Cours de Mathématiques

PCSI

P.-W. Martelli
7 juin 2021

Table des matières

1 Raisonnements et logique **1**

1.1 Notion d'assertion 1

1.1.1 Connecteurs logiques 1

1.1.2 Quantificateurs 3

1.2 Quelques types de raisonnement 4

1.2.1 Raisonnement par implications 4

1.2.2 Raisonnement par contraposition 5

1.2.3 Raisonnement par double implication 6

1.2.4 Raisonnement par l'absurde 6

1.2.5 Raisonnement par disjonction de cas 7

1.2.6 Raisonnement par analyse/synthese 8

1.2.7 Raisonnement par récurrence 9

1.3 Conseils de rédaction 11

1.3.1 Utilisation des symboles logiques 11

1.3.2 Introduction des variables 12

1.4 Quelques formules fondamentales 13

1.4.1 Utilisation du symbole somme 13

1.4.2 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique 17

1.4.3 Factorisation de $a^n - b^n$ 19

1.4.4 Formule du binôme de Newton 20

2 Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle **25**

2.1 Parties de $\mathbf{R}$ 25

2.1.1 Inégalités dans $\mathbf{R}$ 25

2.1.2 Intervalles de réels 26

2.1.3 Valeur absolue d'un réel 27

2.1.4 Parties bornées de $\mathbf{R}$ 29

2.2 Fonctions numériques d'une variables réelle 30
2.2.1 Généralités 31
2.2.2 Courbe représentative d'une fonction 32
2.2.3 Parité et périodicité 34
2.2.4 Monotonie 37
2.2.5 Fonctions majorées, minorées, bornées 38
2.3 Notion de dérivée 39
2.3.1 Rappel des définitions et des premières propriétés 40
2.3.2 Etude des variations 42
2.3.3 Dérivée d'ordre supérieur 43

3 Fonctions usuelles **45**
3.1 Théorème de la bijection monotone 45
3.1.1 Fonctions réelles bijectives 45
3.1.2 Bijections continues 47
3.1.3 Propriétés des fonctions réciproques 48
3.2 Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances entières et puissances réelles 51
3.2.1 Fonctions logarithmes 51
3.2.2 Fonctions exponentielles 53
3.2.3 Fonctions puissances 55
3.2.4 Comparaison asymptotique des fonctions introduites 57
3.3 Fonctions hyperboliques 59
3.4 Fonctions circulaires 62
3.4.1 Cosinus, sinus et tangente d'un angle 62
3.4.2 Etude des fonctions circulaires 66
3.5 Equations et inéquations trigonométriques 67
3.5.1 Outils de base 67
3.5.2 Equations trigonométriques 69
3.5.3 Inéquations trigonométriques 70
3.5.4 Choix des inconnues 72
3.6 Fonctions trigonométriques réciproques 73
3.6.1 La fonction arccosinus 73
3.6.2 La fonction arcsinus 75
3.6.3 La fonction arctangente 77

4 Nombres complexes **79**
4.1 Présentation 79
4.1.1 Ensemble **C** et opérations 79

4.1.2 Structure de **C** . . . 81
4.1.3 Le plan complexe . . . 82
4.1.4 Conjugué d'un nombre complexe . . . 82
4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe . . . 83
4.2.1 Module d'un nombre complexe . . . 83
4.2.2 Argument d'un complexe et écriture trigonométrique . . . 86
4.2.3 Calcul d'un argument . . . 87
4.2.4 Propriétés de l'exponentielle complexe . . . 88
4.2.5 Applications de l'exponentielle complexe . . . 90
4.3 Racine n-ièmes d'un complexe . . . 91
4.3.1 Définition et expression . . . 91
4.3.2 Calcul des racines n-ièmes . . . 93
4.3.3 Equation du second degré . . . 93
4.4 Nombres complexes et géométrie plane . . . 95
4.5 Fonctions à valeurs complexes . . . 99
4.5.1 Présentation . . . 99
4.5.2 Exponentielle complexe . . . 101
4.5.3 Fonction exponentielle complexe . . . 102

5 Primitives et équations différentielles 103
5.1 Primitives . . . 103
5.1.1 Présentation . . . 103
5.1.2 Calculs simples . . . 106
5.1.3 Intégration par parties . . . 111
5.1.4 Changement de variable . . . 113
5.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . 115
5.2.1 Présentation . . . 115
5.2.2 Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 1 . . . 116
5.2.3 Détermination d'une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 . . . 117
5.2.4 Principe de superposition des solutions . . . 119
5.2.5 Problème de Cauchy . . . 120
5.2.6 Méthode numérique de résolution . . . 121
5.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 . . . 121
5.3.1 Présentation . . . 122
5.3.2 Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2 . . . 122
5.3.3 Recherche de solutions dans quelques cas particuliers . . . 125
5.3.4 Principe de superposition des solutions . . . 129
5.3.5 Problème de Cauchy . . . 129

