

Chapitre 23

Espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

1. Produit scalaire

1.1. Définition

Définition 1.

On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

1. φ est **bilinéaire** : pour tout $e \in E$, $x \longmapsto \varphi(x, e)$ et $x \longmapsto \varphi(e, x)$ sont linéaires :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(\lambda x + z, y) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(z, y),$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x, \lambda y + z) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, z).$$

2. φ est **symétrique** : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. φ est **définie positive** : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque technique 2.

1. Pour montrer la bilinéarité, il suffit de prouver la symétrie puis la linéarité en l'une des variables. En effet, si φ est symétrique et $x \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, alors, pour $(x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y + \lambda z) &= \varphi(y + \lambda z, x) && \text{car } \varphi \text{ est symétrique} \\ &= \varphi(y, x) + \lambda \varphi(z, x) && \text{car pour tout } e \in E, \varphi(\cdot, e) \text{ est linéaire} \\ &= \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z) && \text{car } \varphi \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

2. Si φ est bilinéaire, alors on sait que pour tout $e \in E$, $\varphi(0_E, e) = 0 = \varphi(e, 0_E)$. Pour montrer que φ est définie, on peut donc se contenter de prouver l'implication : si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0_E$.
3. Montrer que φ est définie est rarement trivial et nécessite souvent des justifications. On veillera donc à prouver l'aspect défini avec la plus grande rigueur.

Exercice d'application 3. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$
 $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$

est un produit scalaire.

$\hookrightarrow$

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. Notons $x = (x_1, y_1)$ et $y = (y_1, y_2)$.

$$\varphi(y, x) = y_1x_1 + y_2x_2 = x_1y_1 + x_2y_2 = \varphi(x, y)$$

donc φ est symétrique.

2. Soit $(x, x', y) \in (\mathbf{R}^2)^3$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Notons $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$.

$$\varphi(x + \lambda x', y) = (x_1 + \lambda x'_1)y_1 + (x_2 + \lambda x'_2)y_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + \lambda(x'_1y_1 + x'_2y_2) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x', y)$$

donc $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Or φ étant symétrique, $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

3. Soit $x \in \mathbf{R}^2$ avec $x = (x_1, x_2)$. $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 = 0 \geq 0$ car c'est une somme de réels positifs.
De plus,

$$\varphi(x, x) = 0 \iff x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_1^2 = 0 \text{ et } x_2^2 = 0 \iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \iff x = (0, 0).$$

Donc φ est définie positive.

Finalement, φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$.

Notation 4. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est généralement noté $\langle x, y \rangle$ (ou $(x | y)$ ou encore $x \cdot y$).

Définition 5.

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace euclidien**.

1.2. Exemples de référence

Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $x \in \mathbf{R}^n$, on notera $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans $\mathbf{R}^n$. Considérons

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ est appelé **produit scalaire canonique**.

1. Symétrie. Soit $x, y \in \mathbf{R}^n$.

$$\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle.$$

2. Bilinearité. Soit $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\langle x + \lambda z, y \rangle &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda z_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i + \lambda z_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^n z_i y_i \\ &= \langle x, y \rangle + \lambda \langle z, y \rangle\end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout $e \in E$, $\langle \cdot, e \rangle$ est linéaire. La bilinéarité s'en déduit par symétrie.

3. Définie positivité. Soit $x \in \mathbf{R}^n$.

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs. Si de plus $\langle x, x \rangle = 0$ alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i^2 = 0$ donc $x_i = 0$. Finalement $x = 0_E$. On vient de montrer que l'application est définie positive.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Un produit scalaire dans $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$

Soit a et b deux réels avec $a \leq b$. Dans $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(t)g(t) dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire.

1. Symétrie. Soit $f, g \in E$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b g(t)f(t) dt = \int_a^b f(t)g(t) dt = \langle g, f \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

2. Bilinearité. Soit $f_1, f_2, g \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle &= \int_a^b (f_1(t) + \lambda f_2(t))g(t) dt \\ &= \int_a^b (f_1(t)g(t) + \lambda f_2(t)g(t)) dt \\ &= \int_a^b f_1(t)g(t) dt + \lambda \int_a^b f_2(t)g(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

Donc pour tout $g \in E$, $f \mapsto \langle f, g \rangle$ est linéaire. Par symétrie, $f \mapsto \langle g, f \rangle$ est linéaire, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

3. Définie positivité. Soit $f \in E$.

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Or $a \leq b$ et pour tout $t \in [a; b]$, $f^2(t) \geq 0$ car f est à valeurs réelles. Par positivité de l'intégrale, $\langle f, f \rangle \geq 0$. De plus, on sait que f^2 est continue sur le segment $[a; b]$ car $f \in E$ donc, si $\langle f, f \rangle = 0$ alors pour tout $t \in [a; b]$, $f^2(t) = 0$, donc $f = 0_E$.

