v_2, v_3) se transforme en cette famille par opérations élémentaires sur les vecteurs, (v_1, v_2, v_3) est une famille liée non-génératrice de $\mathbf{R}^3$.

2. La matrice de (P, Q, R) dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_1 \iff C_2$$

$$C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$$

$$C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

Comme (P_2, Q_2, R_2) a été obtenue à partir de (P, Q, R) par opérations élémentaires sur les vecteurs, (P, Q, R) est également une famille libre non-génératrice de $\mathbf{R}_3[X]$.

2.1. Espaces vectoriels de dimension finie

On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** si, et seulement si, il existe une famille finie de vecteur de E qui soit génératrice de E . Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

1. $\{0_E\} = \text{Vect}(0_E)$, donc $\{0_E\}$ est de dimension finie.
2. $\mathbf{K}^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ où e_i est le n -uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf à la i -ième, égale à 1. Donc $\mathbf{K}_n$ est de dimension finie.
3. $\mathbf{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ est de dimension finie.
4. $\mathcal{M}_2(\mathbf{K}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension finie.
Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie.
5. $\{y \in D^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid y'' + y = 0\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$ est de dimension finie.

↪ Supposons que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension finie. Alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\mathbf{K}[X] = \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$. Posons $r = \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$. Alors toute combinaison linéaire des vecteurs $P_1, \dots, P_n$ est de degré r au maximum et en particulier $X^{r+1} \notin \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$, d'où $X^{r+1} \notin \mathbf{K}[X]$ ce qui est absurde.

Finalement, $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie.

2.2. Existence de bases

Définition 54.

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est **incluse** dans une famille $\mathcal{G}$ de E si tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont des vecteurs de $\mathcal{G}$. On note alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Théorème 55 - Théorème de la base incomplète.

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{F}$ une famille libre telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Autrement dit, la famille $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs de la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E . On construit une famille $(\mathcal{L}_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de la façon suivante :

- on pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$.
- pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note $\mathcal{F}_k$ la famille constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{L}_k$ et du vecteur x_{k+1} puis on pose

$$\mathcal{L}_{k+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_k & \text{si la famille } \mathcal{F}_k \text{ est liée} \\ \mathcal{F}_k & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, on remarque que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille $\mathcal{L}_i$ est libre et $x_1, \dots, x_n \in \text{Vect}(\mathcal{L}_i)$ (cela se vérifie à l'aide d'une récurrence finie).

En particulier, la famille $\mathcal{L}_n$ est libre et $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{L}_n$. Ainsi $\text{Vect}(\mathcal{L}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ donc il contient $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Or $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$ car la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E . Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{L}_n) = E$: la famille $\mathcal{L}_n$ est génératrice de E .

Libre et génératrice, la famille $\mathcal{L}_n$ est une base de E obtenue en ajoutant certains vecteurs x_i à la famille $\mathcal{L}$. $\square$

Remarque technique 56. La démonstration précédente est constructive : elle donne une méthode pour compléter une famille libre en une base, dans un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice d'application 57. Vérifier que la famille $((1, 2, 3), (5, 0, 1))$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ et la compléter en une base de $\mathbf{R}^3$.

$\hookrightarrow$ Notons $y_1 = (1, 2, 3)$ et $y_2 = (5, 0, 1)$. La famille (y_1, y_2) est libre dans $\mathbf{R}^3$ car elle constituée de deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ non colinéaires.

Complétons la en une base de $\mathbf{R}^3$, en lui ajoutant certains des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) . On suit l'algorithme décrit dans la preuve précédente :

- La famille (y_1, y_2, e_1) est-elle libre ? Cela revient à regarder si $e_1 \in \text{Vect}(y_1, y_2)$ car la famille (y_1, y_2) est libre. S'il existait a, b réels tels que $e_1 = ay_1 + by_2$, alors on aurait $a + 5b = 1$, $2a = 0$ et $3a + b = 0$, ce qui est absurde. Donc e_1 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs y_1 et y_2 et la famille (y_1, y_2, e_1) est encore libre.
- La famille (y_1, y_2, e_1, e_2) est-elle libre ? Regardons si $e_2 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$. Après calculs, on obtient $\frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 2e_1 = e_2$, donc $e_2 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$.
- On s'intéresse donc ensuite à la famille (y_1, y_2, e_1, e_3) . On remarque que $y_2 - 5e_2 = e_3$, donc $e_3 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$.

