
Généralités sur les fonctions

2.3 Parité et périodicité

Dans tout ce paragraphe, E désigne une partie de $\mathbf{R}$.

Définition 1.

Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite :

- **paire** si pour tout élément x de E , $-x$ est également dans E et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout élément x de E , $-x$ est également dans E et $f(-x) = -f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celui d'une fonction impaire est invariant par la symétrie de centre O .

Proposition 2.

Soit E un ensemble qui contient 0 et $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction impaire. Alors $f(0) = 0$.

Démonstration.

$f(-0) = -f(0)$, d'où $2f(0) = 0$ puis $f(0) = 0$. □

.....

Remarque technique 3.

Les propriétés de symétrie précédentes permettent de réduire le domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire à $\mathbf{R}_+$. On a plus généralement le résultat suivant :

Exercice d'application 4. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
 $t \longmapsto \cos(t) + t^2 - 7$.

Préciser un domaine d'étude possible pour la fonction f .

↔ Soit $t \in \mathbf{R}$. On a $-t \in \mathbf{R}$ et

$$f(-t) = \cos(-t) + (-t)^2 - 7 = \cos(t) + t^2 - 7 = f(t),$$

donc f est paire. On peut donc se contenter d'étudier f sur $\mathbf{R}_+$.

.....

Exercice d'application 5. Déterminer si la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) + 1$ est paire ou impaire.

Définition 6.

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$.

Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **T -périodique** si pour tout élément x de E , $x + T$ est également dans E et $f(x + T) = f(x)$. Le cas échéant, T est appelé une **période** de f .

Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **périodique** s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f est T -périodique.

Exemple 7. Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques. La fonction tan est π -périodique.

Exercice d'application 8. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto \sin(2x)$ est π -périodique.

Si f est une fonction périodique de période $T \in \mathbf{R}_+^*$, son graphe, tracé dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est invariant par les translations de vecteurs de l'ensemble $\{k \cdot T \cdot \vec{i} : k \in \mathbf{Z}\}$. Cette propriété géométrique permet de réduire l'étude des fonctions T -périodiques définies sur E à l'ensemble $[0; T[\cap E$.

Exercice d'application 9. Déterminer un domaine d'étude possible de l'inéquation $\sin(2x) \geq \cos(4x)$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

2.4 Monotonie

Définition 10.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur E .

- f est **croissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$;
- f est **décroissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \leq y$, $f(x) \geq f(y)$;
- f est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$, $f(x) < f(y)$;
- f est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$, $f(x) > f(y)$.

Une fonction f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si et seulement si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exercice d'application 11. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les variations sur $\mathbf{R}_+$ puis sur $\mathbf{R}_-$ de la fonction $f : x \mapsto x^n$.

Proposition 12.

La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est une fonction croissante (resp. décroissante).

Le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) positives (*i.e.* à valeurs dans $\mathbf{R}_+$) est une fonction croissante (resp. décroissante).

Démonstration.

En général, le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) n'est pas croissant : considérer par exemple le produit de $x \mapsto x$ (resp. $x \mapsto -x$) avec elle-même.

Proposition 13.

Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur E et F telles que $f(E) \subset F$. Si f et g ont même sens de variation (resp. des sens de variations opposés), alors $g \circ f$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration.

2.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 14.

Soit f une fonction réelle définie sur E . On dit que cette fonction est :

- **majorée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$;
- **minorée** si et seulement s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geq m$;
- **bornée** si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq \mu$.

Définition 15.

Soit f une fonction réelle définie sur E . On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) en $a \in E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). On dit que f admet un **extremum** en a si et seulement si elle admet un maximum ou un minimum en a .

$f(a)$ est le maximum de l'ensemble $f(\mathbf{R}) = \{f(x), x \in E\}$ de toutes les images par f . Il y a unicité de ce maximum, comme nous l'avons signalé lorsque nous avons défini le maximum d'une partie de $\mathbf{R}$. En revanche, ce maximum peut être atteint en plusieurs points ! Par exemple, la fonction $\cos$ admet un maximum (qui vaut 1) et ce maximum est atteint tous les multiples de 2π .