Chapitre 21

Représentation matricielle des applications linéaires

QU'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?[1]

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Matrice d'une application linéaire

1.1. Définition

Soit E et F deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.

On note $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de F.

Soit u une application linéaire de E dans F.

On a vu dans un chapitre précédent qu'en dimension finie, une application linéaire entre deux espaces vectoriels est entièrement déterminée par l'image d'une base donc l'application u est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u(e_j)$ ($j \in [\![1,p]\!]$).

Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on peut exprimer le vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$: il existe un unique $n-$uplet de scalaires $(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})$ tel que

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\ f_i = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \cdots + a_{n,j} f_n,$$

les scalaires $(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})$ étant les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

La donnée de la famille de scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ définit donc entièrement l'application linéaire u, et

1. Un Kinder injectif, car son noyau est réduit à $\{0\}$.

nous pouvons la présenter à l'aide de la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1),\dots,u(e_p)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array}$$

dont les colonnes sont les matrices-colonnes qui représentent les vecteurs $u(e_1),\dots,u(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Définition 1.

On reprend les notations précédentes.
On appelle **matrice de l'application linéaire** u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$, définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1),\dots,u(e_p))$$

Dans le cas où u est un endomorphisme de E (c'est-à-dire où $E = F$), on peut choisir (mais ce n'est pas obligatoire) la même base au départ et à l'arrivée et, dans ce cas, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u).$$

Remarque 2. La matrice d'un endomorphisme est une matrice carrée.

Exemple 3. Notons $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et considérons

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x - 2y - z, x + 4z) \end{array}$$

On a

$$u(b_1) = (3,1) = 3c_1 + c_2, \qquad u(b_2) = (-2,0) = -2c_1, \qquad u(b_3) = (-1,4) = -c_1 + 4c_2$$

d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant la base $\mathcal{D} = ((1,1),(1,0))$ de $\mathbf{R}^2$ et cherchons la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. On a :

$$\begin{aligned} u(1,0,0) &= (3,1) = 1\cdot(1,1) + 2\cdot(1,0), \\ u(0,1,0) &= 0\cdot(1,1) + (-2)\cdot(1,0), \\ u(0,0,1) &= (-1,4) = 4\cdot(1,1) + (-5)\cdot(1,0), \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 4. Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de l'application D suivante relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

$\hookrightarrow$ On a
$$D(1)=0, \qquad D(X)=1, \qquad D(X^2)=2X, \qquad D(X^3)=3X^2$$
d'où
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(D)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}.$$
Exemple 5. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E (de dimension n). Considérons l'endomorphisme
$$\mathrm{Id}_E: \begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & E\\ x & \longmapsto & x\end{array}$$
On a alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)=I_n=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}.$$
⚠ **Attention** ⚠**.** On fera attention au fait que si l'on prend pas la même base dans au départ et à l'arrivée alors la matrice de Id_E dans ces bases n'est pas la matrice identité.

Exemple 6. Notons $\mathcal{B}=((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ (on vérifie facilement que c'est une base de $\mathbf{R}^3$) et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3})=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3})=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

1.2. Image d'un vecteur

Proposition 7.

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$, $u\in E$. On a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Démonstration.

Notons $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$. On a $x=\sum\limits_{k=1}^{p}x_k\cdot e_k$.

Puisque u est linéaire, on en déduit $u(x)=\sum\limits_{k=1}^{p}x_k\cdot u(e_k)$. Or par définition, $u(e_k)$ a pour coordonnées dans $\mathcal{B}_F$: $\begin{pmatrix}a_{1,k}\\ \vdots\\ a_{n,k}\end{pmatrix}$. Ainsi,
$$u(e_k)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}f_i.$$

Donc,

$$u(x)=\sum_{k=1}^{p}x_k\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}f_i\right)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(a_{i,k}x_k)f_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}x_k\right)f_i$$

Finalement, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x))=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{p}a_{1,k}x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=0}^{p}a_{n,k}x_k\end{pmatrix}=AX.$ □

Exercice d'application 8. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$ et $u\in\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&3&1\\0&4&3\end{pmatrix}.$$

Déterminer $u(1,1,1)$ puis $u(x,y,z)$ pour $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

↪ On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(1,1,1))=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&3&1\\0&4&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\7\end{pmatrix}.$$

Donc $u(1,1,1)=(3,0,7)$. En reproduisant le même calcul, on trouve $u(x,y,z)=(x+2y,-2x+3y-z,4y+3z)$.

