

Déterminant

1. Déterminant d'une matrice carrée

Dans la suite, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si l'on désigne par $C_1, \dots, C_n$ les matrices colonnes de A qui sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on notera $A = [C_1; \dots; C_n]$.

Définition 1.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$. L'application f est dite **linéaire par rapport à la i -ième colonne** de sa variable, où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ si, et seulement si, pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n$, et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$f([C_1; \dots; C_{i-1}; \lambda C_i + \mu C'_i; C_{i+1}; \dots; C_n]) = \lambda f([C_1; \dots; C_{i-1}; C_i; C_{i+1}; \dots; C_n]) + \mu f([C_1; \dots; C_{i-1}; C'_i; C_{i+1}; \dots; C_n])$$

Exercice d'application 2. L'application

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc$$

est-elle linéaire par rapport aux colonnes de sa variable ?

$\hookrightarrow$ Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1} \in \mathbf{R}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$f \begin{pmatrix} a + \lambda x & c \\ b + \lambda y & d \end{pmatrix} = (a + \lambda x)d - (b + \lambda y)c = ad - bc + \lambda(xc - yc) = f \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda f \begin{pmatrix} x & c \\ y & d \end{pmatrix}.$$

De même, $f \begin{pmatrix} a & c + \lambda x \\ b & d + \lambda y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda f \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$.

Ainsi, f est linéaire par rapport aux colonnes de sa variable.

Exercice d'application 3. Déterminer l'ensemble des applications de $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ linéaires par rapport aux colonnes de leur variable.

$\hookrightarrow$ Soit F convenable. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On remarque que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc, par linéarité par rapport à la première colonne,

$$F(M) = aF \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} + bF \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

De même, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$F \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = cF \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + dF \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$F \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix} = cF \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + dF \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $F(M) = acF \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + adF \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bcF \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bdF \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, on peut montrer que les applications ainsi définies sont linéaires par rapport aux colonnes de leur variable.

Définition 4.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$. L'application f est dite **antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable** si, et seulement si, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i < j$, et pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_n$, on a

$$f([C_1; \dots; C_i; \dots; C_j; \dots; C_n]) = -f([C_1; \dots; C_j; \dots; C_i; \dots; C_n]).$$

Autrement dit, si $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est obtenue à partir de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ en échangeant deux colonnes, alors $f(M') = -f(M)$.

Exercice d'application 5. L'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est-elle symétrique par rapport aux colonnes de sa variable ?

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc$$

rapport aux colonnes de sa variable ?

$\hookrightarrow$ Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$.

$$f(M') = cb - ad = -f(M).$$

Donc f est symétrique par rapport aux colonnes de sa variable.

Exercice d'application 6. Déterminer l'ensemble des applications de $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ linéaires et antisymétriques par rapport aux colonnes de leur variable.

$\hookrightarrow$ On a vu précédemment (cf. Exercice d'application 3) que

$$f \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = acF \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + adF \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bcF \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bdF \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or, F étant antisymétrique,

$$F \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = adF \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - bcF \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $F \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ad - bc)F(I_2)$. La réciproque reste à faire.

On admet le résultat suivant :

Théorème 7 - Déterminant d'une matrice carrée.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
2. f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
3. $f(I_n) = 1$, où I_n désigne la matrice identité de taille n .

Cette application est appelée **l'application déterminant**. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le scalaire $f(A)$ sera noté $\det(A)$ et sera appelé le déterminant de la matrice A .

Si $A = (a_{i,j})$, le déterminant de A sera aussi noté :

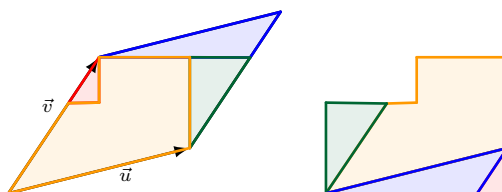
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

Exemple 8. Avec l'Exercice d'application 5, on obtient que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Interprétation géométrique

On munit le plan d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') , et on pose $A = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$. L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $|\det(A)|$.