Finalement, la famille $\mathcal{F} = (y_1, y_2, e_1)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^3$. De plus cette famille est génératrice de $\mathbf{R}^3$ car $e_1, e_2, e_3 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$ et (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Remarque technique 58. En réalité, il est plus simple et plus rapide de travailler avec les matrices des coordonnées des vecteurs y_1, y_2 dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$

Exercice d'application 59. Reprendre l'exercice d'application précédent.

$\hookrightarrow$ La famille (y_1, y_2) est une base de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 3, ce qui est impossible car cette matrice ne compte que deux colonnes. On sait donc qu'il manque un vecteur pour obtenir une base. Au brouillon, on réduit la matrice pour savoir où sont placés les pivots :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(on aurait pu également placer les pivots autrement). Cette matrice est donc de rang 2, mais si on lui ajoute la colonne e_1 on obtient une matrice de rang 3. Au propre, on vérifie simplement que la famille (y_1, y_2, e_1) est une base de $\mathbf{R}^3$ en montrant que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, y_2, e_1)$ est de rang 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici, en choisissant d'autres pivots au départ, on aurait évidemment pu choisir le vecteur e_2 ou e_3 suivant la place du pivot manquant...

Exercice d'application 60. On se place dans $\mathbf{R}^5$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. On considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 4, -3, -2, 1)$, $v_2 = (-1, -4, 2, 3, 1)$, $v_3 = (2, 8, 1, 2, 3)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre et la compléter en une base.

$\hookrightarrow$ La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

Donc, $\mathcal{F}$ est libre. En suivant une suite similaire d'opérations puis en permutant les vecteurs, on peut obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 13 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la famille $(v_1, v_2, v_3, e_2, e_5)$ est une base de $\mathbf{R}^5$.

On en déduit le résultat fondamental suivant.

Théorème 61 - Théorème de la base extraite.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E contient une base de E .

Démonstration.

On applique le théorème précédent avec $\mathcal{F}$ une famille contenant un seul vecteur non nul de $\mathcal{G}$. Dans ce cas $\mathcal{F}$ est bien libre. $\square$

Corollaire 62.

Tout espace vectoriel de dimension finie contient au moins une base.

En pratique, pour extraire une base d'une famille génératrice, on pourra utiliser la méthode suivante.

Remarque technique 63. On suppose que $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ est une famille génératrice de E . On écrit la matrice de $\mathcal{G}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on effectue des opérations élémentaires sur ses vecteurs en suivant la méthode du pivot sur les colonnes pour obtenir une famille $\mathcal{F}$ échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Les derniers vecteurs de $\mathcal{F}$ sont nuls. En les retirant à $\mathcal{F}$ on obtient que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice à n vecteurs de E . On voit alors que pour n indices $i_1, i_2, \dots, i_n$ de $\llbracket 1, p \rrbracket$, le k -ième vecteur de $\mathcal{F}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $g_{i_1}, \dots, g_{i_k}$. Donc la famille $(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_n})$ de n vecteurs de E est génératrice de E et donc une base de E .

Exercice d'application 64. Soit $v_1 = (1, 4, 8)$, $v_2 = (-1, -4, 2)$, $v_3 = (1, 6, 9)$ et $v_4 = (1, 5, 9)$. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbf{R}^3$ est génératrice et en extraire une base.

$\hookrightarrow$ La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \\ \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & \boxed{-1} & 10 \end{pmatrix} \\ \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a un pivot par ligne dans cette matrice échelonnée, donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice. En faisant attention aux permutations faites, on voit que v_2 est une combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc (v_1, v_3, v_4) est toujours génératrice. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base.

2.3. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 65.

Le **cardinal** d'une famille finie de vecteurs de E est le nombre de vecteurs (distincts ou non) qui la composent.

Proposition 66.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie,

- le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E ;
- une famille libre qui a autant d'éléments qu'une famille génératrice est une base.

Lemme 67.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de E . Si $\mathcal{G}$ est génératrice de E et si tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Démonstration du Lemme 67.

Soit u un vecteur de E . On sait que u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$. Or tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ donc u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ engendre E . $\square$

Démonstration de la Proposition 66.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E .

Supposons qu'il existe une famille libre $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ à p éléments telle que $p \geq n$.

On va montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice (avec éventuellement une permutation des g_i).

