

Chapitre 24

Séries numériques



*Ne infmité de mathématiciens entrent dans un bar. Le premier commande une bière.
Le deuxième commande une demi-bière.
Le troisième commande un quart de bière.
Le quatrième commande un huitième de bière...
Le barman finit par en avoir marre et sert deux bières.*

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On se donne également $n_0 \in \mathbf{N}$.

1. Généralités

« Numérique » signifie « réelle ou complexe » .

1.1. Définitions, premiers exemples

Définition 1.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle ou complexe.

On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ définie par

$$\forall N \geq n_0, \quad S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

Cette série se note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur la valeur de n_0 .

Pour tout $N \geq n_0$, le nombre S_N est appelé la **somme partielle** de rang N de la série de terme général u_n .

Définition 2.

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ est convergente. Sa limite

finie est alors appelée **somme de la série** $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Autrement dit, si $(S_N)_{N \geq n_0}$ est convergente,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^N u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

Si la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **divergente**.

Remarque 3. • Comme pour les suites, il faut faire la différence entre la série, le terme général de la série et la somme de la série.

- Une série est une suite.
- Une somme partielle d'une série est un scalaire.
- Étudier la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou non. Deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exercice d'application 4. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} n$. En déduire la nature (convergente ou divergente) de cette série.

↔ Pour tout N entier naturel, la somme partielle de rang N de la série $\sum n$ est

$$\sum_{n=0}^N n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

La suite $(\frac{N(N+1)}{2})_{N \in \mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n \geq 0} n$ est divergente.

Exercice d'application 5. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$. En déduire que la série converge et donner sa somme.

↔ Pour tout N entier naturel, la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ est

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

(on reconnaît une somme télescopique). La suite $(1 - \frac{1}{N+1})_{N \in \mathbf{N}}$ converge vers 1 donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

Exercice d'application 6. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

↔ Notons, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$. On a, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(N+1)^2} \geq 0$$

donc $(S_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est convergente. En outre, pour $k \geq 2$, $0 < k(k-1) \leq k^2$, donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$S_N \leq 1 + \sum_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \leq 2 - \frac{1}{N} \leq 2.$$

Donc (S_N) est croissante et majorée, donc convergente.

Exercice d'application 7. Montrer que la **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

$\hookrightarrow$ Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$. On a, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$H_{N+1} - H_N = \frac{1}{N+1} > 0.$$

Donc la suite (H_N) est strictement croissante. Le théorème de la limite monotone assure que H admet une limite ℓ dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Or, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$H_{2N} - H_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Donc si $\ell \in \mathbf{N}$, on obtient avec l'égalité précédente, $\ell - \ell \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Il s'ensuit que la série harmonique diverge.

Remarque 8. Soit n_0 et n_1 deux entiers naturels. Les séries associées aux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(u_n)_{n \geq n_1}$ sont de même nature. Autrement dit les premiers termes de la suite n'interviennent pas sur la convergence ou la divergence de la série de terme général u_n . Par contre, dans le cas où la série converge, les sommes $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $S' = \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n$ sont *a priori* différentes.

Définition 9.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique **convergente**. Pour tout $N \geq n_0$, le nombre

$$R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^N u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

est appelé le **reste d'ordre N** de cette série.

En particulier, si $\sum u_n$ converge, on a pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N.$$

1.2. Premières propriétés de convergence

Proposition 10.

Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente, alors :

1. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.
2. La suite $(R_N)_{N \geq n_0}$ des restes d'ordre N de la série converge vers 0.

Démonstration. 1. Pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k$. u est donc la différence de deux suites convergentes, donc converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = 0.$$

2. De même, en passant à la limite dans la définition de (R_N) , on obtient que la suite des restes converge et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = 0.$$

□

La contraposée du premier point est souvent utilisée pour repérer "facilement" des séries divergentes.

Corollaire 11.

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique. Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge.

On dit que cette série **diverge grossièrement**.

Exemple 12. 1. La série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement car son terme général diverge.

2. La série $\sum \frac{1}{1+n}$ diverge grossièrement car son terme général converge vers 1.

⚠ Attention ⚠. Le fait que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0 ne permet pas de prouver que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente. (cf exemple ci-dessous ou la série harmonique)

Exercice d'application 13. Montrer que la suite de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 mais la série $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge.