6 Ensembles, applications, relations d'équivalence **131**

6.1 Ensembles : rappels et compléments . . . 131

6.1.1 Vocabulaire général . . . 131

6.1.2 Inclusion et égalité . . . 132

6.1.3 Opérations sur les parties d'un ensemble . . . 134

6.1.4 Produit cartésien . . . 138

6.2 Applications . . . 139

6.2.1 Définition, restriction, prolongement . . . 140

6.2.2 Image directe et image réciproque d'une partie par une application . . . 142

6.2.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . 145

6.2.4 Composition d'applications . . . 147

6.3 Relation d'équivalence . . . 150

7 Nombres entiers, ensembles finis et dénombrement **153**

7.1 Rudiments d'arithmétique dans **N** . . . 153

7.1.1 Diviseurs et multiples . . . 154

7.1.2 Division euclidienne dans les entiers naturels . . . 156

7.1.3 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple . . . 157

7.1.4 Nombres premiers . . . 161

7.2 Ensembles finis . . . 163

7.2.1 Cardinal d'un ensemble fini . . . 163

7.2.2 Réunion et différence . . . 165

7.2.3 Produit cartésien et listes . . . 170

7.2.4 Arrangements . . . 171

7.2.5 Combinaisons . . . 172

7.2.6 Bilan pratique pour les exercices de dénombrement . . . 174

7.2.7 Démonstrations combinatoires de quelques formules déjà établies . . . 176

7.2.8 Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini . . . 178

7.2.9 Cardinaux infinis (hors-programme) . . . 180

8 Les nombres réels **183**

8.1 Autres ensembles de nombres . . . 183

8.2 Les nombres réels . . . 184

8.2.1 Borne supérieure, borne inférieure . . . 184

8.2.2 Droite réelle achevée . . . 187

8.2.3 Compléments sur les intervalles de **R** . . . 188

8.2.4 Approximation d'un nombre réel . . . 190

9 Suites réelles et complexes **193**

9.1 Généralités sur les suites réelles . . . 194
9.1.1 Suites réelles : définition et notations . . . 194
9.1.2 Opérations sur les suites . . . 195
9.1.3 Suites réelles et relation d'ordre . . . 196
9.2 Convergence des suites réelles . . . 198
9.2.1 Limite finie d'une suite réelle . . . 198
9.2.2 Propriétés des suites convergentes . . . 200
9.2.3 Opérations sur les limites . . . 202
9.2.4 Suites tendant vers l'infini . . . 203
9.2.5 Suites extraites . . . 206
9.2.6 Passage à la limite dans une inéquation . . . 207
9.3 Suites classiques . . . 208
9.3.1 Suites arithmétiques et géométriques . . . 208
9.3.2 Suites arithmético-géométriques . . . 211
9.3.3 Suites linéaires récurrentes doubles . . . 212
9.4 Théorèmes d'existence d'une limite . . . 214
9.4.1 Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration . . . 214
9.4.2 Convergence des suites monotones bornées . . . 217
9.4.3 Suites adjacentes . . . 218
9.5 Suites de nombres complexes . . . 219
9.6 Relations de comparaison pour les suites . . . 221
9.6.1 Domination et négligeabilité . . . 221
9.6.2 Propriétés des o et O . . . 222
9.6.3 Suites équivalentes . . . 223
9.6.4 Équivalents classiques . . . 226
9.7 Etude des suites récurrentes . . . 227
9.7.1 Stabilité . . . 228
9.7.2 Convergence . . . 229

10 Systèmes linéaires **233**

10.1 Présentation du problème . . . 233
10.2 Opérations élémentaires . . . 235
10.3 Méthode de Gauss . . . 236
10.3.1 Système triangulaire, matrice échelonnée . . . 237
10.3.2 Description de l'algorithme du pivot de Gauss . . . 238
10.4 Résolution des systèmes linéaires . . . 240

11 Calcul matriciel **245**

11.1 Vocabulaire . . . 245

11.2 Calcul matriciel . . . 247

11.2.1 Combinaison linéaire . . . 247

11.2.2 Multiplication matricielle . . . 248

11.2.3 Transposition . . . 252

11.3 Les matrices carrées . . . 253

11.3.1 Matrices triangulaires supérieures ou inférieures, diagonales . . . 253

11.3.2 Matrices symétriques, matrices antisymétriques . . . 254

11.3.3 Puissance d'une matrice carrée . . . 255

11.4 Méthode du pivot de Gauss et calcul matriciel . . . 257

11.4.1 Matrices élémentaires . . . 257

11.4.2 Méthode du pivot de Gauss . . . 259

11.4.3 Opérations sur les colonnes . . . 259

11.5 Matrices carrées inversibles . . . 259

11.5.1 Présentation . . . 260

11.5.2 Calcul pratique de l'inverse . . . 262

12 Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle **263**

12.1 Propriétés locales d'une fonction . . . 263

12.2 Limites . . . 264

12.2.1 Limite finie d'une fonction en $a \in \overline{\mathbf{R}}$ . . . 264

12.2.2 Limites infinies . . . 266

12.2.3 Propriétés des limites . . . 267

12.2.4 Limite à droite, limite à gauche . . . 269

12.3 Opérations sur les limites . . . 271

12.4 Théorèmes d'existence de limite . . . 272

12.5 Relations de comparaison : cas des fonctions . . . 275

12.5.1 Présentation . . . 275

12.5.2 Propriétés . . . 276

12.5.3 Comparaison des fonctions usuelles . . . 278

12.5.4 Équivalents classiques . . . 278

12.6 Continuité . . . 279

12.6.1 Continuité en un point . . . 279

12.6.2 Prolongement par continuité . . . 281

12.6.3 Opérations . . . 282

12.6.4 Image d'une suite convergente . . . 283

12.7 Fonctions continues sur un intervalle . . . 283

12.7.1 Ensemble des fonctions continues sur I 284
12.7.2 Image d'un intervalle 284
12.7.3 Image d'un segment par une fonction continue 287
12.7.4 Théorème de la bijection 288
12.8 Fonctions à valeurs complexes 289
12.8.1 Limite d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes 289
12.8.2 Continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes 291
12.8.3 Notion de fonctions bornées 292
12.8.4 Relations de comparaisons 292