On vient de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Dans toute la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

1.3. Norme euclidienne

Définition 6.

Pour $x \in E$, on appelle **norme euclidienne** de x et on note $\|x\|$ le réel $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition 7.

Un élément x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Exemple 8. • Dans $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont tous unitaires.

- Pour tout $x \in E$, si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire.

Proposition 9.

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$.
2. Pour tout $x \in E$ et pour tout réel λ , $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$. De plus,

$$\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_E$$

car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

2. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x \rangle \quad (\text{linéarité par rapport à la première variable}) \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle \quad (\text{linéarité par rapport à la deuxième variable}) \\ &= \lambda^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

En composant par la racine carrée, on obtient $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. □

Théorème 10 - Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $x, y \in E$.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \lambda &\longmapsto \|x + \lambda y\|^2. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \|x + \lambda y\|^2 \\ &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x + \lambda y \rangle + \lambda \langle y, x + \lambda y \rangle && (\text{linéarité par rapport à la première variable}) \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle && (\text{linéarité par rapport à la deuxième variable}) \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 && (\text{symétrie}) \end{aligned}$$

L'application f est donc une application polynomiale de degré au plus 2. Or pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 \geq 0$.

- Si $y \neq 0_E$, alors $\|y\| \neq 0$ donc f est polynomiale de degré 2. Etant à valeurs positives, son discriminant $4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ est négatif ou nul, d'où $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$. Il s'ensuit, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$;

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

• Si $y = 0$, alors $\langle x, y \rangle = 0$ par linéarité. D'autre part $\|x\| \|y\| = 0$, donc l'inégalité est encore vraie. Il reste à voir le cas d'égalité si $y \neq 0_E$.

- Supposons que $\langle x, y \rangle = \|x\| \times \|y\|$. Alors le discriminant de f est nul ce qui entraîne que f admet une racine double λ_0 . Ainsi $\|x + \lambda_0 y\|^2 = 0$, puis $x + \lambda_0 y = 0_E$. Ainsi x et y sont colinéaires.
- Réciproquement, supposons que x et y sont colinéaires. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\alpha x + \beta y = 0_E$. De plus, $\alpha \neq 0$ car sinon on aurait $\beta y = 0_E$ ce qui est absurde puisque $y \neq 0_E$ et $\beta \neq 0$.
Posons $\lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}$. On a $x + \lambda_1 y = 0_E$, donc $f(\lambda_1) = 0$. Ainsi f est polynomiale de degré 2 et possède une racine, donc son discriminant est positif ou nul. Or on a montré que ce dernier est négatif, donc le discriminant est nul. Ainsi $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$. $\square$

Exemple 11. 1. Dans $E = \mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire canonique, pour $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

ou de manière équivalente

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

En particulier, si $y = (1, \dots, 1)$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

2. Dans $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$, on a pour $(f, g) \in E^2$,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

En particulier pour $g : t \mapsto 1$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b f^2(t) dt}$$

En particulier, si f est une fonction continue et périodique de période T ,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}.$$

Le lecteur averti reconnaîtra la **valeur efficace** du signal f dans le membre de droite de cette inégalité et la **valeur moyenne** dans le membre de gauche.

Proposition 12 - Inégalités triangulaires.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. Première inégalité triangulaire. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Cas d'égalité. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \alpha \geq 0, x = \alpha y$ ou $\exists \alpha \geq 0, y = \alpha x$.
3. Seconde inégalité triangulaire. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$.

Démonstration.

En développant par bilinéarité et en utilisant la symétrie, on obtient

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, ainsi

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

i.e. $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$. Puisque les normes sont positives et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$, alors

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

2. Il y a égalité si et seulement si $|\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle = \|x\| \times \|y\|$. Or on sait que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Dans les deux cas, $\langle x, y \rangle$ est du signe de α . Or $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$ équivalent à $\langle x, y \rangle \geq 0$. Finalement, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement s'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

3. On remarque que $x = (x + y) + (-y)$ donc d'après la première inégalité triangulaire, $\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\|$, ou encore $\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\|$. On en déduit

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|.$$

De même, en échangeant les rôles de x et y , on obtient

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|.$$

Puisque $|\|x\| - \|y\|| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$, on peut conclure. $\square$

Proposition 13 - Identités remarquables.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
3. $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
4. Identité de polarisation. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

Démonstration.