↔ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \sim \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Regardons les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. On reconnaît une somme télescopique, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} - 1.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Théorème 14.

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries numériques et λ et μ deux scalaires.

1. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n. \quad (\text{linéarité})$$

En particulier, la somme de deux séries convergentes est convergente.

2. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ divergente, alors $\sum_{n \geq n_0} (u_n + v_n)$ est divergente.

Démonstration. 1. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont convergentes, pour tout $N \geq n_0$, on a

$$\sum_{n=n_0}^N (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^N u_n + \mu \sum_{n=n_0}^N v_n.$$

$$\sum_{n=n_0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \text{ et } \sum_{n=n_0}^N v_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \text{ donc } \sum_{n=n_0}^N (\lambda u_n + \mu v_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente. On raisonne par l'absurde. Si $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, alors par le premier point, $\sum ((u_n + v_n) - u_n)$ est convergente, donc $\sum v_n$ est convergente. Ceci est absurde, donc $\sum v_n$ diverge. $\square$

Remarque 15. 1. Le premier point du théorème précédent assure que la somme de deux séries convergentes est convergente (c'est le cas $\lambda = \mu = 1$). L'égalité $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ n'a de sens que si les trois séries convergent.

2. Le théorème précédent montre que l'ensemble des suites dont la série associée est convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

3. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum_{n \geq n_0} (u_n + v_n)$.

Exemple 16. Les deux séries $\sum_{n \geq 0} n$ et $\sum_{n \geq 0} -n$ sont divergentes. Leur somme $\sum_{n \geq 0} 0$ est convergente. Par contre, la série $\sum_{n \geq 0} n + \sum_{n \geq 0} n = \sum_{n \geq 0} 2n$ est divergente.

Corollaire 17.

Notons $E = \{u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$. Alors E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbf{K} \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

est linéaire.

Démonstration.

Voir le point 1. du théorème précédente. $\square$

Proposition 18.

Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

1. $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \Re(u_n)$ et $\sum \Im(u_n)$ convergent. Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n).$$

2. $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \overline{u_n}$ converge. Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)}.$$

Démonstration.

Immédiat en utilisant les résultats sur les suites complexes. $\square$

1.3. Séries géométriques

Définition 19.

On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum_{n \geq 0} q^n$ où q est un nombre complexe.

Proposition 20.

Soit $q \in \mathbf{C}$. On considère la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$.

1. En notant $(S_N)_{N \geq 0}$ la suite de ses sommes partielles, on a :

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad S_N = \begin{cases} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ N + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

2. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.

3. Lorsque $|q| < 1$, la somme S de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ est donnée par :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

4. Dans le cas où $|q| \geq 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge grossièrement, son terme général ne tendant pas vers 0.

Exercice d'application 21. Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum 5^n$ 2. $\sum i^n$ 3. $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 4. $\sum \frac{\text{ch}(n)}{4^n}$

↪

1. La série diverge grossièrement.
 2. La série diverge grossièrement.
 3. La série converge vers $\frac{1}{2}$.
 4. $\sum \frac{\text{ch}(n)}{4^n} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{e}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{4e}\right)^n$. Comme $\frac{e}{4}$ et $\frac{1}{4e}$ sont dans $]0; 1[$ donc $\sum \frac{\text{ch}(n)}{4^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{4^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{e}{4}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4e}} = \frac{2}{4 - e} + \frac{2e}{4e - 1}.$$

1.4. Séries télescopiques**Définition 22.**

On appelle **série télescopique** une série numérique $\sum v_n$ dont le terme général v_n peut s'écrire sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$ où (u_n) est une suite numérique.

Proposition 23 - Lien entre suite et série.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si et seulement si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge.

Démonstration.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_N - u_0$. Donc $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si $(u_N - u_0)_{N \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$

Remarque 24. Dans la proposition précédente, la condition porte uniquement sur la convergence de la suite (u_n) et pas sur la valeur de sa limite. En particulier, il n'est pas nécessaire que la limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit nulle pour que la série $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

2. Séries à termes réels positifs ou nuls

2.1. Généralités

Proposition 25.

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général u_n est réel positif ou nul.

1. La suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante.
2. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. 1. Pour tout $N \geq 1$, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$, donc $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. $\square$

2.2. Comparaison de deux séries à termes positifs ou nuls

Théorème 26 - Critère de comparaison des séries à termes positifs.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

- Si la série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est divergente, alors la série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est divergente.