Exercice d'application 9. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$ et $u\in\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&5&3\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau de u.

↪ Soit $P\in\mathbf{R}_2[X]$. Notons (a_0,a_1,a_2) ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (ce sont ses coefficients). Alors :

$$\begin{aligned}P\in\mathrm{Ker}(u)&\iff u(P)=0\\&\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(P))=0\\&\iff \begin{pmatrix}1&2&0\\-2&3&-1\\0&4&-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\&\iff \left\{\begin{array}{rcl}a_0+2a_1&=&0\\4a_0+5a_1+3a_2&=&0\\a_1-a_2&=&0\end{array}\right.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0\\4&5&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0\\0&-3&3\\0&1&\boxed{-1}\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0\\0&0&0\\0&1&\boxed{-1}\end{pmatrix}$$

Donc

$$P\in\mathrm{Ker}(u)\iff\left\{\begin{array}{rcl}a_0&=&-2a_1\\a_2&=&a_1\end{array}\right.\iff P=a_1(-2+X+X^2).$$

Finalement, $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Vect}\left(-2+X+X^2\right)$.

1.3. Opérations sur les applications linéaires et calcul matriciel

Proposition 10.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v).$$

Démonstration.
La j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u + v)$ est formée des coordonnées de $(\lambda u + v)(e_j)$ dans $\mathcal{B}_F$. Or les coordonnées de $u(e_j)$ (resp. $v(e_j)$) dans $\mathcal{B}_F$ constituent la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$), d'où le résultat puisque $(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j)$. □

Corollaire 11.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.
L'application est linéaire d'après la proposition précédente. De plus, l'application est bijective car une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base.

Corollaire 12.

$\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Démonstration.
On utilise $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ (en effet, une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est formée des matrices $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j), où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$) et le corollaire précédent. □

Proposition 13.

Soit G un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $r \in \mathbf{N}^\star$ et soit $\mathcal{B}_G$ une base de G. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{B}_E = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1,\dots,f_q)$, $\mathcal{B}_G = (g_1,\dots,g_r)$,

$$A = (a_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u), \quad B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \text{ et } C = (c_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u).$$

Par définition des scalaires $a_{j,k}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$, on a

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ eu(e_k) = \sum_{j=1}^{q} a_{j,k} f_j, \qquad \forall j \in [\![1,q]\!],\ v(f_j) = \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} g_i, \qquad \forall k \in [\![1,p]\!],\ v\circ u(e_k) = \sum_{i=1}^{r} c_{i,k} g_i$$

Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a aussi :

$$\begin{aligned} v \circ u(e_k) = v\left(u(e_k)\right) &= v\left(\sum_{j=1}^{q} a_{j,k} f_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{q} a_{j,k} v(f_j) = \sum_{j=1}^{q}\left(a_{j,k}\sum_{i=1}^{r} b_{i,j} g_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{r} a_{j,k} b_{i,j} g_i = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{q} b_{i,j} a_{j,k}\right) g_i \end{aligned}$$

Ainsi par unicité des coordonnées dans une base, on obtient

$$\forall i \in [\![1,r]\!],\ \forall k \in [\![1,p]\!], \qquad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j} a_{j,k}.$$

On constate donc que l'on a : $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v).M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$. □

⚠ **Attention ⚠.** Il faut bien prendre garde à l'ordre des bases et celui des matrices ! On rappelle que la produit matriciel n'est pas commutatif !

Corollaire 14 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$.
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.
3. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)\right)^k$ (on rappelle que $u^k = u \circ \cdots \circ u$).