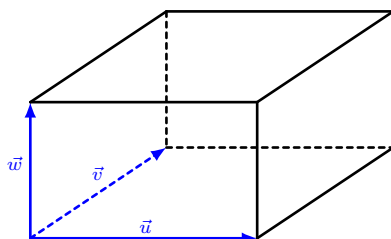
Exemple 9. On peut montrer que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - (x_3 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_1 y_3 z_2).$$

Pour vérifier cette formule, il faut vérifier que les trois points de la définition sont satisfaits (linéarité par rapport aux colonnes, antisymétrie et le déterminant de l'identité doit valoir 1). Il ne faut PAS retenir cette formule (cf. méthodes de calcul d'un déterminant plus loin).

Interprétation géométrique.

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. On peut démontrer que $|\det(A)|$ est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{w}(x_3, y_3, z_3)$.



2. Propriétés du déterminant

Proposition 10.

Soit A une matrice carrée de taille n .

1. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
2. Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. 1. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Soit i tel que C_i est la colonne nulle. Alors, par linéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on a :

$$\det([C_1, \dots, C_{i-1}, 2C_i, C_{i+1}, \dots, C_n]) = 2 \det([C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n]).$$

Donc $\det(A) = 2 \det(A)$, d'où $\det(A) = 0$.

2. Permuter deux colonnes identiques ne change pas la matrice A , mais change la valeur de son déterminant en son opposé (par antisymétrie du déterminant) : $\det(A) = -\det(A)$, puis $\det(A) = 0$. $\square$

Exercice d'application 11. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(2A) = 2^2 \det(A)$.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \det(2A) &= \begin{vmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-1) \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{linéarité par rapport à la 1ère colonne}) \\ &= 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{linéarité par rapport à la 2e colonne}) \\ &= 2^2 \det(A). \end{aligned}$$

On peut généraliser :

Proposition 12.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Démonstration.

La matrice λA est obtenue à partir de A en multipliant **chacune** des colonnes de A par λ . La linéarité du déterminant par rapport aux colonnes fournit alors le résultat : pour chacune des colonnes, on peut « sortir » un facteur λ et comme il y a n colonnes en tout, on obtient $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. $\square$

2.1. Opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 13 - Opérations élémentaires sur les colonnes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}^*$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un couple d'entiers distincts. Notons A' la matrice obtenue à partir de A à l'aide de l'opération élémentaire sur les colonnes décrit pour chaque cas.

1. Opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: $\det(A') = \det(A)$.
Autrement dit le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A .
2. Opération $C_i \leftrightarrow C_j$: $\det(A') = -\det(A)$.
Autrement dit le déterminant de A change de signe si l'on permute deux colonnes de A .
3. Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$: $\det(A') = \alpha \det(A)$.
Autrement dit le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une colonne de A par α .

Démonstration. 1. Opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$. On utilise la linéarité par rapport à la i -ième colonne de A' : on obtient alors $\det(A') = \det(M) + \alpha \det(A_1)$ où A_1 est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne i par la colonne j . Ainsi A_1 possède deux colonnes identiques, d'où $\det(A_1) = 0$.

2. Opération $C_i \leftrightarrow C_j$. A' est obtenue à partir de A en échangeant deux colonnes. Par antisymétrie du déterminant, on en déduit $\det(A') = -\det(A)$.

3. Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$. Par linéarité par rapport à la i -ième colonne de M' , on obtient $\det(A') = \alpha \det(A)$. $\square$

Exercice d'application 14. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$ On peut déterminer $\det(A)$ à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes en s'inspirant du pivot de Gauss sur les colonnes.

- On effectue les opérations élémentaires $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A_1$$

La matrice A_1 obtenue possède le même déterminant que A .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

- On effectue l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ sur A_1 .

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A_2.$$

La matrice A_2 obtenue possède le même déterminant que A .

- Ainsi, en utilisant successivement la linéarité par rapport à la deuxième puis par rapport à la troisième colonne, on peut se ramener au déterminant de I_3 que l'on connaît :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

puisque $\det(I_3) = 1$.

On peut généraliser le procédé afin d'obtenir le déterminant d'une matrice triangulaire quelconque.

Proposition 15.

1. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

⚠ Attention ⚠. Le déterminant d'une matrice qui n'est pas triangulaire n'est pas nécessairement le produit de ses coefficients diagonaux.

2.2. Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 16.

Soit $A, E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice E étant produit de matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes. Alors

$$\det(AE) = \det(A) \times \det(E).$$

Démonstration.

Il faut vérifier l'égalité pour chaque matrice d'opération élémentaire.

- Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ (où $\alpha \in \mathbf{K}^*$). Elle correspond à la multiplication à droite par la matrice de dilatation $D_i(\alpha)$:

$$D_i(\alpha) = \begin{matrix} & & i & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\alpha} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & & & \end{matrix},$$

$D_i(\alpha)$ est obtenue à partir de I_n après l'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ donc, d'après la Proposition 13, $\det(D_i(\alpha)) = \alpha$ car $\det(I_n) = 1$ (on pouvait aussi reconnaître une matrice diagonale).

Notons $A' = AD_i(\alpha)$. Alors A' est la matrice obtenue à partir de A après l'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$. La Proposition 13 assure que $\det(A') = \alpha \det(A)$. Donc

$$\det(AD_i(\alpha)) = \det(A) \times \det(D_i(\alpha)).$$

- Opération $C_i \leftrightarrow C_j$. Elle correspond à la multiplication à droite par la matrice de transposition $P_{i,j}$:

$$P_{i,j} = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \boxed{1} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{1} & \ddots & \boxed{0} & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & & & & & \\ j & \end{matrix},$$

Par le même argument que précédemment, on obtient $\det(AP_{i,j}) = \det(A) \det(P_{i,j})$.

- Opération $C_i \leftrightarrow C_i + \alpha C_j$. Elle correspond à la multiplication à droite par la matrice de transvection $T_{j,i}(\alpha)$:

$$T_{j,i}(\alpha) = T_{i,j}(\lambda) = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \boxed{\lambda} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Par le même argument que précédemment, on obtient $\det(AP_{i,j}) = \det(A) \det(P_{i,j})$.

- Il ne reste plus qu'à conclure à l'aide d'une récurrence sur le nombre de matrices élémentaires présentes dans E . $\square$

Théorème 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. • Supposons A inversible. Alors $A \sim_C I_n$. Ainsi, il existe une matrice E , produit de matrices élémentaires, telle que $A \times E = I_n$. On sait que $\det(AE) = \det(A) \times \det(E)$. Or $\det(I_n) = 1$, donc $\det(A) \det(E) = 1$, puis $\det(A) \neq 0$.

- Réciproquement, supposons $\det(A) \neq 0$. Notons R l'unique matrice échelonnée réduite en colonnes qui est équivalente en colonnes à A : il existe une matrice E produit de matrices élémentaires telle que $AE = R$. Ainsi $\det(A) \times \det(E) = \det(AE) = \det(R)$.

E étant inversible (car chacune des opérations élémentaires l'est, cf. cours sur les matrices), $\det(E) \neq 0$ (d'après le premier point de la preuve). De plus, $\det(A) \neq 0$ par hypothèse. Donc $\det(R) \neq 0$. Or R est une matrice triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1 ou 0 (ceux qui valent 1 sont les pivots).

$$\det(R) = \prod_{i=1}^n r_{i,i}$$

car R est triangulaire. Puisque $\det(R) \neq 0$, on en déduit que les coefficients diagonaux sont non nuls, donc ils sont tous égaux à 1. Ainsi $R = I_n$.

On vient de montrer que $A \sim_C I_n$, donc A est inversible. $\square$

2.3. Déterminant d'un produit, d'un inverse, d'une transposée

Théorème 18.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
2. Si $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. 1. Procédons par disjonction de cas, suivant si B est inversible ou non.

- Supposons B non inversible. Alors $\det(B) = 0$, donc $\det(A) \det(B) = 0$. Montrons par l'absurde que AB n'est pas inversible. Supposons AB inversible.

Il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $(AB)C = I_n = C(AB)$. On a alors, par associativité du produit matriciel, $(CA)B = I_n$. Montrons qu'alors B est inversible.

Soit $X \in \text{Ker}(B)$. On a $X = (CA)BC = (CA)0 = 0$, donc $\text{Ker}(B) \subset \{0\}$, puis $\text{Ker}(B) = \{0\}$. Le théorème du rang assure alors que $\text{rg}(B) = n$, donc B est inversible, ce qui est contradictoire.

La matrice AB n'est donc pas inversible, donc $\det(AB) = 0$ et l'égalité proposée est vérifiée.

- Supposons B inversible. Alors $B \sim_C I_n$ et il existe un produit de matrices élémentaires tel que $BE = I_n$.