13 Dérivation des fonctions d'une variable réelle **293**
13.1 Fonctions dérivables 293
13.1.1 Dérivabilité en un point 293
13.1.2 Développement limité d'ordre 1 294
13.1.3 Dérivabilité et continuité 295
13.1.4 Interprétation graphique 295
13.1.5 Fonction dérivée 296
13.1.6 Dérivée à droite et à gauche en un point 297
13.2 Opérations sur les dérivées 298
13.2.1 Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient 298
13.2.2 Dérivée d'une fonction composée 300
13.2.3 Dérivée de la bijection réciproque d'une bijection 301
13.3 Dérivées successives 301
13.3.1 Définition 302
13.3.2 Opérations sur les dérivées n-ièmes 303
13.4 Propriétés des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ 305
13.4.1 Extrema locaux 305
13.4.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 307
13.4.3 Égalité des accroissements finis 308
13.4.4 Applications des théorèmes des accroissements finis 311
13.5 Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes 313

14 Probabilités sur un univers fini **315**
14.1 Univers et événements 315
14.2 Probabilités 318
14.2.1 Espaces probabilisés finis 318
14.2.2 Exemple fondamental : la probabilité uniforme 318
14.2.3 Propriétés 320

14.2.4 Construction de probabilités sur un univers fini . . . 322
14.3 Probabilités conditionnelles . . . 323
14.3.1 Définitions et propriétés . . . 323
14.3.2 Conditionnement . . . 326
14.3.3 Formule des probabilités totales . . . 328
14.3.4 Formule de Bayes . . . 329
14.4 Indépendance . . . 330
14.4.1 Indépendance de deux événements . . . 330
14.4.2 Indépendance conditionnelle . . . 332
14.4.3 Indépendance mutuelle . . . 332

15 Polynômes à une indéterminée 337
15.1 Définitions, opérations, indéterminée, degré . . . 337
15.1.1 Opérations et propriétés des opérations . . . 337
15.1.2 Indéterminée . . . 339
15.1.3 Composition des polynômes . . . 341
15.1.4 Degré d'un polynôme . . . 341
15.1.5 Fonctions polynomiales . . . 345
15.1.6 Dérivées . . . 346
15.1.7 Formule de Taylor . . . 348
15.2 Arithmétique des polynômes . . . 349
15.2.1 Diviseurs et multiples . . . 349
15.2.2 Division euclidienne de deux polynômes . . . 350
15.3 Racines d'un polynôme . . . 353
15.3.1 Définitions . . . 353
15.3.2 Factorisation d'un polynôme . . . 355
15.4 Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$ . . . 358
15.4.1 Polynômes irréductibles . . . 358
15.4.2 Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ . . . 359
15.4.3 Polynôme conjugué . . . 361
15.4.4 Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ . . . 362
15.5 Relations coefficients-racines . . . 365

16 Variables aléatoires finies 369
16.1 Variables aléatoires . . . 369
16.1.1 Définition . . . 369
16.1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire . . . 371
16.1.3 Loi image . . . 372

16.2 Lois usuelles . . . 373
16.2.1 Loi uniforme . . . 373
16.2.2 Loi de Bernoulli . . . 374
16.2.3 Loi binomiale . . . 375
16.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle . . . 376
16.3.1 Définition et propriétés . . . 376
16.3.2 La formule de transfert . . . 378
16.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle . . . 379
16.4.1 Variance . . . 379
16.4.2 Écart-type . . . 380
16.5 Espérance et variance des lois usuelles . . . 381
16.5.1 Variables aléatoires constantes . . . 381
16.5.2 Loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ . . . 381
16.5.3 Variable aléatoire de Bernoulli . . . 382
16.5.4 Loi binomiale . . . 382
16.6 Inégalité de Bienaymé - Tchebychev . . . 383
16.7 Couple de variables aléatoires . . . 385
16.7.1 Présentation . . . 385
16.7.2 Loi conjointe et lois marginales d'un couple de variables aléatoires . . . 386
16.7.3 Lois conditionnelles . . . 389
16.7.4 Loi image . . . 389
16.7.5 Variables aléatoires indépendantes . . . 390
16.7.6 Indépendance mutuelle . . . 392
16.7.7 Somme de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes . . . 393
16.7.8 Espérance et variance pour des variables aléatoires indépendantes . . . 394

17 Intégration sur un segment **397**

17.1 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 397
17.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . 398
17.2.1 Définition . . . 399
17.2.2 Propriétés . . . 400
17.2.3 La notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ . . . 401
17.2.4 Fonctions d'intégrale nulle . . . 402
17.3 Sommes de Riemann . . . 403
17.4 Calcul intégral . . . 405
17.4.1 Théorème fondamental de l'analyse . . . 405
17.4.2 Intégration par parties . . . 406

17.4.3 Changements de variables . . . 407
17.5 Formules de Taylor . . . 407
17.5.1 La formule de Taylor avec reste intégral . . . 407
17.5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange . . . 408
17.5.3 Formule de Taylor-Young . . . 410
17.6 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment . . . 411