Démonstration.
Les points 1. et 2. sont des conséquences directes des Proposition 10 et 13 respectivement. De plus, le point 3. s'obtient à l'aide du point 2. et d'une récurrence immédiate. □

Exercice d'application 15. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u(x,y) = (3x+6y, -x-2y)$. Déterminer la matrice A de u relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et, à partir de celle-ci, montrer que u est un projecteur.

$\hookrightarrow$ On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors $u \circ u$ a pour matrice A^2 relativement à la base canonique. Or $A^2 = A$. Les endomorphismes $u \circ u$ et u ont donc la même matrice relativement à la base canonique, on en déduit qu'ils sont égaux : $u \circ u = u$ et on vient de montrer que u est un projecteur.

1.4. Représentation des isomorphismes

Dans ce paragraphe, on suppose que E et F sont de même dimension $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 16.

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. Le cas échéant,

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\right)^{-1}.$$

Démonstration. • Supposons que u est un isomorphisme.

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_E}(u \circ u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

et

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u^{-1} \circ u) = M_{\mathcal{B}_F}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

ce qui prouve que $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible et que $M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1}$.

• Réciproquement, suppose $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ inversible. Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que u est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On sait que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Or $u(x) = 0_F$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0$ et, comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0$ (toutes les coordonnées de x sont nulles), ce qui signifie que $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. Puisque $0_E \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Ainsi u est injective et avec $\dim(E) = \dim(F)$, on en déduit que u est un isomorphisme. □

Corollaire 17 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible. Le cas échéant,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)^{-1}.$$

Exercice d'application 18. En déterminant l'endomorphisme Φ associé à la matrice suivante relativement à la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$, montrer que cette matrice est inversible et donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

↪ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\Phi(X^k)$ a pour coordonnées $((\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots, \binom{k}{k}, 0, \ldots, 0)$ relativement à la base canonique, donc

$$\Phi(X^k) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} X^p = (X+1)^k.$$

Finalement, $\Phi : P \longmapsto P(X+1)$.
Notons Ψ l'endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ défini par $\Psi(P) = P(X-1)$. Alors $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id} = \Psi \circ \Phi$, ce qui montre que Φ est un automorphisme, d'automorphisme inverse Ψ : la matrice A est donc inversible (ce qu'on pouvait facilement observer puisqu'elle est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux non tous nuls) et son inverse est :

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}(\Psi) = \begin{pmatrix} (-1)^0\binom{0}{0} & (-1)^1\binom{1}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & (-1)^2\binom{1}{1} & \cdots & (-1)^{n+1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+n}\binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 19.

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$. La famille $(a_1, \ldots, a_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible.

Démonstration.
Notons u l'endomorphisme de E défini pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u(e_i) = a_i$, de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$. Alors,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(a_1, \ldots, a_n) \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) \text{ est inversible} \\ & \text{si et seulement si} & u \text{ est un automorphisme de } E \\ & \text{si et seulement si} & (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base de } E \\ & \text{si et seulement si} & (a_1, \ldots, a_n) \text{ est une base de } E. \end{array}$$

□

2. Changements de bases

2.1. Changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

Soit x un vecteur de E dont on note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, autrement dit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i.$$

On note X et X' les matrices colonnes représentant x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Comment passe-t-on de X' à X ?

Comme $x = \mathrm{Id}_E(x)$, on peut écrire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) M_{\mathcal{B}'}(x).$$

La j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Définition 20.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice notée $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ dont la j-ième colonne (pour tout $j \in [\![1, n]\!]$) est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc la matrice carrée de type $n \times n$:

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}$$

telle que $\forall j \in [\![1, n]\!], \ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

Remarque 21. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ (attention au sens de l'écriture !).

Remarque technique 22. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ permet de calculer les coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Soit $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. On remarque que $x = \mathrm{Id}_E(x)$, ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, d'où

$$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times X'.$$

Pour déterminer les coordonnées X' dans $\mathcal{B}'$, il s'agit donc de résoudre un système linéaire (ou d'inverser la matrice de passage).

Exercice d'application 23. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Considérons $E = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base (u_θ, v_θ) avec $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$, $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (en exercice : vérifier que c'est bien une base).