$\triangleright$ Comme $(g_1, \dots, g_n)$ est génératrice, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\ell_1 = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$. Puisque ℓ_1 n'est pas nul, les α_i ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation des g_i on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On a alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} \ell_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} g_n.$$

Ainsi, tout vecteur de la famille génératrice $(g_1, \dots, g_n)$ est combinaison linéaire de la famille $(\ell_1, g_2, \dots, g_n)$ et donc $(\ell_1, g_2, \dots, g_n)$ est une famille génératrice.

$\triangleright$ Soit $k < n$, supposons que $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice. Il existe donc des scalaires $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que

$$\ell_{k+1} = \beta_1 \ell_1 + \dots + \beta_k \ell_k + \beta_{k+1} g_{k+1} + \dots + \beta_n g_n$$

La famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1})$ est une famille libre en tant que famille extraite d'une famille libre, ainsi ℓ_{k+1} n'est pas combinaison linéaire de $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ et donc les coefficients $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation des vecteurs $g_{k+1}, \dots, g_n$, on peut supposer que $\beta_{k+1} \neq 0$. Ainsi,

$$g_{k+1} = -\frac{\beta_1}{\beta_{k+1}} \ell_1 - \dots - \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \ell_k + \frac{1}{\beta_{k+1}} \ell_{k+1} - \frac{\beta_{k+2}}{\beta_{k+1}} g_{k+2} - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_{k+1}} g_n.$$

Tout vecteur de la famille génératrice $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est combinaison linéaire de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n)$ et donc $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n)$ est une famille génératrice.

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice.

En particulier lorsque $p = n$, pour $k = n$, on obtient que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est génératrice (ce qui prouve d'ailleurs le 2ème point de la proposition).

Si $p > n$, alors la sous-famille $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est aussi une famille libre, et elle contient $n + 1$ éléments. Mais alors ℓ_{n+1} est une combinaison linéaire des vecteurs $\ell_1, \dots, \ell_n$ ce qui contredit le fait que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est libre. $\square$

Définition 68.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul ($E \neq \{0\}$).
 Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments.
 Cet entier n est appelé la **dimension** de E sur $\mathbf{K}$ et noté $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbf{K}}(E)$ lorsqu'il est important de préciser le corps de base.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E . Notons n_1 le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_1$ et n_2 le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_2$.

- Comme $\mathcal{B}_1$ est libre et que $\mathcal{B}_2$ est génératrice de E , on a $n_1 \leq n_2$.
- Comme $\mathcal{B}_2$ est libre et que $\mathcal{B}_1$ est génératrice de E , on a $n_2 \leq n_1$.

Finalement, $n_2 = n_1$. □

Remarque 69. Par convention, l'ensemble vide est une base de $\{0\}$, donc $\dim(\{0\}) = 0$.

Exemple 70. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après les bases canoniques déjà vues,

1. $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}) = 1$. Plus généralement, $\dim(\mathbf{K}^n) = n$.
2. $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$. Plus généralement, $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) = 2n$.
3. $\mathbf{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur $\mathbf{K}$.
4. Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.
5. Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

⚠ **Attention** ⚠. Pour un espace vectoriel de dimension infinie, **on ne peut pas écrire** $\dim(E) = +\infty$.

Proposition 71.

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. Toute famille libre a au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Démonstration.

C'est une conséquence directe de la proposition précédente. □

2.4. Caractérisation des bases

Théorème 72.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}$. Soit $f = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs (autant que la dimension). Il suffit que $\mathcal{F}$ soit libre ou génératrice pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E .

Démonstration.

Le cas $n = 0$ est évident. Supposons $n \neq 0$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . La famille $\mathcal{B}$ compte donc n vecteurs. La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est donc une matrice carrée d'ordre n .

Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice de rang n (autant de pivots que de colonnes), donc elle compte également autant de pivots que de lignes et par conséquent elle est génératrice, ce qui permet de conclure que c'est une base de E .

Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice de rang n (autant de pivots que de lignes), donc elle compte également autant de pivots que de colonnes et par conséquent elle est libre, ce qui permet de conclure que c'est une base de E . $\square$

Remarque technique 73. En pratique, pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal n est une base d'un espace vectoriel de dimension n , on montre que cette famille est libre.

Exercice d'application 74. Montrer que la famille $(1, j)$ est une base du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}$.

$\hookrightarrow$ La famille $(1, j)$ est une famille libre car les vecteurs 1 et j ne sont pas colinéaires (dans $\mathbf{C}$ vu comme un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel). Or $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$, donc $(1, j)$ est une base de $\mathbf{C}$.