18 Développements limités **415**
18.1 Définition et premières propriétés . . . 415
18.2 Existence d'un développement limité . . . 419
18.2.1 Régularité et développement limité . . . 419
18.2.2 Formule de Taylor-Young . . . 420
18.3 Développements limites usuels . . . 421
18.4 Opérations sur les développements limités . . . 422
18.4.1 Développement limité d'une combinaison linéaire . . . 422
18.4.2 Développement limité d'un produit . . . 423
18.4.3 Développement limité d'une fonction composée . . . 425
18.4.4 Développement limité d'un quotient . . . 427
18.4.5 Intégration d'un développement limité . . . 430
18.5 Applications des développements limités . . . 431
18.5.1 Recherche d'équivalents et calcul de limites . . . 432
18.5.2 Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente . . . 433
18.5.3 Étude des branches infinies . . . 435
18.5.4 Recherche d'extrema . . . 436

19 Espaces vectoriels **437**
19.1 L'exemple du plan . . . 437
19.2 Structure d'espace vectoriel . . . 438
19.2.1 Exemples fondamentaux . . . 438
19.2.2 Premières propriétés . . . 440
19.2.3 Combinaisons linéaires de vecteurs . . . 441
19.3 Sous-espaces vectoriels . . . 442
19.3.1 Définition et exemples à connaître . . . 442
19.3.2 Sous-espace vectoriel engendré . . . 447
19.3.3 Intersection de sous-espaces vectoriels . . . 451
19.3.4 Somme de sous-espaces vectoriels . . . 452
19.3.5 Sous-espaces vectoriels en somme directe . . . 455
19.3.6 Sous-espaces vectoriels supplémentaires . . . 457

19.4 Applications linéaires 460
19.4.1 Définition et exemples 460
19.4.2 Supplémentaires et restrictions 463
19.4.3 Opérations et structure 464
19.4.4 Noyau et image d'une application linéaire 466
19.5 Equations linéaires 470
19.6 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel 471
19.6.1 Projecteurs 471
19.6.2 Symétries 475
19.7 Une application des isomorphismes : étude des suites récurrentes d'ordre 2 à coefficients constants 478

20 Espaces vectoriels de dimension finie **481**
20.1 Familles libres, génératrices et bases 481
20.1.1 Familles génératrices 481
20.1.2 Familles libres et familles liées 485
20.1.3 Bases 490
20.1.4 Opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille 494
20.2 Dimension d'un espace vectoriel 496
20.2.1 Espaces vectoriels de dimension finie 496
20.2.2 Existence de bases 496
20.2.3 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie 499
20.2.4 Caractérisation des bases 501
20.2.5 Rang d'une famille de vecteurs 502
20.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie 504
20.3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel 504
20.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels et dimension 504
20.5 Applications linéaires en dimension finie 508
20.5.1 Image d'une base 508
20.5.2 Rang d'une application linéaire 510
20.5.3 Théorème du rang 512

21 Représentation matricielle des applications linéaires **515**
21.1 Matrice d'une application linéaire 515
21.1.1 Définition 515
21.1.2 Image d'un vecteur 517
21.1.3 Opérations sur les applications linéaires et calcul matriciel 519
21.1.4 Représentation des isomorphismes 520

21.2 Changements de bases . . . 522
21.2.1 Changement de base sur les coordonnées d'un vecteur . . . 522
21.2.2 Formules de changement de bases . . . 524
21.3 Noyau, image et rang d'une matrice . . . 526
21.3.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice . . . 527
21.3.2 Noyau et image d'une matrice . . . 527
21.3.3 Rang d'une matrice . . . 528

22 Déterminant **535**
22.1 Déterminant d'une matrice carrée . . . 535
22.2 Propriétés du déterminant . . . 538
22.2.1 Opérations élémentaires sur les colonnes . . . 539
22.2.2 Caractérisation des matrices inversibles . . . 540
22.2.3 Déterminant d'un produit, d'un inverse, d'une transposée . . . 541
22.3 Calcul pratique d'un déterminant . . . 543
22.4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base . . . 545
22.5 Déterminant d'un endomorphisme . . . 546

23 Espaces euclidiens **549**
23.1 Produit scalaire . . . 549
23.1.1 Définition . . . 549
23.1.2 Exemples de référence . . . 550
23.1.3 Norme euclidienne . . . 551
23.2 Orthogonalité . . . 554
23.2.1 Vecteurs orthogonaux . . . 554
23.2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel . . . 555
23.2.3 Familles orthogonales . . . 557
23.3 Espaces euclidiens . . . 558
23.3.1 Bases orthonormales . . . 559
23.3.2 Existence de bases orthonormales . . . 560
23.4 Projection orthogonale sur un espace de dimension finie . . . 563
23.4.1 Projeté orthogonal . . . 564
23.4.2 Supplémentaire orthogonal . . . 565
23.4.3 Distance à un sous-espace . . . 566

24 Séries numériques **569**
24.1 Généralités . . . 569
24.1.1 Définitions, premiers exemples . . . 569

24.1.2 Premières propriétés de convergence 571
24.1.3 Séries géométriques 574
24.1.4 Séries télescopiques 574
24.2 Séries à termes réels positifs ou nuls 575
24.2.1 Généralités 575
24.2.2 Comparaison de deux séries à termes positifs ou nuls 575
24.2.3 Comparaison avec une intégrale 577
24.2.4 Les séries de Riemann 579
24.2.5 Comparaison à une série géométrique 580
24.3 Convergence absolue 581
24.4 Plan d'étude d'une série numérique 583
24.5 Développement décimal propre d'un nombre réel 584