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Soit $e \in \mathbf{R}^2$. On note (x, y) les coordonnées de e dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de e dans $\mathcal{B}'$.

$\hookrightarrow$

1. On a $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. Notons (x', y') les coordonnées de e dans $\mathcal{B}'$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de trigonométrie,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$\begin{cases} x' & = & \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ y' & = & -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

Proposition 24.

Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$, autrement dit

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \qquad \text{et} \qquad (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

Réciproquement, toute matrice inversible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ constituée des vecteurs colonnes de la matrice M.

Démonstration.

- Tout d'abord, puisque la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est une matrice représentant l'application Id_E qui est bijective, elle est inversible. Plus précisément,

$$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E))^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

- Pour la réciproque, il suffit de vérifier que les vecteurs colonnes de M forment bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Puisque M représente l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui transforme la base canonique $\mathcal{B}$ en les vecteurs colonnes de M, ces derniers vecteurs forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si l'endomorphisme est bijectif, ce qui est le cas car M est inversible. $\square$

Proposition 25.

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ trois bases de E.

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}.$$

Démonstration.
On a $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$. □

Exemple 26. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, considérons $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec :

$$e_1' = (1,0,0), \qquad e_2' = (1,1,0), \qquad e_3' = (1,1,1).$$

On a

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or $e_1' = e_1$ et $e_2' = e_1 + e_2$, donc $e_2 = e_2' - e_1'$. Enfin, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ donc $e_3 = e_3' - e_2'$. Donc

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Formules de changement de bases

Proposition 27 - Formule de changement de bases.

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \text{et } Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$$

ou encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = (P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Démonstration.
On a $u = \mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A & \mathcal{C} & \\
 & E \arrow[rr, "u"'] & & E \arrow[dd, "\mathrm{Id}_F"'] & \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} & & & & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{B}} = [P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}]^{-1} \\
 & E \arrow[uu, "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[rr, "u"] & & F & \\
 & \mathcal{B}' & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = A' & \mathcal{C}' &
\end{tikzcd}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

□

Corollaire 28 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = P^{-1}AP$$

ou encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'},$$

et pour tout entier naturel n,

$$(A')^n = P^{-1}A^nP.$$

Démonstration.
Les deux premières égalités sont une conséquence directe de la proposition. La dernière relation est obtenue en utilisant la formule de changement de bases pour l'endomorphisme u^n. $\square$

Exemple 29. Reprenons l'espace de polynômes $\mathbf{R}_3[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$ et de la base $\mathcal{B}' = (X^3, X^2(X+1), X(X+1)^2, (X+1)^3)$ définie précédemment.

On considère l'endomorphisme de dérivation d'un polynôme : $D : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$.

L'expression de l'endomorphisme D dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la matrice représentant D dans la base $\mathcal{B}'$, on utilise la proposition précédente (formule de changement de base) : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse (on la donne ici sans calcul, à vous de le faire) est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D)$ en calculant

$$\begin{aligned} P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D)\,P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D). \end{aligned}$$

En reprenant le polynôme Q de coordonnées $(2, 1, -3, 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$, les coordonnées de Q' dans la base $\mathcal{B}'$ sont égales à

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que si $Q = 2X^3 + X^2(X+1) - 3X(X+1)^2 + (X+1)^3$ alors

$$Q'(X) = -7X^3 + 11X^2(X+1) - 4X(X+1)^2.$$

Exercice d'application 30. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et on considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-2y, 2x-2y) \end{array}$$

1. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Soit $c_1 = (1,2)$ et $c_2 = (2,1)$. Justifier que $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Donner $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ et le lien entre A et A'.

$\hookrightarrow$

1. $f(1,0) = (3,2)$ et $f(0,1) = (-2,-2)$, donc $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
2. c_1 et c_2 ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc $\mathcal{C}$ est une famille libre. En outre, $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = 2 = \dim(\mathbf{R}^2)$, donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
   De plus, $f(c_1) = (-1,-2) = -c_1$ et $f(c_2) = (4,2) = 2c_2$, donc

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   D'après les formules de changement de bases, $A' = P^{-1}AP$ où $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 31. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et considérons les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1+e_2, e_3+e_4)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_1-e_2, e_3-e_4)$. On peut montrer que $E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^4$ (cf. TD). On considère la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Déterminer la matrice de s relativement à la base canonique.