Exercice d'application 75. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $\mathcal{F} = (X^2 + 3, X - 1, X + 1)$ est-elle une base ?

$\hookrightarrow$ Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} a(X^2 + 3) + b(X - 1) + c(X + 1) = 0 &\iff aX^2 + (b + c)X + 3a - b = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc $(X^2 + 3, X - 1, X + 1)$ est une famille libre formée de trois vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$. De plus, $\dim(\mathbf{R}_2[X]) = 3$, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Remarque technique 76. Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B}$, alors une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice carrée de rang n .

Exercice d'application 77. Reprendre l'exercice d'application précédent.

$\hookrightarrow$ La famille $\mathcal{F} = (X^2 + 3, X - 1, X + 1)$ est une famille de vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$. Travaillons dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$:

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3, donc $\mathcal{F}$ est une base.

2.5. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 78.

Soit $r \in \mathbf{N}$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_r)$ une famille de vecteurs de E (famille vide si $p = 0$).

On appelle **rang** de la famille $(u_1, \dots, u_r)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et on le note $\text{rg}(u_1, \dots, u_r)$. Autrement dit

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_r) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)).$$

Remarque 79. Dans la définition, $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq r$ car la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Proposition 80.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteurs de E . Alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F})$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Démonstration.

La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et puisque $\mathcal{F}$ compte r vecteurs, dire que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension r revient à dire que $\mathcal{F}$ est une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$, ce qui revient également à dire qu'elle est libre (car elle est génératrice par définition). $\square$

Remarque 81. Le rang d'une famille de vecteurs, c'est le cardinal de la plus grande famille libre qu'on peut extraire de cette famille.

Exercice d'application 82. Calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$, où u , v et w désignent respectivement les suites de terme général

$$u_n = 2^3 + 3, \quad v_n = e^n - n, \quad w_n = 3 + n^2.$$

↪ La famille $\mathcal{F}$ est constituée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^N$. Est-elle libre ?

Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $au + bv + cw = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $au_n + bv_n + cw_n = 0$. On pourra prendre trois valeurs particulières de n et regarder le système formé par les trois égalités. Utilisons plutôt les limites. On a $u_n \sim 2^n$, $v_n \sim e^n$ et $w_n \sim n^2$, donc u et w sont négligeables devant v . Supposons $b \neq 0$. Alors

$$au_n + bv_n + cw_n \sim bv_n \sim be^n.$$

En particulier, $au + bv + cw$ tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de b) en $+\infty$, ce qui est absurde car $au + bv + cw = 0$.

Donc $b = 0$ et ainsi $au + cw = 0$. La suite w est négligeable devant la suite u donc, si $a \neq 0$, $au + cw \sim au$ et à nouveau $au + cw$ tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de a) ce qui est absurde car $au + cw = 0$.

Donc $a = 0$ et ainsi $cw = 0$. En particulier, $cw_0 = 0$, puis $c = 0$.

Ainsi on a montré que $a = b = c = 0$, donc la famille (u, v, w) est libre.

Libre et génératrice de $\text{Vect}(u, v, w)$, c'est une base de $\text{Vect}(u, v, w)$, d'où $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

Remarque technique 83. Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs lorsqu'on travaille en dimension finie, on écrit la matrice de cette famille de vecteurs dans une base, et on utilise la méthode du pivot sur les colonnes pour obtenir une famille échelonnée. Le nombre de vecteurs non nuls est alors le nombre de pivots.

Exercice d'application 84. Dans $\mathbf{R}^4$, calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où

$$e_1 = (1, 2, 3, 4), \quad e_2 = (0, 2, 0, 1), \quad e_3 = (2, 1, -1, 2), \quad e_4 = (-1, 3, 4, 3).$$

↪ Cette famille compte quatre vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Est-elle libre ? Travaillons dans la base canonique $\mathcal{B}$

de $\mathbf{R}^4$.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 4 & \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 & 7 \\ -15 & 0 & 0 & -15 \\ 3 & 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 10 & \boxed{1} & 0 & 11 \end{pmatrix} \\ &\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 7 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette matrice est de rang 3 et la famille $\mathcal{F}$ compte quatre vecteurs, donc $\mathcal{F}$ n'est pas libre. En revanche, la famille formée des vecteurs e_1, e_2, e_3 (correspondant aux colonnes où l'on a choisi les pivots) est libre d'après le calcul précédent (la matrice associée a autant de pivots que de colonnes). La famille (e_1, e_2, e_3) est libre et la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est liée donc (cf. Proposition 26) $e_4 \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. On en déduit que $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, donc la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Étant libre, c'est une base de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Par conséquent, la dimension de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est 3, ce qui prouve que $\dim(\mathcal{F}) = 3$.