Pour les trois premières identités, il suffit d'écrire le membre de gauche à l'aide du produit scalaire et de développer par bilinéarité, puis d'utiliser la symétrie. L'identité de polarisation s'obtient en faisant la différence des deux premières identités remarquables. $\square$

2. Orthogonalité

2.1. Vecteurs orthogonaux

Définition 14.

Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Exemple 15. 1. 0_E est orthogonal à tout vecteur de E .

2. Dans $\mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire canonique, posons $x = (1, \dots, 1)$. Les vecteurs

$$(0, \dots, 0), \quad (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 0, \dots, 0), \quad (2, -1, -1, 0, \dots, 0)$$

sont tous orthogonaux à x .

Exercice d'application 16. Dans l'espace $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, on considère les applications $f_1 : t \mapsto 1$, $f_2 : t \mapsto \cos(\pi t)$ et $f_3 : t \mapsto \sin(\pi t)$. Parmi ces trois vecteurs, lesquels sont orthogonaux ?

$\hookrightarrow$ On a $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 \cos(\pi t) dt = 0$, donc $f_1 \perp f_2$.

$\langle f_1, f_3 \rangle = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$, donc f_1 et f_3 ne sont pas orthogonaux.

$\langle f_2, f_3 \rangle = \int_0^1 \cos(\pi t) \sin(\pi t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2\pi t) dt = 0$ donc f_2 et f_3 sont orthogonaux.

Exercice d'application 17. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, on considère l'application φ définie pour tout $(P, Q) \in \mathbf{R}_2[X]^2$ par

$$\varphi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.

2. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ , déterminer l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $P = 1 + X + X^2$.

$\hookrightarrow$

1. φ est clairement symétrie et la bilinéarité est simple à obtenir. Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$.

$$\varphi(P, P) = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 \geq 0$$

en tant que somme de termes positifs. De plus, si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, donc P est un polynôme de degré au plus 2 qui admet 3 racines : on en déduit que P est nul. Ainsi φ est définie positive. On vient de montrer que φ est un produit scalaire.

2. Soit $A = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} A \perp P &\iff \langle A, P \rangle = 0 \\ &\iff P(-1)A(-1) + P(0)A(0) + P(1)A(1) = 0 \\ &\iff (a_0 - a_1 + a_2) + a_0 + 3(a_0 + a_1 + a_2) = 0 \\ &\iff 5a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des polynômes A qui sont orthogonaux à P est

$$\left\{ -\frac{2}{5}a_1 - \frac{4}{5}a_2 + a_1X + a_2X^2 : (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(X - \frac{2}{5}, X^2 - \frac{4}{5} \right).$$

Proposition 18.

Soit $x \in E$. Si x est orthogonal à tout vecteur de E , alors $x = 0_E$.

Démonstration.

x est en particulier orthogonal à lui-même, d'où $\langle x, x \rangle = 0$ et ainsi $x = 0_E$. □

2.2. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 19.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **orthogonal** de F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{ x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y \}.$$

Exemple 20. Avec la Proposition 18, on a $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition 21.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F possède une famille génératrice finie $(u_1, \dots, u_p)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$x \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x \perp u_i.$$

Démonstration.

Le sens direct est évident car les vecteurs u_i sont des vecteurs de F .

Réciproquement, supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x \perp u_i$. Soit $y \in F$. Puisque $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de F , il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ tel que $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x, u_i \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \times 0 = 0$$

ce qui montre que $x \perp y$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $y \in F$, alors $x \in F^\perp$. $\square$

Exercice d'application 22. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, \dots, 1))$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}^n$. D'après la proposition précédente,

$$x \in F^\perp \iff x \perp (1, \dots, 1) \iff \langle x, (1, \dots, 1) \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

$$\text{Ainsi, } F^\perp = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Exercice d'application 23. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$, déterminer l'orthogonal de $F = \mathbf{R}_1[X]$.

$\hookrightarrow$ Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$ tel que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$. Puisque $F = \text{Vect}(1, X)$, la proposition précédente assure que

$$\begin{aligned} P \in F^\perp &\iff \begin{cases} P \perp 1 \\ P \perp X \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \langle P, 1 \rangle = 0 \\ \langle P, X \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P(-1) + P(0) + P(1) = 0 \\ -P(-1) + P(1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3a_0 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, $F^\perp = \text{Vect}(X^2 - \frac{2}{3})$.