$\hookrightarrow$ Notons $\mathcal{B}' = (e_1+e_2, e_3+e_4, e_1-e_2, e_3-e_4)$. C'est une base de $\mathbf{R}^4$ (car E_1 et E_2 sont supplémentaires et les deux couples de vecteurs sont respectivement des bases de E_1 et de E_2). Alors, puisque $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de changement de bases :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) & = & P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalement, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, $s(x,y,z,t) = (y,x,t,z)$.

3. Noyau, image et rang d'une matrice

3.1. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

A toute application linéaire on associe une unique matrice. Réciproquement, la donnée d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définit une unique application linéaire u de E dans F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = A$: en effet, u est alors entièrement définie par les relations :

$$u(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\ f_i, u(e_2) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}\ f_i, \ldots, u(e_p) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,p}\ f_i.$$

Définition 32.

Soit A une matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$$

de sorte que la matrice de l'application linéaire φ dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est la matrice A.

Exemple 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. L'application linéaire canoniquement associée est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x+5y \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2. Noyau et image d'une matrice

Définition 34.

Soit A une matrice de format $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. On note φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle **noyau** de la matrice A et l'on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de l'application linéaire φ_A canoniquement associée à A, autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi_A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \;\middle|\; AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \right\}.$$

- On appelle **image** de A et l'on note $\mathrm{Im}(A)$ l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A, autrement dit,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\varphi_A) = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \right\}$$

$$= \left\{ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \;\middle|\; \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}),\ AX = Y \right\}.$$

Remarque 35. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A. Alors

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_n)\,.$$

En effet, notons $(E_1, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Alors, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $AE_k = C_k$, donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(AE_1, \dots, AE_p) = \mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_p)$.

Exemple 36. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

◇◇

Remarque technique 37. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est une matrice, on peut déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ à l'aide d'un pivot de Gauss.

- L'ensemble des solutions du système linéaire associé à $AX = 0$ est $\mathrm{Ker}(A)$ (ainsi la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est égal au nombre d'inconnues secondaires, à savoir p moins le nombre de pivots). Les solutions doivent être écrites sont forme d'un vecteur colonne.
- Pour déterminer $\mathrm{Im}(A)$, il y a plusieurs méthodes :
  - on peut chercher $r = \mathrm{rg}(A)$ à l'aide de $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ et du théorème du rang, puis chercher r colonnes de A linéairement indépendantes ;
  - on peut faire un pivot sur les colonnes : les colonnes non nulles forment alors une base de $\mathrm{Im}(A)$ (les colonnes "nulles" correspondant aux colonnes linéairement dépendantes des colonnes sélectionnées dans la base) ;
  - on peut faire un pivot sur les lignes : on repère les colonnes avec un pivot. Les colonnes correspondantes dans la matrice de départ forment une base de $\mathrm{Im}(A)$ (en effet, chercher une relation de dépendance sur les colonnes revient à résoudre le système associé à la matrice ; on peut donner exprimer les colonnes sans pivots, correspondant aux inconnues secondaires, uniquement avec les colonnes avec pivots, correspondant aux inconnues principales).

Exercice d'application 38. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$ On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

◇◇

3.3. Rang d'une matrice

Définition 39.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle **rang** de A, note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A : $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Remarque 40. Le rang de A correspond au rang de ses vecteurs **colonnes** (car les colonnes de A sont les images des vecteurs de la bases canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ par l'application linéaire canoniquement associée à A).

Exemple 41. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $\dim(\operatorname{Im}(A)) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 2$, car la famille de deux vecteurs considérée est libre (les deux vecteurs étant non colinéaires).