Exercice d'application 85. Dans $\mathbf{R}^4$, on pose $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 3, 4, 5)$, $v_3 = (1, 4, 5, 2)$ et $v_4 = (2, 5, 7, 9)$ et on note $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Calculer le rang de la famille $\mathcal{F}$.

↪ La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & \boxed{-4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a un pivot par ligne dans cette matrice échelonnée, donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice. En faisant attention aux permutations faites, on voit que v_2 est une combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc (v_1, v_3, v_4) est toujours génératrice. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base. Ainsi $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

[illegible]

3. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

3.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 86.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration.

Posons $n = \dim(E)$.

- Considérons l'ensemble des familles libres dans F . Ces familles sont également libres dans E et E est dimension n donc elle sont au maximum de cardinal n . Posons

$$A = \{\text{Card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } F\}.$$

L'ensemble A est une partie non vide (par convention, l'ensemble vide est libre donc $0 \in A$) et majorée par n d'après ce que l'on vient d'expliquer. Par conséquent, cette partie possède un plus grand élément, noté p : il existe donc une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de p vecteurs de F qui soit libre.

Soit $x \in F$. La famille $(f_1, \dots, f_p, x)$ est une famille de $p + 1$ vecteurs de F donc elle n'est pas libre (car p est le nombre maximal de vecteurs d'une famille libre de vecteur de F).

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre et la famille $(f_1, \dots, f_p, x)$ est liée, donc $x \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

On a montré que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs $f_1, \dots, f_p$, donc la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de F . Libre et génératrice, c'est une base de F , donc $\dim(F) = p$. Or $p \leq n$ car n majore A . Donc $\dim(F) \leq n$.

- Supposons $\dim(F) = \dim(E)$. La famille $(f_1, \dots, f_p)$ précédemment introduite est une famille libre dans E et son cardinal vaut $\dim(E)$, donc c'est une base de E . En particulier, cette famille est génératrice de E . Elle est également génératrice de F (c'est une base de F) donc

$$F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) = E.$$

□

Remarque technique 87. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. F et G des sous-espaces vectoriels de E . Pour prouver que $F = G$, il suffit de prouver que

$$F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G).$$

4. Somme de deux sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 88.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et k et n deux entiers tels que $1 \leq k < n$.

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

On note $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors F et G sont en somme directe.
- Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors F et G sont supplémentaires dans E .

Démonstration. • Supposons que $\mathcal{F}$ est libre.

Soit $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0$. Par définition de F et G , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, \quad y = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

Donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $x = 0$ et $y = 0$. D'après la caractérisation des sommes directes, F et G sont en somme directe.

- Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors F et G sont en somme directe par le premier point. $F \oplus G \subset E$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E . De plus, pour tout $x \in E$, $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $F \oplus G$. Donc $E \subset F \oplus G$. □

Théorème 89.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) F et G sont supplémentaires.
- (ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- (iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Démonstration.

Notons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_r)$ une base de G .

- Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii) et (i) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons que F et G sont supplémentaires. Alors on sait que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base (adaptée) de $F \oplus G$ c'est-à-dire de E . En considérant le nombre de vecteurs de ces bases, on obtient $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

On sait par ailleurs que $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

- Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i).

L'hypothèse $F \cap G = \{0\}$ entraîne que F et G sont en somme directe donc $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base (adaptée) de $F \oplus G$. Donc $\dim(F \oplus G) = p + r = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et ainsi $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E . Ainsi, $F + G = E$ et finalement, F et G sont supplémentaires dans E .

- Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i).

L'hypothèse $F + G = E$ entraîne que $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une famille génératrice de E (en effet, tout $x \in E$ peut s'écrire $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, et en écrivant $x_F = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$ et $x_G = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_r g_r$, on obtient $x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_r g_r$). L'hypothèse $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ donne $p + r = n$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de n vecteurs de E , donc une base de E . D'après la proposition précédente, F et G sont supplémentaires. $\square$

Exercice d'application 90. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tels que } x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

$\hookrightarrow$ Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in E &\iff x + y + z = 0 \\
 &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \begin{cases} x &= -\lambda - \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases} \\
 &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}, (x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) \\
 &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))
 \end{aligned}$$

Donc $E = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Comme $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, E est donc de dimension 2.