Exercice d'application 24. Dans $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}(x \mapsto 1)$.

$$\hookrightarrow F^\perp = \{ f \in E \mid \langle f, x \mapsto 1 \rangle = 0 \} = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

Théorème 25.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

$F^\perp \subset E$, $0_E \in F^\perp$. Soit $(x, y, \lambda) \in (F^\perp)^2 \times \mathbf{R}$. Pour tout $z \in F$,

$$\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda x + y \in F^\perp$. Ainsi, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E . □

2.3. Familles orthogonales

Définition 26.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille orthonormale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Exemple 27. 1. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale : soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \times 0 + \dots + 1 \times 0 + \dots + 0 \times 1 + \dots + 0 \times 0 = 0$. Si $i = j$, alors $\langle e_i, e_j \rangle = 0^2 + \dots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \dots + 0^2 = 1$.

2. Dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Considérons les vecteurs

$$f_1 : t \mapsto 1, \quad f_2 : t \mapsto \cos(\pi t), \quad f_3 : t \mapsto \sin(\pi t).$$

La famille (f_1, f_2, f_3) n'est pas orthogonale car f_1 et f_3 ne sont pas orthogonaux.

Exercice d'application 28. Dans $\mathcal{C}^0([0; 2\pi], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ (à faire : vérifier que cette application est bien un produit scalaire), considérons les vecteurs :

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{2}, \quad f_2 : t \mapsto \cos(t), \quad f_3 : t \mapsto \sin(t).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est orthonormale.

↪ On a

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = 0 \\ \langle f_2, f_3 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} dt = 0 \\ \langle f_3, f_1 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0 \\ \langle f_1, f_1 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2} = 1 \\ \langle f_2, f_2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = 1 \\ \langle f_3, f_3 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = 1 \end{aligned}$$

Théorème 29.

Une famille orthogonale ne contenant pas 0_E est libre. En particulier, une famille orthonormale est une famille libre.

Démonstration.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de E telle que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_i \neq 0_E$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$. Supposons que $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, u_k \right\rangle = \langle 0_E, u_k \rangle = 0_E.$$

Par ailleurs,

$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_k \rangle = \lambda_k \langle u_k, u_k \rangle = \lambda_k \|u_k\|^2$$

car pour $i \neq k$, $u_i \perp u_k$ donc $\langle u_i, u_k \rangle = 0$.

Ainsi, $\lambda_k \|u_k\|^2 = 0$. Donc $\lambda_k = 0$ ou $\|u_k\|^2 = 0$, i.e. $u_k = 0$. Or $u_k \neq 0$, donc $\lambda_k = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on vient de montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Le cas particulier d'une famille orthonormale s'en déduit puisque les vecteurs d'une telle famille sont unitaires donc non nuls. $\square$

Théorème 30 - Théorème de Pythagore.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E . Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

Démonstration.

Notons $v = \sum_{i=1}^p u_i$. Calculons $\|v\|^2$:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p u_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^p \langle u_i, v \rangle.$$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a

$$\langle u_i, v \rangle = \left\langle u_i, \sum_{k=1}^p u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^p \langle u_i, u_k \rangle.$$

Or la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, donc pour $k \neq i$, $\langle u_i, u_k \rangle = 0$. Ainsi $\langle u_i, v \rangle = \langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2$. En reportant dans l'expression de $\|v\|^2$, on obtient :

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2,$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

⚠ Attention ⚠. Le théorème de Pythagore présenté ici n'est qu'une **implication**.

3. Espaces euclidiens

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension n non nulle.

3.1. Bases orthonormales

Définition 31.

Une base de E est dite **orthonormale** si c'est une famille orthonormale.

Exemple 32. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormale.

Proposition 33.

Une famille orthonormale de n vecteurs de E est une base orthonormale.

Théorème 34.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Soit $x, y \in E$. Notons

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

1. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \langle x, e_i \rangle$;
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$;
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Démonstration. 1. On sait que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, e_i \rangle = x_i$$

car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale (donc $\langle e_k, e_i \rangle = 0$ si $k \neq i$ et $\langle e_i, e_i \rangle = 1$).

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle x, y = \left\langle x, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$.
3. $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2$. □

Exercice d'application 35. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base orthonormale et déterminer l'expression de ce produit scalaire.

$\hookrightarrow$ *Analyse.* Supposons qu'un tel produit scalaire existe. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Le vecteur x a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$. Ainsi, si $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ le produit scalaire de x et y est donné par :

$$\langle x, y \rangle = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3 y_3.$$

Synthèse. Laissée en exercice (il faut vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et que la famille $\mathcal{B}$ est bien une base orthonormale pour ce produit scalaire).