A Formulaire de trigonométrie **587**
A.1 Présentation 587
A.2 Formulaire de trigonométrie 587

B Formulaire de dérivées et primitives **591**
B.1 Dérivées usuelles 591
B.1.1 Formules de dérivation 591
B.1.2 Dérivées des fonctions usuelles 591
B.2 Primitives usuelles 592

C Plan d'étude d'une fonction **595**

D Relations d'ordre (hors-programme) **599**

Chapitre 1

Raisonnements et logique

Un étudiant en philosophie demanda à Russell quelques éclaircissements :
"Prétendez-vous que de "2+2 = 5", il s'ensuit que vous êtes le Pape ? " "Oui", fit Russell.
L'étudiant étant sceptique Russell[1] *proposa la démonstration suivante :*

(1) Supposons que 2 + 2 = 5.
(2) Soustrayons 2 de chaque membre de l'identité, nous obtenons 2 = 3.
(3) Par symétrie, 3 = 2.
(4) Soustrayons 1 de chaque côté, il vient 2 = 1.

Maintenant le Pape et moi sommes deux.
Puisque 2 = 1, le Pape et moi sommes un.
Par suite je suis le Pape.

Trois logiciens entrent dans un bar. Le patron leur demande s'ils prennent tous une bière.

— *Le premier répond qu'il ne sait pas.*
— *Le deuxième répond qu'il ne sait pas.*
— *Le troisième répond oui !*

1.1. Notion d'assertion

1.1.1. Connecteurs logiques

Définition 1.1.

Une **assertion** est une phrase qui peut être soie vraie (V dans la suite), soit fausse (F dans la suite).

1. Bertrand RUSSELL - mathématicien britannique, philosophe (1872-1970)

Exemple 1.2. « 4 est pair » est une assertion (vraie).
« $1+1=3$ » est une assertion (fausse). « Comment allez-vous ? » n'est pas une assertion.

On appelle négation d'une assertion P l'assertion qui est vraie quand P est fausse, et qui est fausse quand P est vraie. La formalisation mathématique est donnée dans la définition suivante :

Définition 1.3.

Soit P une assertion. On appelle **négation** de P, et on note (non P), ou encore $\neg P$, l'assertion définie par la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

On peut aussi combiner des assertions à l'aide de **connecteurs logiques** binaires.

Définition 1.4.

La table de vérité ci-dessous définit les connecteurs logiques suivants :

- la **conjonction**, notée « et » ou « $\wedge$ » ;
- la **disjonction**, notée « ou » ou « $\vee$ » ;
- l'**implication**, notée « implique » ou « $\Longrightarrow$ » ;
- l'**équivalence**, notée « équivaut à » ou « $\Longleftrightarrow$ ».

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Exemple 1.5.

- (« Aurélien est un garçon » et « Elsa est un garçon ») est fausse ;
- (« Aurélien est un garçon » ou « Elsa est une fille ») est vraie ;
- (« 6 est pair » implique « 7 est impair ») est vraie ;
- (« 5 est pair » implique « 7 est impair ») est vraie ;
- (« 5 est impair » implique « 7 est pair ») est fausse ;
- (« 5 est pair » implique « le capitaine a 77 ans ») est vraie.

Si P et Q sont deux assertions ayant la même valeur de vérité, on dit qu'elles sont **synonymes**. On note alors $P \equiv Q$.

Proposition 1.6.

Soient P et Q deux assertions.

(a) $\neg(\neg P) \equiv P$;

(b) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$, $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ (formules de Morgan).

Démonstration.
Ces résultats sont faciles à démontrer à l'aide de tables de vérité.

(a) On a :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

donc $\neg(\neg P) \equiv P$.

(b) On a :

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

donc $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
La dernière assertion est laissée en exercice.

□

Proposition 1.7.

Soient P et Q des assertions. On a la synonymie :

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)\,.$$

Corollaire 1.8.

Soient P et Q des assertions. On a la synonymie :

$$(\neg(P \Longrightarrow Q)) \equiv (P \wedge (\neg Q))\,.$$

Démonstration.
Il faut faire une table de vérité pour démontrer la Proposition 1.7. Le Corollaire 1.8 découle directement de la proposition et des lois de Morgan. □

1.1.2. Quantificateurs

Définition 1.9.

On appelle **prédicat** un énoncé $P(x)$ qui dépend d'une variable x à l'intérieur d'un certain ensemble. Pour une valeur fixée de la variable x, $P(x)$ est une assertion et prend donc une unique valeur de vérité : Vrai ou Faux.

Soit E un ensemble. L'assertion « pour tout élément x de E, l'assertion $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\forall x \in E,\ P(x).$$

L'assertion « il existe un élément x de E telle que l'assertion $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\exists x \in E,\ P(x).$$

Dans cette assertion, il faut comprendre « il existe un élément » comme « il existe (au moins) un élément ». L'assertion « il existe un unique élément x de E telle que $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\exists! x \in E,\ P(x).$$

Si une assertion dépend de plusieurs variables, on peut être amené à utiliser plusieurs quantificateurs. Soit F un ensemble. On a les synonymies :

$$\forall x \in E,\ (\forall y \in F,\ P(x,y)) \quad \equiv \quad \forall y \in F,\ (\forall x \in E,\ P(x,y))$$

$$\exists x \in E,\ (\exists y \in F,\ P(x,y)) \quad \equiv \quad \exists y \in F,\ (\exists x \in E,\ P(x,y))$$

En revanche, les assertions (A) et (B) suivantes :

$$(A) \quad \exists x \in E,\ (\forall y \in F,\ P(x,y)) \qquad (B) \quad \forall y \in F,\ (\exists x \in E,\ P(x,y))$$

ne sont pas synonymes.