F est évidemment de dimension 1. On a donc $\dim(E) + \dim(F) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$.

Soit $(x, y, z) \in F \cap E$. $x \in F$ donc $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Comme $(x, y, z) \in E$, $\lambda + \lambda + \lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $(x, y, z) = 0$. Ainsi, $F \cap E = \{0\}$ donc F et E sont supplémentaires.

Théorème 91.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .

Il existe alors dans E un sous-espace vectoriel G tel que F et G soient supplémentaires.

Démonstration.

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F car c'est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F et F est de dimension finie, donc $F \cap G$ est de dimension finie. Posons $p = \dim(F)$, $q = \dim(G)$ et $r = \dim(F \cap G)$.

$F \cap G \subset F$ donc $r \leq p$ et $F \cap G \subset G$ donc $r \leq q$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $F \cap G$.

Puisque $F \cap G \subset F$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de vecteurs de F donc cette famille peut être complétée en une base de F : il existe donc $a_1, a_2, \dots, a_{p-r} \in F$ tel que $(e_1, \dots, e_r, a_1, \dots, a_{p-r})$ soit une base de F .

Pour les mêmes raisons, il existe $b_1, \dots, b_{q-r} \in G$ tels que $(e_1, \dots, e_r, b_1, \dots, b_{q-r})$ soit une base de G .

Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, a_1, \dots, a_{p-r}, b_1, \dots, b_{q-r})$ est une base de $F + G$.

- $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, a_1, \dots, a_{p-r})$ et $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, b_1, \dots, b_{q-r})$, donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, a_1, \dots, a_{p-r}) + \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, b_1, \dots, b_{q-r}) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, a_1, \dots, a_{p-r}, e_1, \dots, e_r, b_1, \dots, b_{q-r}) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, a_1, \dots, a_{p-r}, b_1, \dots, b_{q-r}). \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $F + G$ (et $F + G$ est de dimension finie).

- Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_{p-r}, \nu_1, \dots, \nu_{q-r} \in \mathbf{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p-r} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{q-r} \nu_i b_i = 0_E.$$

Alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p-r} \mu_i a_i}_{\in F} = \underbrace{\sum_{i=1}^{q-r} (-\nu_i) b_i}_{\in G}.$$

Donc $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p-r} \mu_i a_i \in F \cap G$ et $\sum_{i=1}^{q-r} \nu_i b_i \in F \cap G$.

Or $F \cap G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. Par conséquent, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{q-r} (-\nu_i) b_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i$.

Alors $\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{q-r} \nu_i b_i = 0_E$.

Or $(e_1, \dots, e_r, b_1, \dots, b_{q-r})$ est une famille libre car c'est une base de G . Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, q-r \rrbracket$, $\nu_i = 0$ (et $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$).

De manière analogue, on obtient que $\mu_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p-r \rrbracket$ puis $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Finalement, $\mathcal{B}$ est une base de $F + G$, donc

$$\dim(F + G) = r + p - r + q - r = p + q - r.$$

□

5. Applications linéaires en dimension finie

5.1. Image d'une base

Théorème 96.

Soit E, F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors la famille $((u(e_1), \dots, u(e_n)))$ est génératrice de $\text{Im}(u)$.

Démonstration.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_i) \in \text{Im}(u)$.

Soit $x \in \text{Im}(u)$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. La famille $\mathcal{B}$ est une base de E donc elle est génératrice de E . Par conséquent, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ tels que $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. L'application u étant linéaire, on en déduit

$$x = u(a) = u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i).$$

ce qui montre que x est combinaison linéaire de $u(e_1), \dots, u(e_n)$.

On a montré que tout vecteur x de $\text{Im}(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_n)$ et que ces vecteurs appartiennent à $\text{Im}(u)$. Donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(u)$. $\square$

Exemple 97. Considérons

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbf{R}[X] \\ P &\longmapsto XP' - P(0) \end{aligned}$$

On vérifie que $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_2[X], \mathbf{R}[X])$. La famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$, donc $(u(1), u(X), u(X^2))$ est génératrice de $\text{Im}(u)$. On calcule :

$$u(1) = -1, \quad u(X) = X \times 1 - 0 = X, \quad u(X^2) = X \times 2X - 0 = 2X^2,$$

donc

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(-1, X, 2X^2) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbf{R}_2[X].$$

Remarque 98. En particulier, $\dim(u(E)) \leq \dim(F)$.