3.2. Existence de bases orthonormales

Théorème 36 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E . Alors il existe une unique famille orthogonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de E vérifiant :

1. pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$;
2. pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle \geq 0$.

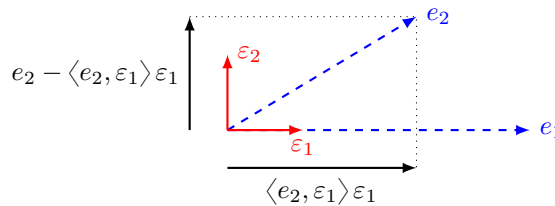
La famille obtenue est appelée l'**orthonormalisée** par le procédé de Gram-Schmidt de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

On a tout compris quand on a compris le cas $n = 2$. On veut transformer une famille libre quelconque (e_1, e_2) en une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1}{\|e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1\|}.$$

La première formule normalise e_1 , i.e. le rend unitaire.

La seconde formule commence par transformer e_2 en $e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$, ce qui consiste à retrancher à e_2 sa composante suivant ε_1 qui vaut $\varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_1$. Le vecteur ainsi obtenu est orthogonal à ε_1 , mais il ne peut pas être unitaire c'est pourquoi on le divise par sa norme.



Démonstration.

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on pose H_p : « si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E , alors il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ vérifiant 1. et 2. ».

- Soit (e_1) une famille libre de E . Alors $e_1 \neq 0_E$ donc on peut poser $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$. La famille (ε_1) est orthonormale, $\text{Vect}(\varepsilon_1) = \text{Vect}(e_1)$ et $\langle e_1, \varepsilon_1 \rangle = \|e_1\| > 0$. Donc H_1 est vraie.
- Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que H_p soit vraie. Soit $(e_1, \dots, e_{p+1})$ une famille libre de E . D'après H_p , puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle > 0$. Déterminons ε_{p+1} en raisonnant par analyse/synthèse.

- *Analyse.* Supposons qu'un vecteur ε_{p+1} convenable existe. Alors

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$$

donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbf{R}$ tels que $\varepsilon_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k e_k$.

Or $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et on sait que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ donc il

existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^p \lambda_k \varepsilon_k$.

Finalement, $\varepsilon_{p+1} = \alpha e_{p+1} + \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_p \varepsilon_p$, où l'on a noté plus simplement α le réel α_{p+1} . L'intérêt de cette écriture est que nous allons pouvoir exploiter l'orthonormalité de la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors,

$$\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_i \rangle = \alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle + \sum_{k=1}^p \lambda_k \langle \varepsilon_k, \varepsilon_i \rangle = \alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle + \lambda_i.$$

Or $\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_i \rangle = 0$, donc $\lambda_i = -\alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle$. On vient d'obtenir que

$$\varepsilon_{p+1} = \alpha \left(e_{p+1} - \sum_{k=1}^n \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \right).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer α . Pour cela, calculons $\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle$. De même que précédemment, on obtient :

$$\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle = \alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle.$$

Or on sait que $\|\varepsilon_{p+1}\| = 1$ et que $\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle > 0$, ce qui montre que $\alpha = \frac{1}{\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle} > 0$. Finalement, on a obtenu que si ε_{p+1} existe, alors

$$\varepsilon_{p+1} = \alpha (e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle e_{p+1}, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \varepsilon_p),$$

où α est l'unique réel strictement positif tel que $\|\varepsilon_{p+1}\| = 1$.

○ *Synthèse.* Introduisons le vecteur

$$a_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k.$$

Vérifions que a_{p+1} est orthogonal à ε_i pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, a_{p+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1})$.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \langle a_{p+1}, \varepsilon_i \rangle &= \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle - \sum_{k=1}^p \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \langle \varepsilon_k, \varepsilon_i \rangle \\ &= \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle - \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est orthonormale, donc $\langle \varepsilon_k, \varepsilon_i \rangle = 0$ si $k \neq i$ et $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 1$. Ainsi a_{p+1} est orthogonal à tous les ε_i , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Par ailleurs, remarquons que $a_{p+1} \neq 0_E$ car sinon $e_{p+1} \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Or on sait que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ (par hypothèse de récurrence), ainsi on aurait $e_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ ce qui est absurde puisque la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est libre.