Exemple 42. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs colonnes de A : $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont tels que $v_3 = v_1 + v_2$ et v_1 et v_2 sont non colinéaires. On a donc $\operatorname{rg}(v_1, v_2, v_3) = \dim(\operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3)) = 2$ et l'on a donc $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Proposition 43.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On a $0 \leqslant \operatorname{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

Démonstration.
Le rang de A est le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A donc $\operatorname{rg}(A) \leqslant p$. Comme ces vecteurs colonnes sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui est de dimension n, on a $\operatorname{rg}(A) \leqslant n$. □

Théorème 44.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)).$$

Démonstration.
Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}, F}(u)$, $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}), E)$ l'application qui envoie la base canonique $\mathcal{C}_p$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{B}_E$. De même, notons $\psi \in \mathcal{L}(F, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ qui envoie $\mathcal{B}_F$ sur la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_p & & \mathcal{C}_n \\
\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \arrow[rr, "A", "\varphi_A"'] \arrow[d, "\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}_p,\mathcal{B}_E}(\phi) = I_p"', "\phi"] & & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\
E \arrow[rr, "u"] & & F \arrow[u, "\psi", "\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{C}_n}(\psi) = I_n"'] \\
\mathcal{B}_E & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) & \mathcal{B}_F
\end{tikzcd}$$

Alors ψ et ϕ sont des isomorphismes et $\psi \circ u \circ \phi$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui a pour matrice relativement aux bases canoniques :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_n}(\psi) \times A \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}_p, \mathcal{B}_E}(\phi) = I_n \times A \times I_p = A.$$

Ainsi, $\psi \circ u \circ \phi$ est l'application linéaire canoniquement associée à A. Il s'ensuit $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\psi \circ u \circ \phi)$ et l'invariance du rang d'une application linéaire par composition avec un isomorphisme assure que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(u)$. □

Proposition 45.

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbf{N}^\star$. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Notons $\mathcal{B}$ une base de E. Alors
$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)).$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Considérons l'application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(^n, E)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $\varphi(e_i) = u_i$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, on a alors

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n)$$

et d'après le théorème précédent, $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi)$. Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, d'où le résultat. □

Théorème 46 - Théorème du rang.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors
$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

Démonstration.
On applique le théorème du rang à l'application linéaire canoniquement associée à A. □

Exercice d'application 47. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

$\hookrightarrow$ On remarque que la somme des deux premières colonnes de A est égale à la troisième, donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$, donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) \leqslant 2$. Or la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(A)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) \geqslant 2$. Finalement, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$ et

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Enfin, le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$, d'où

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Remarque 48. Nous avions précédemment défini le rang d'une matrice A comme le rang du système linéaire de matrice A, c'est-à-dire le nombre de pivots. Nous allons voir que ces deux notions coïncident.

Théorème 49.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Alors
$$\mathrm{rg}(UA) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AV).$$

Démonstration.
Puisque U est inversible, alors l'application linéaire canoniquement associe $u : X \longmapsto UX$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Notons $f : X \longmapsto AX$. Alors UA est la matrice relativement aux bases canoniques de $u \circ f$. Or, par invariance du rang par composition avec un isomorphisme, $\mathrm{rg}(u \circ f) = \mathrm{rg}(f)$. Avec $\mathrm{rg}(u \circ f) = \mathrm{rg}(UA)$ et $\mathrm{rg}(f) = (A)$ on obtient le résultat.
La preuve est similaire pour montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AV)$. □

Puisque les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice reviennent à multiplier ladite matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 50.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$.

1. Si $A \underset{L}{\sim} B$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
2. Si $A \underset{C}{\sim} B$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Exercice d'application 51. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

↪ On commence par l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 3 & \boxed{3} & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Théorème 52.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que

$$A = UJ_{n,p,r}V$$

où $J_{n,p,r}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf ceux de position (i, i), avec $i \in [\![1, r]\!]$, qui valent 1 :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0_{r,p-r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ \hline & & 0_{n-r,r} & & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$$

On peut plus simplement écrire la matrice $J_{n,p,r}$ en utilisant la notation par blocs :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_{r,r} & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$$

Démonstration.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ de dimension $p-r$ et admet par conséquent un supplémentaire (que nous noterons H) de dimension r. Considérons