Exemple 1.10. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Dire que la fonction est constante sur $\mathbf{R}$ s'écrit :

$$\exists c \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = c.$$

Par contre, toutes les fonctions réelles à valeurs réelles satisfont :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists c \in \mathbf{R},\ f(x) = c,$$

puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(x)$.

Proposition 1.11.

Soit E un ensemble et P un prédicat défini sur E. On a les synonymies :

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in E,\ \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in E,\ \neg P(x)$$

Exemple 1.12. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'assertion « f n'est pas constante sur $\mathbf{R}$ » s'écrit :

$$\forall c \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq c.$$

1.2. Quelques types de raisonnement

1.2.1. Raisonnement par implications

En mathématiques, les théorèmes s'écrivent souvent comme des implications : **si** certaines hypothèses sont satisfaites **alors** un certain résultat est obtenu.

Proposition 1.13 - Modus ponens.

Soient P et Q deux assertions.
Si $(P \Longrightarrow Q)$ et P sont vraies, alors Q est vraie

Si P est fausse alors $P \Longrightarrow Q$ sera vraie, quelle que soit la valeur de vérité de Q. Ainsi, pour démontrer $P \Longrightarrow Q$, il suffit de vérifier que lorsque P est vraie, Q l'est aussi. C'est pourquoi on lit souvent $P \Longrightarrow Q$ comme : « si P, alors Q ».

⚠ **Attention** ⚠. Si A et B sont deux assertions, démontrer $A \Longrightarrow B$ ne revient pas à dire que B est vraie. En particulier, le raisonnement

$$A \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow B$$

ne permet pas de conclure que B est vraie. On préférera écrire à la place en français « A donc... donc B », car « A donc B » est une contraction pour : « puisque A est vraie A implique B, on a B vraie ». Pour éviter les erreurs, il est plus sage de proscrire l'utilisation du symbole $\Longrightarrow$.

Dans l'assertion $P \Longrightarrow Q$, Q est dite **condition nécessaire**, et P est dite **condition suffisante**. En effet, supposons que l'implication soit vraie. Alors Q est nécessairement vraie si P l'est, et il suffit que P soit vraie pour que Q le soit.

Proposition 1.14 - Transitivité de l'implication.

Soient P, Q et R des assertions.

$$\text{Si } P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow R \text{ sont vraies,} \quad \text{alors } P \Longrightarrow R \text{ est vraie.}$$

Remarque technique 1.15. Pour montrer une implication on peut utiliser une preuve directe :

1. on suppose P (et on l'écrit) ;
2. puis on démontre Q.

Exercice d'application 1.16. Soit n un entier. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

↪ Supposons que n est pair. Alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. Ainsi $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Puisque $(2k^2)$ est un entier, on a bien que n^2 est pair.

1.2.2. Raisonnement par contraposition

Définition 1.17.

Soient P et Q deux assertions. On appelle **contraposée** de l'implication $P \Longrightarrow Q$, l'implication :

$$(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P).$$

Théorème 1.18 - Raisonnement par contraposition.

Soient P et Q deux assertions. On a la synonymie :

$$P \Longrightarrow Q \equiv (\neg Q) \Longrightarrow (\neg P).$$

Démonstration.
Il suffit de faire une table de vérité. □

Remarque technique 1.19. Au lieu de montrer directement qu'une implication est vraie, il est parfois plus facile de montrer sa contraposée.

Exercice d'application 1.20. Soit n un entier. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

↪ La contraposée de l'implication à montrer est :

« si n est impair, alors n^2 est impair ».

Supposons que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi $n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Or $2k^2 + 2k \in \mathbf{Z}$, donc n^2 est impair.
Finalement, si n^2 est pair, alors n est pair.

◇◇

1.2.3. Raisonnement par double implication

Pour démontrer une équivalence, on peut procéder par double implication.

Proposition 1.21 - Raisonnement par double implication.

Soient P et Q des assertions. On a la synonymie :

$$P \iff Q \equiv (P \implies Q) \wedge (Q \implies P).$$

◇◇

Remarque technique 1.22. Pour démontrer une équivalence entre deux assertions P et Q, on peut procéder par « double implication », *i.e.* démontrer séparément $P \implies Q$ (Q est une condition nécessaire pour P) et $Q \implies P$ (Q est une condition suffisante pour P).

Exercice d'application 1.23. Soit n un entier. Démontrer que n est pair si, et seulement si n^2 est pair (*i.e.* « n est pair » équivant à « n^2 est pair »).

↪ Il suffit de reprendre les résultats obtenus aux exercices d'application 1.16 et 1.20.

◇◇

1.2.4. Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** repose sur l'idée qu'une assertion qui n'est pas fausse est vraie. Pour prouver une proposition P, on suppose que P est fausse et on raisonne jusqu'à trouver une contradiction (une « absurdité »). Si cette absurdité est apparue, c'est que l'hypothèse faite au départ (« P est fausse ») est fausse. La proposition P est donc vraie.

◇◇

Remarque technique 1.24. Le raisonnement par l'absurde est utile lorsque travailler sous l'hypothèse $\neg P$ semble plus facile que d'obtenir P directement.

Exercice d'application 1.25. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.