Ainsi $a_{p+1} \neq 0_E$. On peut donc introduire $\varepsilon_{p+1} = \frac{1}{\|a_{p+1}\|} a_{p+1}$ (cf. phase d'analyse) : ε_{p+1} est alors unitaire et orthogonal à tous les ε_i pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Puisque la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est orthonormale, alors c'est également le cas de la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$.

Vérifions que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$. Puisque, via H_p , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et $\varepsilon_{p+1} = \frac{1}{\|a_{p+1}\|} a_{p+1}$, il nous suffit de vérifier que $e_{p+1} \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, a_{p+1})$ et que $a_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1})$. Or

$$a_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_{p+1})$$

donc $a_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ puisque $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Par ailleurs,

$$e_{p+1} = a_{p+1} + \sum_{k=1}^p \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, a_{p+1}),$$

On en déduit alors que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle &= \left\langle a_{p+1} + \sum_{k=1}^p \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k, \varepsilon_{p+1} \right\rangle \\ &= \langle a_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle + \sum_{k=1}^p \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \langle \varepsilon_k, \varepsilon_{p+1} \rangle \\ &= \langle a_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle & (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1}) \text{ est orthonormale} \\ &= \|a_{p+1}\| \end{aligned}$$

d'où $\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle > 0$.

Finalement, le principe de récurrence assure que H_p est vraie pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ (l'assertion n'est intéressante que pour $p \neq n$ car il n'existe pas de familles libres contenant strictement plus de n vecteurs). $\square$

1. on pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$;
2. pour $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, on calcule $a_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ puis on pose le vecteur normalisé $\varepsilon_k = \frac{1}{\|a_k\|} a_k$.

$$e_1 = (1, 0, 1), \quad e_2 = (1, 1, 1), \quad e_3 = (-1, 1, 0).$$

- $$\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 0 + 1) = \sqrt{2}.$$

3. Soit $a_3 = e_3 - \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$. On a :

$$\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + 0 + 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Finalement, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille orthonormale de $\mathbf{R}^3$, donc une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$.

- $$\langle X, E_1 \rangle = -E_1(-1) + E_1(1) = 0$$

3. Posons $A_3 = X^2 - \langle X^2, E_1 \rangle E_1 - \langle X^2, E_2 \rangle E_2$.

$$\langle X^2, E_1 \rangle = E_1(-1) + E_1(1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \langle X^2, E_2 \rangle = E_2(-1) + E_2(1) = 0.$$

Finalement la famille (E_1, E_2, E_3) est une famille orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$ (c'est même une base orthonormale puisqu'elle comporte $3 = \dim(\mathbf{R}_2[X])$ vecteurs).

$$f : t \mapsto 1, \quad q : t \mapsto t, \quad h : t \mapsto t^2.$$

- $$\langle g, \varepsilon_1 \rangle = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}.$$

$$\|a_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{(t - \frac{1}{2})^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$
$$\langle h, \varepsilon_1 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \langle h, \varepsilon_2 \rangle = 2\sqrt{3} \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$
$$\|a_3\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est alors une famille orthonormale.

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Un espace euclidien est de dimension finie, donc il possède une base. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à l'une des bases fournit alors une base orthonormale. $\square$

Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de E est en particulier une famille libre, qui peut donc être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète) : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fournit alors une base orthonormale de E , dont les p premiers vecteurs sont les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ de notre famille orthonormale de départ. $\square$

PCSI 2

4.1. Projeté orthogonal

Définition 43.

Soit $x \in E$. Il existe un unique vecteur de V , note $p_V(x)$, tel que $x - p_V(x) \in V^\perp$. $p_V(x)$ est appelé **projeté orthogonal** de x sur V .

Démonstration. • *Analyse.* Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$. Puisque V est un sous-espace de E , on peut le munir du produit scalaire de E . De plus, V est de dimension finie, donc c'est un espace euclidien. Il s'ensuit que V possède une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$. Alors :

$$\circ y \in V \text{ donc } y = \sum_{i=1}^p \langle y, e_i \rangle e_i.$$

$$\circ x - y \in V^\perp, \text{ donc pour } i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x - y, e_i \rangle = 0, \text{ puis } \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle.$$

Ainsi, $y = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$ ce qui prouve l'unicité d'un tel vecteur s'il existe.

• *Synthèse.* Posons $y = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors $y \in V$. Vérifions que $x - y \in V^\perp$.

Puisque $V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, vérifier que $x - y \in V^\perp$ équivaut à vérifier que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x - y \perp e_k$. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\langle x - y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle$$

car $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale. Ainsi $\langle x - y, e_k \rangle = 0$ et l'on vient de montrer que $x - y \in V^\perp$.