Alors $A = A(BE) = (AB)E$ et E est un produit de matrices élémentaires, donc d'après la Proposition 16,

$$\det(A) = \det(AB) \times \det(E).$$

D'autre part, $BE = I_n$ et E est produit de matrices élémentaires, donc

$$\det(B) \times \det(E) = \det(I_n) = 1.$$

En multipliant la première égalité par $\det(B)$, on obtient alors

$$\det(A) \times \det(B) = \det(AB) \times \det(E) \times \det(B) = \det(AB).$$

2. $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$, puis $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. □

Théorème 19.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\det(A^\top) = \det(A)$.

Démonstration (idée de la preuve).

On distingue suivant si A est inversible ou non.

- Si A n'est pas inversible, alors $A^\top$ non plus, donc $\det(A) = 0 = \det(A^\top)$ et le résultat est vrai.
- Si A est inversible, alors $A \sim_C I_n$ et il existe une matrice E qui est produit de matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes telle que $AE = I_n$. En particulier, $A = E^{-1}$, donc A est elle-même produit de matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes (car l'inverse d'un produit est égal au produit des inverses, en ordre inverse, et l'inverse d'une matrice élémentaire est encore une matrice élémentaire). Comme la transposée d'un produit est égal au produit des transposées en ordre inverse, il suffit donc de vérifier le résultat pour les matrices d'opérations élémentaires, ce qui est laissé au lecteur à titre d'exercice. □

Puisque les colonnes de $A^\top$ sont les lignes de A , de l'égalité $\det(A^\top) = \det(A)$ on tire les résultats suivants.

Corollaire 20.

1. L'application $\det$ est linéaire par rapport à chacune des lignes de sa variable.
2. Le déterminant est antisymétrique par rapport aux lignes de sa variable.
3. Si l'une des lignes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
4. Si deux lignes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Corollaire 21 - Opérations élémentaires sur les lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.

1. Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne de A .
2. Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux lignes de A .
3. Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une ligne de A par α .

3. Calcul pratique d'un déterminant

Définition 22.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on appelle **mineur** d'indice (k, ℓ) le déterminant $\Delta_{k,\ell}(A)$ de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la ligne k et la colonne ℓ .

Exemple 23. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer le mineur d'ordre $(3, 3)$, on barre (éventuellement mentalement) la troisième ligne et la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\Delta_{3,3}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

De même, le mineur d'ordre $(4, 2)$ est

$$\Delta_{4,2}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Proposition 24 - Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On note $\Delta_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .

1. Développement par rapport à la ligne L_{i_0} : soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det(\Delta_{i_0,j}).$$

2. Développement par rapport à la colonne C_{j_0} : soit $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \det(\Delta_{i,j_0}).$$

Démonstration.

Ce résultat est admis. □

Voici ce que ce résultat donne pour les matrices de taille 3 et 4.

- Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : on met en exposant à gauche des coefficients entre parenthèses la valeur de $(-1)^{i+j}$ où i et j sont les numéros respectifs de la ligne et de la colonne de ce coefficient.

Développement suivant une colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (+)a & (-)b & (+)c \\ (-)d & (+)e & (-)f \\ (+)g & (-)h & (+)k \end{vmatrix} = \begin{cases} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la première colonne)} \\ -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\ c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la troisième colonne)} \end{cases}$$

Développement suivant une ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (+)a & (-)b & (+)c \\ (-)d & (+)e & (-)f \\ (+)g & (-)h & (+)k \end{vmatrix} = \begin{cases} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la première ligne)} \\ -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la deuxième ligne)} \\ g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la troisième ligne)} \end{cases}$$

- Voici un exemple de développement d'un déterminant d'une matrice d'ordre $n \geq 4$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Le développement suivant la première colonne donne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (+)a_{1,1} & (-)a_{1,2} & (+)a_{1,3} & (-)a_{1,4} \\ (-)a_{2,1} & (+)a_{2,2} & (-)a_{2,3} & (+)a_{2,4} \\ (+)a_{3,1} & (-)a_{3,2} & (+)a_{3,3} & (-)a_{3,4} \\ (-)a_{4,1} & (+)a_{4,2} & (-)a_{4,3} & (+)a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\ + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{4,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}.$$

Remarquons qu'on peut calculer ce déterminant car le calcul fait apparaître des déterminants de matrices d'ordre 3, que l'on sait calculer (ou l'on peut plus simplement continuer et se ramener à des déterminants de matrices d'ordre 2).