Démonstration.

Pour tout $N \geq n_0$, on pose $U_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$ et $V_N = \sum_{n=n_0}^N v_n$. On a alors, pour tout $N \geq n_0$, $U_N \leq V_N$.

Si $\sum v_n$ converge, alors la suite (V_N) converge donc est majorée. Donc (U_N) est également majorée. Comme (U_N) est croissante, elle est donc convergente.

Le deuxième point est la contraposée du premier. $\square$

Exercice d'application 27. Donner la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq \sqrt{n}$, donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après le critère de comparaison de séries à termes positifs.

Exercice d'application 28. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n + 1}}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \geq 0$, on a $\sqrt{n^4 + n + 1} \geq \sqrt{n^4} = n^2$, donc

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4 + n + 1}}$ converge.

Exercice d'application 29. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{n} + e^{-n})$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{1}{n} \leq (\frac{1}{n} + e^{-n})$.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{n} + e^{-n})$

Théorème 30 - Critère des équivalents pour les séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites à termes réels positifs ou nuls. On suppose que les termes de la suite (v_n) ne sont pas nuls au delà d'un certain rang. Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Démonstration.

Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$. C'est à dire $\frac{v_n}{2} \leq u_n \leq \frac{3v_n}{2}$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\frac{3}{2} \sum v_n$ converge et par théorème de comparaison des séries à terme positif, $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{2} v_n$ converge par théorème de comparaison des séries à terme positif, donc $\sum v_n$ converge. $\square$

Exercice d'application 31. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{2^n})$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2^n} \in]0; \frac{1}{2}[$. Or $\sin$ est positive sur $]0; \frac{1}{2}[$, donc la suite $(\sin(\frac{1}{2^n}))$ est à termes positifs.

De plus, $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sin(\frac{1}{2^n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$.

Donc, par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum \sin(\frac{1}{2^n})$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont de même nature. Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ elle est convergente, donc $\sum \sin(\frac{1}{2^n})$ est convergente.

Exercice d'application 32. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (\exp(\frac{1}{n}) - 1)$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \geq 1$, $e^{1/n} \geq 1$, donc la suite $(e^{1/n} - 1)$ est à termes positifs.

De plus, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $(e^{1/n} - 1) \sim \frac{1}{n}$.

Donc, par le critère des équivalents de séries à termes positifs, $\sum (e^{1/n} - 1)$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum (e^{1/n} - 1)$ est divergente.

Exercice d'application 33. Déterminer la nature de $\sum \ln(1 - \frac{1}{n^2})$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \in]0; 1[$ puis $-\ln(1 - \frac{1}{n^2}) \geq 0$.

De plus, $-\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ln(1 - \frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{n^2}$.

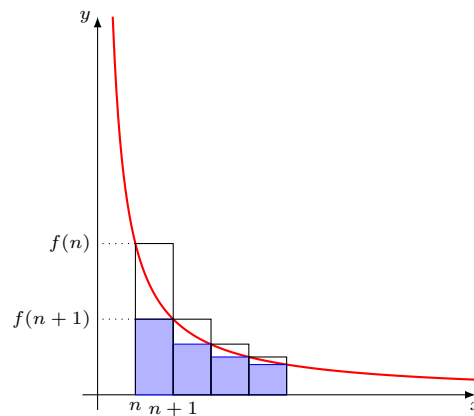
Donc, par le critère des équivalentes pour les séries à termes positifs, $\sum \ln(1 - \frac{1}{n^2})$ et $-\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc $\sum \ln(1 - \frac{1}{n^2})$ est convergente.

2.3. Comparaison avec une intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

On considère la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$. On note $(S_N)_{N \geq n_0}$ la suite des sommes partielles de cette série.

Dans le cas où f est décroissante :



On va encadrer l'aire sous la courbe représentative de f par les sommes partielles.

Soit $n \geq n_0$. Alors, par décroissance de f , pour tout $t \in [n; n+1]$,

$$f(n) \geq f(t) \geq f(n+1).$$

Puisque f est continue sur le segment $[n; n+1]$, on peut intégrer l'inégalité entre n et $n+1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} f(n) dt \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dt,$$

puis

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \geq f(n+1).$$

On somme cette relation pour n allant de n_0 à $N-1$. On obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \geq \sum_{n=n_0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t) dt \geq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n+1).$$

i.e.

$$S_N - f(N) \geq \int_{n_0}^N f(t) dt \geq S_N - f(n_0).$$

En reprenant ce raisonnement lorsque f est croissante, on obtiendrait :

$$S_N - f(N) \leq \int_{n_0}^N f(t) dt \leq S_N - f(n_0).$$

En résumé, nous avons montré le théorème suivant.