Finalement, on a montré qu'il existe un unique vecteur $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$. $\square$

Remarque technique 44. Pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur a sur un sous-espace vectoriel de dimension finie V , il y a deux méthodes.

1. On détermine une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de V ; alors $p_V(a) = \sum_{k=1}^p \langle a, e_k \rangle e_k$ (cf. démonstration précédente).
2. On utilise $p_V(a) \in V$ et $a - p_V(a) \in V^\perp$.

Exercice d'application 45. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, posons $V = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Soit $a = (x, y, z)$. Déterminer $p_V(a)$.

$\hookrightarrow$

1. Une base orthonormale de V est $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Ainsi,

$$p_V(a) = \langle a, v_1 \rangle v_1 = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3} \right).$$

2. Puisque $p_V(a) \in V$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $p_V(a) = \lambda(1, 1, 1)$. De plus, $a - p_V(a) \in V^\perp$ donc $a - p_V(a) \perp (1, 1, 1)$. Ainsi $x - \lambda + y - \lambda + z - \lambda = 0$ d'où $\lambda = \frac{x+y+z}{3}$, et on retrouve le résultat obtenu avec la méthode 1.

Exercice d'application 46. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, 1))$. Soit $a = (x, y, z)$. Déterminer $p_V(a)$.

$\hookrightarrow p_V(a) \in V$ donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tel que $p_V(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1) = (\lambda + \mu, \lambda, \lambda + \mu)$. De plus, $a - p_V(a) \in V^\perp$, donc $a - p_V(a) \perp (1, 1, 1)$ et $a - p_V(a) \perp (1, 0, 1)$. Ainsi

$$\begin{cases} x - \lambda - \mu + y - \lambda + z - \lambda - \mu = 0 \\ x - \lambda - \mu + z - \lambda - \mu = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2} \\ \lambda + \mu = \frac{x+z}{2} \end{cases}$$

Finalement, $p_V(a) = \left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right)$.

Exercice d'application 47. Dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, considérons $V = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$. Déterminer le projeté orthogonal sur V de $h : t \mapsto t^2$.

$\hookrightarrow p_V(h)$ est caractérisé par $p_V(h) \in V$ et $h - p_V(h) \in V^\perp$. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $p_V(h) = \lambda f + \mu g$ et $h - p_V(h)$ est orthogonal à f et à g . Ainsi,

$$0 = \langle h - p_V(h), f \rangle = \int_0^1 (t^2 - \lambda - \mu t) dt = \frac{1}{3} - \lambda - \frac{\mu}{2},$$

et

$$0 = \langle h - p_V(h), g \rangle = \int_0^1 (t^3 - \lambda t - \mu t^2) dt = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{3}.$$

Donc λ et μ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \frac{\mu}{2} &= \frac{1}{3} \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} &= \frac{1}{4} \end{cases}$$

On obtient alors $\lambda = -\frac{1}{6}$ et $\mu = 1$. Ainsi, le projeté orthogonal de h sur V est :

$$p_V(h) : t \mapsto t - \frac{1}{6}.$$

Remarque 48. Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est son orthonormalisée de Gram-Schmidt, on a déterminé les expressions des ε_k en fonction des e_i :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varepsilon_k = \frac{1}{\|a_k\|} a_k \quad \text{où} \quad a_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i.$$

On remarque alors que $a_k = e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$, où $F_{k-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$.

4.2. Supplémentaire orthogonal

Proposition 49.

On a

$$V \oplus V^\perp = E.$$

On dit que $V^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal** de V dans E .

Démonstration. • Soit $x \in E$. On a $x = p_V(x) + x - p_V(x)$, avec $p_V(x) \in V$ et $x - p_V(x) \in V^\perp$, ce qui montre que $E \subset V + V^\perp$.

Or $V + V^\perp \subset E$, donc $E = V + V^\perp$ par double inclusion.

- Soit $x \in V$. Alors

$$\underbrace{x}_{\in V^\perp} \perp \underbrace{x}_{\in V}.$$

Donc $\langle x, x \rangle = 0$, puis $x = 0_E$. Ainsi $V \cap V^\perp \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant toujours vraie, on obtient $V \cap V^\perp = \{0_E\}$.

Finalement, $V \oplus V^\perp = E$. □

On déduit immédiatement les résultats suivants.

Corollaire 50.

p_V est la projection sur V parallèlement à $V^\perp$.

Corollaire 51.

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . Alors

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

4.3. Distance à un sous-espace**Théorème 52 - Inégalité de Bessel.**

Soit $x \in E$.

$$\|p_V(x)\| \leq \|x\|.$$

Démonstration.