↪ Ici il paraît difficile de travailler directement, car on ne saurait « essayer » tous les couples d'entiers !
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc $(p, q) \in (\mathbf{Z}^{\star})^2$ tel que $\sqrt{2} = p/q$. On peut supposer (quitte à simplifier la fraction) que p et q n'ont pas de diviseurs communs.
On a $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair. Avec l'Exercice d'application 1.20, on en déduit que p est pair. Donc il existe $r \in \mathbf{Z}$ tel que $p = 2r$.
On a $p = 2r$, d'où $2q^2 = p^2 = 4r^2$, puis $q^2 = 2r^2$. Comme avant, on en déduit que q est pair, comme p. Ceci est une contradiction, car on avait supposé que p et q n'avaient pas de diviseurs communs.
On a donc montré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

◇◇

◇◇

Remarque technique 1.26. Le raisonnement par l'absurde est commode pour démontrer qu'un

objet n'existe pas (*i.e.* qu'un ensemble est vide).

Exercice d'application 1.27. Résoudre l'équation $x = x + 1$, d'inconnue réelle x.

$\hookrightarrow$ Supposons qu'il existe une solution à l'équation et notons-la x. Alors $x = x + 1$, donc $0 = 1$. Ceci est faux. Ainsi il n'existe pas de solution à l'équation.

Solution plus classique. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x = x + 1 \iff 0 = 1.$$

L'assertion « $0 = 1$ » étant fausse, l'équivalence précédente assure que « $x = x + 1$ » est fausse également. Finalement, l'équation n'a pas de solution.

◇◇

1.2.5. Raisonnement par disjonction de cas

Proposition 1.28 - Disjonction de cas.

Soient A, B et C trois assertions.

$$\big((A \vee B) \Longrightarrow C\big) \equiv \big((A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C)\big).$$

Démonstration.
Immédiat avec des tables de vérité. □

Corollaire 1.29.

Soient A et C deux assertions. On a

$$C \equiv \big((A \Longrightarrow C) \wedge (\overline{A} \Longrightarrow C)\big).$$

Démonstration.
On a $A \vee \overline{A}$ vraie, donc $A \vee \overline{A} \Longrightarrow C$ a la même valeur logique que C. On conclut avec la proposition précédente.

Exercice d'application 1.30. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n(n^2+1)}{2}$ est un entier naturel.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$.

- Supposons n pair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2 + 1)$, d'où $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.
- Supposons que n n'est pas pair, *i.e.* que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Il s'ensuit $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{(2k+1)(4k^2+4k+2)}{2} = (2k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$, d'où $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.

On vient de montrer, par disjonction de cas, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.

◇◇

Remarque technique 1.31. Disjoindre des cas peut être très pratique pour résoudre une équation faisant intervenir des racines carrées. En effet, si $x \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$\forall a \in \mathbf{R}_+, \quad \sqrt{x} = a \iff x = a^2 \quad \text{mais} \quad \forall a \in \mathbf{R}_-^\star, \quad \sqrt{x} = a \text{ est fausse}$$

Exercice d'application 1.32. Résoudre l'équation $\sqrt{17 - 8x} = 2x + 1$ d'inconnue x réelle.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in]-\infty; \frac{17}{8}]$.

- si $x < -\frac{1}{2}$: alors $2x+1<0$, et puisque $\sqrt{17-8x} \geqslant 0$, $\sqrt{17-8x} = 2x+1$ est impossible : l'équation n'a pas de solutions dans $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.
- si $x \geqslant -\frac{1}{2}$: alors $2x+1 \geqslant 0$; la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, on a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{17-8x} = 2x+1 &\Longleftrightarrow 17-8x = (2x+1)^2\\ &\Longleftrightarrow 4x^2+12x-16=0\\ &\Longleftrightarrow x^2+3x-4=0\\ &\Longleftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-4\end{aligned}$$

Et puisque $1 \leqslant \frac{17}{8} < 4$, seul 1 est solution dans $[-\frac{1}{2}; \frac{17}{8}]$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{1\}$.

◇◇

1.2.6. Raisonnement par analyse/synthese

Le raisonnement par **analyse-synthèse** est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Il se déroule en deux étapes.

1. **Analyse** : l'idée est de déterminer les «candidats» solutions du problème. Pour cela, on suppose que l'on a trouvé une solution du problème et on trouve des propriétés que doit avoir cet objet, du simple fait qu'il est une solution du problème. Cela revient à déterminer des conditions nécessaires pour qu'un objet soit solution du problème posé.
2. **Synthèse** : Parmi tous les objets qui vérifient les conditions nécessaires précédentes (les «candidats solutions»), on détermine lesquels sont effectivement solutions du problème.

Exercice d'application 1.33. Trouver dans $\mathbf{R}$ toutes les solutions de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$.

↪ Remarquons que les termes de l'équation sont correctement définis pour tout réel x.

1. **Analyse :** soit x un nombre réel. Supposons que x vérifie l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$. Alors, en élevant chaque membre de l'égalité au carré, on obtient
$$x^2+1 = 4x^2+4x+1$$
et donc
$$3x^2+4x=0$$
donc
$$x(3x+4)=0$$
Donc $x=0$ ou $x=-4/3$.
2. **Synthèse :** $\sqrt{0^2+1} = 1$ et $2\times 0+1 = 1$ donc 0 est bien solution du problème.
$\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1}$ est positif et $2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+1 = -\frac{5}{3}$ donc $1/3$ n'est pas solution du problème.

Conclusion : l'unique solution de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$ est 0.