Théorème 99.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F .

Alors, il existe une unique application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u(e_k) = f_k$$

Cette application est définie de la manière suivante : pour tout $x \in E$, en notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$,

$$u(x) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$$

On résume souvent cette proposition par la phrase :

« Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. »

Démonstration.

Montrons que l'application u ainsi définie est linéaire.

Soient $x, y \in E$. Alors, il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbf{K}$, tels que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^n y_k e_k.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors,

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k e_k + \mu \sum_{k=1}^n y_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) e_k \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda x + \mu y$ a pour coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n) : (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$. Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) f_k \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda x_k f_k + \sum_{k=1}^n \mu y_k f_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k f_k + \mu \sum_{k=1}^n y_k f_k \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire. Montrons que u est unique.

Soit $v \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(e_k) = f_k$. Montrons que $v = u$.

Alors, pour tout $x \in E$, en notant $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on a $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

Par linéarité de v , on a donc que $v(x) = \sum_{k=1}^n x_k v(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k f_k = u(x)$.

Donc pour tout $x \in E$, $u(x) = v(x)$, d'où $v = u$. □

Exercice d'application 100. Déterminer l'unique application $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ telle que

$$u(1, 0, 0) = (1, -1), \quad u(0, 1, 0) = (2, 3), \quad u(0, 0, 1) = (0, 0).$$

$\hookrightarrow$ On obtient, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$u(x, y, z) = x \cdot u(1, 0, 0) + y \cdot u(0, 1, 0) + z \cdot u(0, 0, 1) = (x + 2y, -x + 3y).$$

Corollaire 101.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u et v deux applications linéaires de E dans F .

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_k) = v(e_k)$, alors les applications u et v sont égales.

On résume souvent cela ainsi :

« **deux applications linéaires qui coïncident sur une base de E sont égales.** »

5.2. Rang d'une application linéaire

Définition 102.

Soient E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, on dit que f est de rang fini et l'on appelle **rang** de f la dimension de $\text{Im}(f)$. On la note $\text{rg}(f)$.

Remarque 103. Pour que u soit de rang fini, il est suffisant que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1. F est de dimension finie (car $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F) ;
2. E est de dimension finie (car si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$, ce qui prouve que u est de rang fini avec $\text{rg}(u) \leq p$).

Remarque 104. Si E est de dimension finie et si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E , alors

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

car la famille $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est génératrice de $\operatorname{Im}(u)$ et, par définition,

$$\operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \dim \operatorname{Vect}((u(e_1), \dots, u(e_p))).$$

Exercice d'application 105. Déterminer le rang de $u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.
 $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y, 2x - y)$

$\hookrightarrow ((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$, donc $(u(1, 0), u(0, 1))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$. Donc

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u(1, 0), u(0, 1)) = \operatorname{rg}((1, 1, 2), (1, -1, -1)) = 2$$

car la famille $((1, 1, 2), (1, -1, -1))$ est par définition génératrice de $\operatorname{Vect}((1, 1, 2), (1, -1, -1)) = \operatorname{Im}(u)$ et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\operatorname{Im}(u)$.

Exercice d'application 106. Déterminer le rang de $u : \mathbf{R}_n[X] \longrightarrow \mathbf{R}_n[X]$.
 $P \longmapsto P'$

$\hookrightarrow (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$, donc $(u(1), u(X), \dots, u(X^n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) = \operatorname{Vect}(1, 2X, nX^{n-1}).$$

La famille $(1, 2X, \dots, nX^{n-1})$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$. De plus, elle est libre car c'est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(u)$. Par conséquent, $\operatorname{rg}(u) = n$.

Proposition 107.

Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Si f et g sont de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.
2. Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$.
3. Si f est de rang fini et si g est un isomorphisme, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Démonstration. 1. • On sait que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$. Comme $\operatorname{Im}(g)$ est de dimension finie, il en va de même pour $\operatorname{Im}(g \circ f)$ donc $g \circ f$ est de rang fini. Comme $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\operatorname{Im}(g))$, on a $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g)$.

• On sait que $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im}(f))$ donc $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f))$ c'est-à-dire $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f)$.

2. $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$ et $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}((g \circ f) \circ f^{-1}) \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ donc $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g \circ f)$ et c'est gagné.