Théorème 34 - Critère de comparaison série/intégrale.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

Pour tout $N \geq n_0$, on note $S_N = \sum_{n=n_0}^N f(n)$.

1. Si f est croissante, alors pour tout $N \geq n_0$

$$\int_{n_0}^N f(t) dt + f(n_0) \leq S_N \leq \int_{n_0}^N f(t) dt + f(N).$$

2. Si f est décroissante, alors pour tout $N \geq n_0$,

$$\int_{n_0}^N f(t) dt + f(N) \leq S_N \leq \int_{n_0}^N f(t) dt + f(n_0).$$

Théorème 35.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue, **décroissante** et positive ou nulle sur $[n_0, +\infty[$.

1. La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^N f(t) dt \right)_{N \geq n_0}$ converge.
 2. En cas de convergence,

$$0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) - \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^N f(t) dt \leq f(n_0).$$

3. En cas de divergence,

$$\sum_{n=n_0}^N f(n) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{n_0}^N f(t) dt.$$

Démonstration. 1. Pour tout $N \geq n_0$, on note $u_N = \int_{n_0}^N f(t) dt$ et $S_N = \sum_{n=n_0}^N f(n)$ la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$. D'après la proposition précédente, on a donc pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$u_N + f(N) \leq S_N \leq u_N + f(n_0).$$

$\sum f(n)$ est une série à termes positifs car f est positive.

Si u_N converge, alors S_N est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge d'après la Proposition 25.

Réciproquement, si $\sum f(n)$ converge, alors, d'après la Proposition 10, la suite $(f(n))_{n \geq n_0}$ converge vers 0. On a alors pour tout $N \geq n_0$:

$$S_n - f(N) \geq u_N.$$

Or, $S_N - f(N)$ est convergente et u_N est croissante, donc par théorème de comparaison, $(u_N)_{N \geq n_0}$ converge.

2. On a pour tout $N \geq n_0$,

$$f(N) \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) - \int_{n_0}^N f(t) dt \leq f(n_0).$$

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient bien le résultat voulu.

3. En cas de divergence, on a pour tout $N \geq n_0$ que

$$1 - \frac{f(N)}{S_N} \leq \frac{\int_{n_0}^N f(t) dt}{S_N} \leq 1 - \frac{f(n_0)}{S_N}.$$

Comme f est positive et décroissante, $f(N)$ est bornée. Comme S_N est croissante non-convergente, elle tend vers $+\infty$. Donc $1 - \frac{f(N)}{S_N} \rightarrow 1$ et $1 - \frac{f(n_0)}{S_N} \rightarrow 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc que $\frac{\int_{n_0}^N f(t) dt}{S_N} \rightarrow 1$, d'où l'équivalent recherché. □

2.4. Les séries de Riemann

Définition 36.

On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

Théorème 37.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

- diverge grossièrement si $\alpha \leq 0$;
- diverge (mais pas grossièrement) si $0 < \alpha \leq 1$;
- converge si $\alpha > 1$.

Démonstration. • Si $\alpha \leq 0$, alors la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est strictement positive et croissante, donc ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

- Lorsque $\alpha > 0$, nous allons utiliser le principe de comparaison série intégrale.

On pose, pour tout $N \geq 1$, $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$. Alors, posant la fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, on a

$$S_N = \sum_{n=1}^N f_\alpha(n).$$

f_α est continue positive et décroissante (car elle est dérivable et sa dérivée $x \mapsto -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ est négative). Donc, d'après le critère de comparaison série/intégrale,

$$\int_1^N f_\alpha(t) dt + f_\alpha(1) \leq S_N \leq \int_1^N f_\alpha(t) dt + f_\alpha(N),$$

i.e.

$$\int_1^N f_\alpha(t) dt + 1 \leq S_N \leq \int_1^N f_\alpha(t) dt + \frac{1}{N^\alpha}.$$

Ainsi la série (S_N) est convergente si et seulement si $(\int_1^N f_\alpha(t) dt)$ est convergente (en effet, (S_N) est croissante donc si elle est majorée par une suite convergente donc bornée, alors elle converge ; de même pour l'implication réciproque).

- Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^N f_\alpha(t) dt = \left[\ln(x) \right]_1^N = \ln(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge (déjà démontré d'une autre manière!).

◦ Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\int_1^N f_\alpha(t) dt = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^N = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

La suite de terme général $(N^{1-\alpha})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. On en déduit que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. $\square$

Exercice d'application 38. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{n^3+3n+1}{n^7+n+2}$.

$\hookrightarrow$ On a $\frac{n^3+3n+1}{n^7+n+2} \sim \frac{1}{n^4}$, donc par comparaison avec une série de Riemann, on obtient que $\sum \frac{n^3+3n+1}{n^7+n+2}$ converge.

Exercice d'application 39. Déterminer la nature de la série $\sum \operatorname{Arccos}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $u_n = \operatorname{Arccos}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$. Donc

$$\cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or $\cos(u_n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $u_n^2 \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ puis $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{n}}$. Il s'ensuit que $\sum u_n$ diverge par comparaison avec une série de Riemann.

Remarque 40. Le Théorème 35 donne les équivalents :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(N) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{si } 0 < \alpha < 1$$

Exercice d'application 41. Déterminer un équivalent de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

$\hookrightarrow$ C'est une série de Riemann avec un exposant égal à $\frac{1}{2}$, donc elle diverge vers $+\infty$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

puis

$$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq S_n.$$

Or

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Ainsi

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq (2\sqrt{n+1}) + 1 = 2\sqrt{n+1} + 1.$$

Finalement, $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

2.5. Comparaison à une série géométrique

Proposition 42 - Règle de D'Alembert.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

- si $0 \leq \ell < 1$, la série converge ;
- si $\ell > 1$, la série diverge et $\lim u_n = +\infty$;
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration.

On suppose que $\ell \in [0; 1[$ et montrons que la série $\sum u_n$ converge. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq u_n \leq \underbrace{\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{N+1}}{u_N}}_{(n-N) \text{ facteurs}} \times u_N \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N} u_N.$$

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{(\ell + \varepsilon)^N} (\ell + \varepsilon)^n$. Comme $\ell + \varepsilon < 1$, la série $\sum (\ell + \varepsilon)^n$ converge et donc $\sum u_n$ aussi. Le cas $\ell > 1$ se démontre de manière similaire. $\square$

Exercice d'application 43. Déterminer la nature de $\sum \frac{\ln n}{2^n}$. On applique le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{2 \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc la série $\sum \frac{\ln n}{2^n}$ est convergente.

3. Convergence absolue

Définition 44.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ est convergente.

Exemple 45. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Théorème 46 - Lien entre convergence et absolue convergence.

Si une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. Le cas échéant, on a l'**inégalité triangulaire** :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. • Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ par : pour tout $n \geq n_0$, $v_n = u_n + |u_n|$. Alors, pour tout n , on a

$$0 \leq v_n \leq 2|u_n|.$$

$\sum |u_n|$ converge par hypothèse, donc est majorée. on en déduit que $\sum v_n$ est aussi majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge. Ainsi, $\sum u_n = \sum v_n - \sum |u_n|$, donc $\sum u_n$ converge.

- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite complexe, alors, pour tout $n \geq n_0$, on a
 $0 \leq |\Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\Im(u_n)| \leq |u_n|$
Ainsi, $\sum |\Re(u_n)|$ et $\sum |\Im(u_n)|$ sont des séries à termes positifs et majorées, donc convergentes.
 $\sum \Re(u_n)$ et $\sum \Im(u_n)$ sont absolument convergentes, donc convergentes d'après le premier point. Par linéarité, $\sum \Re(u_n) + i \Im(u_n)$ est convergente.
- Dans les deux cas, pour tout $N \geq n_0$, on a par inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{n=n_0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^N |u_n|.$$

Lorsque ces deux séries sont convergentes, on peut passer à la limite et l'on obtient le résultat. $\square$

Exercice d'application 47. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

$\hookrightarrow \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaisons des séries à termes positifs, la série $\sum \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$ est convergente.

Ainsi, $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice d'application 48. Montrer que la série $\sum \frac{e^{in}}{n^2}$ converge.