On dispose donc d'une méthode pour calculer le déterminant des matrices d'ordre 4.

En procédant de la même façon (développement suivant une ligne ou une colonne), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 5 en faisant intervenir des déterminants de matrices d'ordre 4 qu'on calcule suivant la méthode précédente.

En itérant le procédé, on peut définir par récurrence une méthode de calcul du déterminant d'une matrice d'ordre n à partir des déterminants de matrices d'ordre $n - 1$.

Exemple 25. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $\det(A)$ en développant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2(-2 - 9) + (1 - 9) - 2(3 + 6) = -4.$$

On aurait aussi pu développer par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(6 - 3) - 2(3 + 6) + (1 + 4) = -4.$$

Remarque 26. • Dans la formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, si on écrit bien les termes dans l'ordre dans lequel on les rencontre, les signes sont alors alternés.

- En général, on préfère choisir de développer par rapport à une ligne ou une colonne qui contient des zéros, cela fait d'autant moins de calculs à faire. Il est d'ailleurs recommandé de faire des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes pour faire apparaître un maximum de zéros sur une même ligne ou sur une même colonne avant de développer par rapport à celle-ci.
- Développer par rapport à une ligne ou une colonne peut permettre de trouver une relation de récurrence lorsqu'il s'agit de calculer un déterminant de taille n . Voir TD.

Exercice d'application 27. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$ Avant de développer par rapport à une ligne ou une colonne, effectuons l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, ce qui ne change pas le déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

On effectue maintenant un développement par rapport à la première ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour rajouter un 0 dans la deuxième colonne :

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe enfin par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

4. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 28.

Soit $n \geq 1$ un entier, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Le **déterminant** d'une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de n vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, est le déterminant de la matrice $M_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ représentant ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(M_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)).$$

Remarque 29. On notera que le nombre de vecteurs de la famille doit être égal à la dimension de E ! (Le déterminant d'une matrice étant défini uniquement pour les matrices carrées).

Exercice d'application 30. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, calculer le déterminant relativement à cette base de $(X + 1, X(X - 1), X^2 - 1)$.

↪ On a

$$\det_{\mathcal{B}}(X + 1, X(X - 1), X^2 - 1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Proposition 31.

Soit $n \geq 1$ un entier, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$.

Démonstration.

$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E . $\square$

Cela assure en particulier que bien que les déterminants d'une famille de vecteurs dans deux bases distinctes ne sont généralement pas égaux, ils sont simultanément nuls ou non nuls.

Exemple 32. Puisque $\det_{(1, X, X^2)}(X + 1, X(X - 1), X^2 - 1) \neq 0$, alors la famille $(X + 1, X(X - 1), X^2 - 1)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

5. Déterminant d'un endomorphisme

Considérons un endomorphisme f d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

Notons A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$, A' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On a $A = PA'P^{-1}$ donc

$$\det(A) = \det(PA'P^{-1}) = \det(P) \det(A') \det(P^{-1}) = \det(P) \det(A') \frac{1}{\det(P)} = \det(A').$$

On vient de montrer que les déterminants de toutes les matrices représentant l'endomorphisme f sont égaux. Cette propriété nous permet définir le déterminant d'un endomorphisme :

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E . Les matrices de f relativement à une base quelconque de E ont toutes le même déterminant. Ce déterminant commun est appelé **déterminant** de f et est noté $\det(f)$.

Remarque 33.

- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Notons u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A . Alors $\det(u_A) = \det(A)$.

Exercice d'application 34. Considérons $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + z, -2x + 3z, x + 3y - 2z) \end{array}$.

Calculer le déterminant de u .

↔ Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$\det(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -13.$$

On déduit des propriétés du déterminant d'une matrice et des matrices des endomorphismes :

Proposition 35.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n , f et g deux endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. $\det(\text{Id}_E) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$ et donc $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$.
4. f est bijective si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.
5. Si f est bijective, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

1. $\det(\text{Id}_E) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E)) = \det(I_n) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda f)) = \det(\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \lambda^n \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(g \circ f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(g) \det(f)$.
4. $f \in \text{GL}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \text{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0 \iff \det(f) \neq 0$.
5. Supposons f bijective. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$, donc $\det(f^{-1}) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}) = \frac{1}{\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))} = \frac{1}{\det(f)}$. □