On a $x - p_V(x) \perp p_V(x)$ donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - p_V(x) + p_V(x)\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2$$

puis $\|x\|^2 \geq \|p_V(x)\|^2$. La racine carrée étant une application croissante sur $\mathbf{R}_+$,

$$\|x\| \geq \|p_V(x)\|.$$

□

Théorème 53.

Soit $x \in E$. $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V vérifiant

$$\|x - p_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

Démonstration.

Vérification de l'égalité. Soit $y \in V$. Montrons que $\|x - p_V(x)\| \leq \|x - y\|$.

On a $x - p_V(x) \in V^\perp$ et $y \in V$, ainsi que $p_V(x) \in V$. Donc $x - p_V(x) \perp p_V(x) - y$. Le théorème de Pythagore fournit alors :

$$\|x - p_V(x) + p_V(x) - y\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y\|^2$$

d'où

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - p_V(x)\|^2.$$

Les normes étant des réels positifs, on a donc $\|x - p_V(x)\| \leq \|x - y\|$. Ceci étant vrai pour tout $y \in V$ et comme $p_V(x) \in V$, on en déduit $\|x - p_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$.

Unicité. Montrons maintenant que $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V ayant cette propriété. Soit $y_0 \in V$ vérifiant $\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$. Montrons que $y_0 = p_V(x)$.

On sait que $y_0, p_V(x) \in V$ donc $\|x - y_0\| \leq \|x - p_V(x)\|$ (par définition de y_0 et puisque $p_V(x) \in V$) et $\|x - p_V(x)\| \leq \|x - y_0\|$ (par la propriété démontrée avant sur $p_V(x)$ et puisque $y_0 \in V$). Par double inégalité,

$$\|x - p_V(x)\| = \|x - y_0\|.$$

Or

$$x - y_0 = \underbrace{x - p_V(x)}_{\in V^\perp} + \underbrace{p_V(x) - y_0}_{\in V}.$$

Puisque $x - p_V(x) \perp p_V(x) - y_0$, le théorème de Pythagore assure que

$$\|x - y_0\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y_0\|^2.$$

Or $\|x - y_0\| = \|x - p_V(x)\|$, donc $\|p_V(x) - y_0\| = 0$ puis $y_0 = p_V(x)$ ce qui prouve l'unicité. $\square$

Définition 54.

On appelle **distance** de x à V et on note $d(x, V)$ le réel :

$$d(x, V) = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

On a donc

$$d(x, V) = \|x - p_V(x)\|.$$

Exemple 55. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, reprenons $V = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $a = (x, y, z)$. On a vu précédemment que $p_V(a) = \frac{x+y+z}{3}(1, 1, 1)$. Alors :

$$d(a, V)^2 = \|a - p_V(a)\|^2 = \left(\frac{2x - y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x + 2y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x - y + 2z}{3}\right)^2.$$

Exemple 56. On reprend l'Exercice d'application 47. La distance de $h : t \mapsto t^2$ au sous-espace V engendré par les fonctions $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto t$ est

$$d(h, V)^2 = \|h - p_V(h)\|^2 = \int_0^1 (h(t) - p_V(h)(t))^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{36 \times 5}.$$

Finalement, $d(h, V) = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

Exercice d'application 57. Dans $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, fixons $(a, b) \neq (0, 0)$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by = 0\}.$$

Soit $u = (x_0, y_0)$. Calculer $d(u, D)$.

$\hookrightarrow$ Notons p la projection orthogonale sur D et q la projection orthogonale sur $D^\perp$. Remarquons que $p + q = \text{Id}_E$, d'où $q = \text{Id}_E - p$. Par conséquent, $u - p(u) = q(u)$. Puisque $d(u, D) = \|u - p(u)\|$, alors $d(u, D) = \|q(u)\|$. Déterminons donc $q(u)$.

Pour tout $(x, y) \in D$, $ax + by = 0$, ce qui montre que $(a, b) \in D^\perp$. En particulier, $D^\perp \neq \{(0, 0)\}$. De plus, $(-b, a) \in D$ donc $D \neq \{(0, 0)\}$. Or $\dim(D) = \dim(D^\perp) = \dim(\mathbf{R}^2) = 2$ donc on a nécessairement $\dim(D) = \dim(D^\perp) = 1$. Alors $(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b))$ est une base orthonormale de $D^\perp$, d'où

$$q(u) = \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b) \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b) = \frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}(a, b).$$

Finalement,

$$d(u, D) = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$