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \ldots, e_r}_{\in H}, \underbrace{e_{r+1}, \ldots, e_p}_{\in \mathrm{Ker}(A)})$$

adaptée à la décomposition $H \bigoplus \mathrm{Ker}(A)$. On sait qu'alors $(Ae_1, \ldots, Ae_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Or, pour $k \in [\![r+1, p]\!]$, $Ae_k = 0$, donc la famille $(Ae_1, \ldots, Ae_r)$ est encore génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Or cette famille contient $r = \dim(\mathrm{Im}(A))$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$. En particulier cette famille est libre. Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-r}$ tels que $\mathcal{C} = (Ae_1, \ldots, Ae_r, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-r})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Notons φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A) = J_{n,p,r}$:

$$\begin{array}{c} \\ Ae_1 \\ Ae_2 \\ \vdots \\ Ae_r \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-r} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_r & e_{r+1} & \cdots & e_p \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ à la base $\mathcal{B}$ et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ à la base $\mathcal{C}$ alors, d'après les formules de changement de bases, $J_{n,p,r} = Q^{-1}AP$, ou encore $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$. On en déduit le résultat puisque les matrices de passage sont inversible. $\square$

Exemple 53. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu précédemment que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Introduisons $C_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Par exemple, $C_3 = E_1$ convient (preuve laissée en exercice).
Vérifions que $\mathcal{E} = (E_1, E_2, D)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Comme cette famille comporte autant de vecteurs que la dimension, il nous suffit de vérifier qu'elle est libre. Or la famille (E_1, E_2) est libre et $D \notin \mathrm{Vect}\,(E_1, E_2)$ (il suffit de regarder la troisième composante), donc (E_1, E_2, D) est bien une famille libre donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Puisque $AE_1 = C_1$, $AE_2 = C_2$ et $AD = 0$, l'application linéaire canoniquement associée à A a pour matrice relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$:

$$J_{3,3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices U et V du théorème sont ici :

- U est la matrice de passage de (E_1, E_2, E_3) à la base $\mathcal{C}$, à savoir
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
- V est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base (E_1, E_2, E_3), et puisque $D = E_1 + E_2 - E_3$, alors $E_3 = E_1 + E_2 - D$, d'où
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 54.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$.

Démonstration.
D'après le théorème précédent, en notant $r = \operatorname{rg}(A)$, il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ telles que $A = UJ_{n,p,r}V$. Alors $A^\top = V^\top J_{n,p,r}^\top U^\top$. Or $J_{n,p,r}^\top = J_{n,p,r}$, d'où $\operatorname{rg}(J_{n,p,r}^\top) = r$. De plus, comme U et V sont inversibles, alors $U^\top$ et $V^\top$ le sont également et donc $\operatorname{rg}(A^\top) = \operatorname{rg}(J_{n,p,r}^\top) = r$. □

Le rang d'une matrice est donc aussi le rang de ses vecteurs lignes. Ceci permet de montrer que les deux notions de rang pour une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée et nombre de pivots) coïncident. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons R l'unique matrice échelonnée réduite en ligne équivalentes par lignes à A. Puisque $A \underset{L}{\sim} R$, alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(R)$. Notons r le nombre de pivots de R. Alors les r premières lignes de R forment une famille libre de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ (on rappelle que dans la matrice R, les pivots valent 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne) et les lignes restantes de R sont nulles. Ainsi, le rang des lignes de R est égal à r, le nombre de pivots, ce qui prouve le résultat.

Remarque 55. Dans le cas d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application linéaire canoniquement associée $u_A : X \longmapsto AX$ est alors un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. D'après ce que l'on a vu sur la caractérisation des endomorphismes en dimension finie, on a alors :

$$\begin{array}{lll} A \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & \operatorname{rg}(A) = n \\ & \text{si et seulement si} & u_A : X \longmapsto AX \text{ est injective} \\ & & i.e.\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), AX = 0 \Longrightarrow X = 0 \\ & \text{si et seulement si} & u_1 : x \longmapsto AX \text{ est surjective} \\ & & i.e.\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ AX = Y \end{array}$$

On retrouve des caractérisations des matrices inversibles vues dans le chapitre sur le calcul matriciel.