3. On a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im}(f))$. Or $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie donc $g(\operatorname{Im}(f))$ est de dimension finie. Notons $\mathcal{B}$ une base de $\operatorname{Im}(f)$. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et comme g est injective, $g(\mathcal{B})$ est libre. Or on sait que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ donc $g(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(g \circ f)$. Au final, $g(\mathcal{B})$, qui a autant de vecteurs que $\mathcal{B}$, est une base de $\operatorname{Im}(g \circ f)$ donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

□

Théorème 108.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , F un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension p et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre $\iff \text{rg}(f) = n$.
2. f est surjective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F $\iff \text{rg}(f) = p$.
3. f est bijective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F $\iff \text{rg}(f) = p = n$.

Démonstration.

Les implications directes de la première colonne ont déjà été prouvées (Propositions 9 et 31).

1. Si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. $\mathcal{B}$ est une base de E donc $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$.
 $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$ Comme $x \in \text{Ker}(f)$, $f(x) = 0$ donc $0 = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$.
Comme $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $x = 0$.
 $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective. Donc f injective équivaut à $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.
Si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, alors c'est une base de $\text{Im}(f)$, donc $\text{rg}(f) = n$.
Si $\text{rg}(f) = n$, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre. Donc les équivalences de la première ligne sont démontrées.
2. Si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice. Soit $x \in F$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$. Par linéarité, $x = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$. Donc $x \in \text{Im}(f)$.
On en déduit que $\text{Im}(f) = F$ et donc que f est surjective.
Si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille de F génératrice de F , alors $\text{rg}((f(e_1), \dots, f(e_n))) = \dim(F) = p$.
Réciproquement, si $\text{rg}((f(e_1), \dots, f(e_n))) = p = \dim(F)$, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice. Donc les équivalences de la deuxième ligne sont démontrées.

□

Définition 109.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F .

Corollaire 110.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. S'il existe une application linéaire injective de E vers F , alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.
2. S'il existe une application linéaire surjective de E vers F , alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. Si E est de dimension n , alors E est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
4. E et F sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Démonstration.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Si il existe f injective de E vers F , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, donc $\dim(F) \geq n = \dim(E)$.
2. Si il existe f surjective de E vers F , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F , donc $\dim(F) \leq n = \dim(E)$.

3. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{K}^n &\longrightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\end{aligned}$$

est un morphisme d'après le Théorème 99. De plus, l'image de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ est $\mathcal{B}$ donc φ est bijective d'après le Théorème 108, donc est un isomorphisme. donc E et $\mathbf{K}^n$ sont isomorphes.

4. Si E et F ont la même dimension, alors ils sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{K}^n$. Donc il existe des isomorphismes $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{K}^n$ et $\psi : \mathbf{K}^n \longrightarrow F$. Alors $\psi \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme. Réciproquement si E et F sont isomorphes, ils ont la même dimension d'après les deux premiers points.

□

Corollaire 111.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}$$

Démonstration.

C'est une conséquence directe du Théorème 108. En effet, si E et F sont de même dimension, on a $p = n$ dans la dernière colonne d'équivalences du théorème et toutes les propositions du théorème sont équivalentes.

□

⚠ **Attention** ⚠. Ce résultat est faux en dimension infinie. Par exemple, l'application linéaire

$$\begin{aligned}\mathbf{R}[X] &\longrightarrow \mathbf{R}[X] \\ P &\longmapsto P'\end{aligned}$$

est surjective mais pas injective.

Corollaire 112.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'application u est un automorphisme dès que u est injective ou surjective.

5.3. Théorème du rang

Lemme 113.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F . $\text{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E .

Démonstration.

Notons $n = \dim(E)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\text{Ker}(f)$. Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dont on note $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base. Le Lemme ?? assure que $(f(\varepsilon_{r+1}), \dots, f(\varepsilon_n))$ est une base de $\text{Im}(f)$, donc $\text{Vect}(f(\varepsilon_{r+1}), \dots, f(\varepsilon_n))$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$, i.e. G est isomorphe à $\text{Im}(f)$.

□

Théorème 114 - Théorème du rang.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F .

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

Autrement dit,

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

Démonstration.

Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . On a

$$\dim(E) = \dim(G) + \dim(\text{Ker}(f))$$

et d'après le lemme précédent G est isomorphe à $\text{Im}(f)$ donc

$$\dim(G) = \dim(\text{Im}(f)).$$

□