$\hookrightarrow$ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison avec une série de Riemann, la série proposée converge absolument. En particulier, elle est convergente.

Exercice d'application 49. Etudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$. On a $|u_n| = \frac{\ln n}{e^n}$. Par croissance comparée, $n^2 |u_n| = \frac{n^2 \ln n}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par comparaison avec une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque 50. Une série peut être convergente sans être absolument convergente (cf. exercice d'application suivant). On dit alors que la série est **semi-convergente**.

Exercice d'application 51. On considère la **série harmonique alternée** $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Cette série est-elle absolument convergente? convergente?

Indication. On pourra admettre qu'il existe une constante γ (appelée **constante d'Euler**) telle que

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

$\hookrightarrow$ La série n'est pas absolument convergente puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$ est le terme de la série harmonique, qui diverge.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = H_{2n} - H_n.$$

Il s'ensuit

$$S_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - (\ln(n) + \gamma) + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2) + o(1).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2) \quad \text{puis} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln(2).$$

Ainsi, la série harmonique alternée est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Proposition 52 - Un critère d'absolue convergence.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas au-delà d'un certain rang.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration.

Démonstration.
Si $u_n = O(v_n)$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Donc il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $0 \leq |u_n| \leq Mv_n$.

$\sum v_n$ converge, donc $\sum Mv_n$ converge.

Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.

$\sum u_n$ est donc absolument convergente.

Remarque technique 53. Sous les mêmes hypothèses, si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Exercice d'application 54. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n \cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3 - 5n + 2}$?

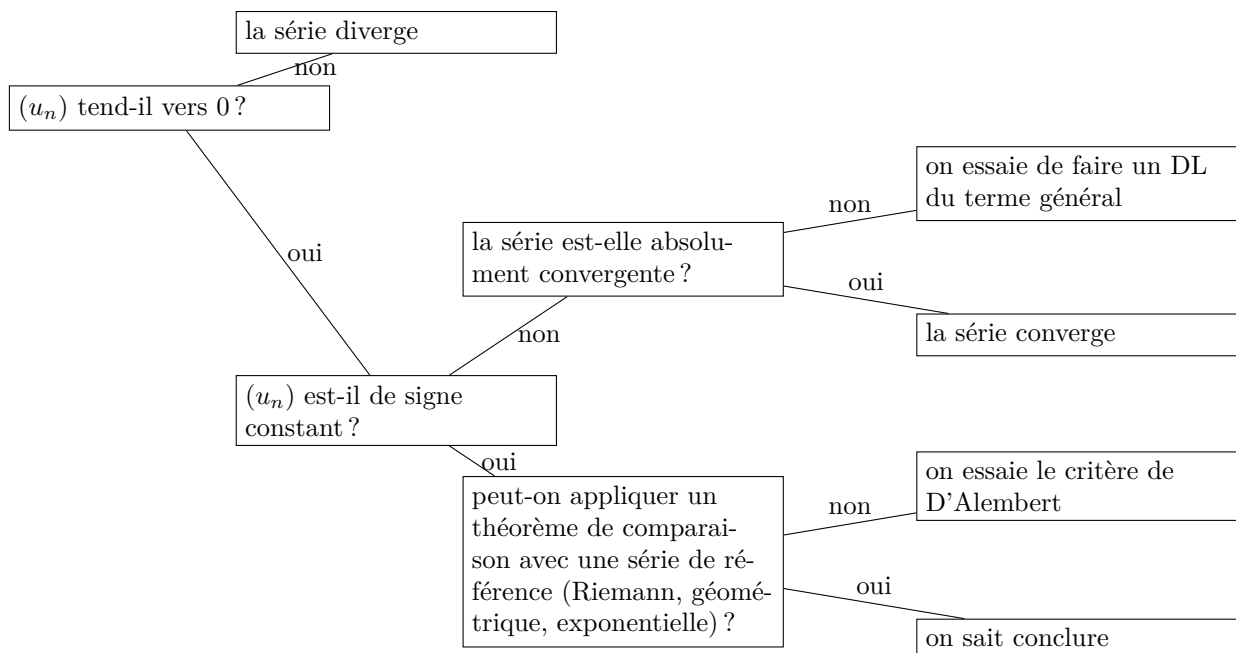
 $\hookrightarrow \text{On a}$

$$\frac{n \cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3 - 5n + 2} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times \frac{\cos(3n+1)}{1 - (5/n^2) + (2/n^3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc $\sum \frac{n \cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3 - 5n + 2}$ converge.

4. Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série $\sum u_n$ à termes quelconques.



5. Développement décimal propre d'un nombre réel

On s'intéresse à l'écriture d'un réel sous la forme d'un nombre à virgules. Par exemple, $\frac{8}{3} = 2,333333\ldots$ ou $\pi = 3,14159\ldots$

Commençons par les nombres réels positifs.

L'écriture $\pi = 3,14159\ldots = [\pi] + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots$ amène à l'étude des séries de terme général $\frac{a_n}{10^n}$ où, pour tout $n \geq 1$, les a_n sont des entiers compris entre 0 et 9.

Une telle série converge, car son terme général $\frac{a_n}{10^n}$ est dominé par $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, qui est celui d'une série géométrique convergente.

Cette écriture d'un nombre réel n'est pas unique car par exemple $1,000000\ldots = 0,9999999\ldots$

En effet, on a $1,00000\ldots = 1$ et $0,\underbrace{9999\ldots 9}_{n \text{ chiffres}} = 9 \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1 - 10^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Cependant, nous pouvons montrer (cf ce qui suit), que chaque nombre réel positif a un développement décimal unique dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

Proposition 55.

Soit x un nombre réel positif. Il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'entiers de $\llbracket 0; 9 \rrbracket$ qui ne stationne pas à la valeur 9 et telle que

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Cette écriture constitue le *développement décimal propre* de x . Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le nombre a_n a pour valeur $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ et on l'appelle la n -ième décimale de x .

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$

- Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ est un entier entre 0 et 9.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$$

et

$$10^n x - 10 < 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leq 10^n x,$$

donc $-1 < a_n < 10$. Comme il est clair que a_n est un entier, on en déduit que $a_n \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$.

- Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^N \frac{\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor}{10^n} = \text{téléscopage} = \frac{\lfloor 10^N x \rfloor}{10^N} - [x] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x - [x].$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge et sa somme vaut $x - [x]$, ce qui donne l'égalité du théorème.

- Démontrons que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ ne stationne pas à la valeur 9.

Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $a_n = 9$.

Alors $\sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{10^n} = 9 \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{10^n}$ est une série géométrique convergente dont la somme vaut $\frac{1}{10^{n_0-1}}$.

Cela donne

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0-1}}.$$

On constate alors que $10^{n_0-1} x \in \mathbf{Z}$, donc $a_{n_0} = \lfloor 10^{n_0} x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n_0-1} x \rfloor = 10^{n_0} x - 10 \times 10^{n_0-1} x = 0$, ce qui est absurde car $a_{n_0} = 9$.

- Par l'absurde, supposons qu'il existe deux suites différentes $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ d'entiers de $\llbracket 0; 9 \rrbracket$ qui ne stationnent pas à la valeur 9 telles que

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = [x] + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

On note alors $n_0 = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid a_n \neq b_n\}$. Supposons que $a_{n_0} < b_{n_0}$ (quitte à échanger les rôles) c'est-à-dire $a_{n_0} + 1 \leq b_{n_0}$. On peut écrire

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0}}$$

l'inégalité étant stricte puisque l'un au moins des a_n pour $n \geq n_0 + 1$ n'est pas égal à 9. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0}}.$$

Par ailleurs, par définition de n_0 , on a :

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^{n_0}} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0} + 1}{10^{n_0}} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{10^n}.$$

Comme les termes de la série $\sum \frac{b_n}{10^n}$ sont positifs ou nuls, les sommes partielles de celle-ci sont majorées par la somme de cette série et on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

ce qui est absurde !

□

Exemple 56. • $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398875 \dots$

• $e = 2,71828182846 \dots$

Pour les réels négatifs, la tradition veut que l'on adopte l'écriture décimale de leur valeur absolue précédée du signe $-$. Par exemple : $\sqrt{2} = 1,414 \dots$ donc $-\sqrt{2} = -1,414 \dots$ (alors que $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$).

Le développement décimal propre permet de caractériser les nombres rationnels.

Proposition 57 - Caractérisation des rationnels.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$. $x \in \mathbf{Q}$ si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Exemple 58. $1/7 = 0,142857142857142857 \dots$