◇◇

Remarque technique 1.34. Très souvent, la phase d'analyse permet de déterminer des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un seul «candidat solution».

Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution si une telle solution existe, et la phase de synthèse permet de montrer soit l'existence d'une solution, soit qu'il n'y a aucune solution.

Exercice d'application 1.35. Montrer que toute fonction réelle f définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction g constante et d'une fonction h vérifiant $h(0)+h(1)=0$.

↪ Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$.

1. **Analyse :** Supposons qu'on ait trouvé une fonction g constante sur $\mathbf{R}$ et une fonction h vérifiant $h(0)+h(1)=0$ telles que $f=g+h$.

   Il existe alors un réel c tel que : $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x)=c$.

   Alors $f(0)+f(1)=g(0)+g(1)+h(0)+h(1)=c+c+0=2c$ donc $c=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ et il n'y a qu'un seul candidat solution pour la fonction g qui est défini par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x)=\frac{f(0)+f(1)}{2}.$$

   Puisque $h=f-g$, le seul candidat solution pour la fonction h est défini par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x)=f(x)-\frac{f(0)+f(1)}{2}.$$

   L'analyse montre donc l'unicité d'une telle décomposition, si celle-ci existe.

2. **Synthèse :**
   - La fonction g définie comme ci-dessus est bien une fonction constante.
   - Considérons la fonction h définie ci-dessus :

$$h(0)+h(1)=f(0)-\frac{f(0)+f(1)}{2}+f(1)-\frac{f(0)+f(1)}{2}=0.$$

   - Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x)+h(x)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}+f(x)-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

     Donc le couple (g,h) de candidats solutions trouvé dans l'analyse est bien une solution du problème posé.

   Conclusion : la fonction f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction g constante et d'une fonction h vérifiant $h(0)+h(1)=0$.

◇◇

1.2.7. Raisonnement par récurrence

Théorème 1.36 - Principe de récurrence.

On introduit pour tout $n \in \mathbf{N}$ une assertion P_n. Si P_0 est vraie et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie.

<u>Rédaction :</u>

- on introduit P_n : « pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : ... » ;
- on vérifie P_0 ;
- on vérifie pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$:

  « Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n soit vraie.
  [...]
  Donc P_{n+1} est vraie. »
- on conclut : « le principe de récurrence permet assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie ».

Exercice d'application 1.37. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geqslant n^2$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $2^n \geqslant n^2$ ». Les propositions P_0, P_1 et P_2 sont vraies, mais P_3 est fausse. Les propositions P_4 et P_5 sont vraies. On conjecture que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 4$. Montrons le par récurrence.

- $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc P_4 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 4$ tel que P_n soit vraie.
  On a $2^{n+1} = 2 \times 2^n$. Or $2^n \geqslant n^2$ d'après P_n, donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. Puisque $\begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)^2 - 2 \end{array}$ est croissante, on en déduit que pour tout $n \geqslant 4$, on a $(n-1)^2 - 2 \geqslant (4-1)^2 - 2 \geqslant 0$. Ainsi $2^{n+1} \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$ et P_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$. On peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel différent de 3.

Exercice d'application 1.38. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 + 3n$ est pair.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $n^2 + 3n$ est pair ».

- $0^2 + 3 \times 0 = 0$ est un nombre pair, donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a
$$(n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 5n + 4 = n^2 + 3n + 2(n+2).$$
  Or $n^2 + 3n$ est pair d'après H_n, donc $(n+1)^2 + 3(n+1)$ s'écrit comme la somme de deux entiers pairs, ce qui entraîne que $(n+1)^2 + 3(n+1)$ est pair et donc que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 + 3n$ est pair.

Théorème 1.39 - Principe de récurrence double.

On introduit une famille d'assertions $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Si P_0 et P_1 sont vraies et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n, P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie.

Rédaction :

- on introduit P_n : « pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : ... » ;
- on vérifie P_0 et P_1 ;
- on vérifie l'implication :
  « Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies.
  [...]
  Donc P_{n+2} est vraie. »
- on conclut : « le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie ».

Exercice d'application 1.40. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $u_n = 2^n - 1$ ».

- $2^0 - 1 = 0$ et $2^1 - 1 = 1$, donc H_0 et H_1 sont vraies.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies.
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 3 - 2^{n+1} + 2 \\ &= 2^{n+1}(3-1) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1, \end{aligned}$$
  donc H_{n+2} est vraie.
- Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice d'application 1.41. Soit $(u_0, u_1) \in \mathbf{N}^2$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n \in \mathbf{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbf{N}$ ».

- Par hypothèse, H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.
  D'après H_n, on a $u_n \in \mathbf{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbf{N}$, donc $u_{n+2} \in \mathbf{N}$ en tant que somme de deux entiers. Par ailleurs, $u_{n+1} \in \mathbf{N}$, donc H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$.

Remarque 1.42. On peut de la même façon imaginer des récurrences, triples, quadruples, etc...

Théorème 1.43 - Principe de récurrence forte.

On introduit une famille d'assertions $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Si P_0 est vraie et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_0, P_1, ..., P_n \Rightarrow P_{n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie.

Démonstration.
On peut démontrer ce résultat par récurrence, en posant comme hypothèse $\mathcal{H}_n$: « $P_0, ..., P_n$ ». En particulier, on peut toujours faire une récurrence simple au lieu d'une récurrence forte. □

Rédaction :

- on introduit P_n : « pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : ... » ;
- on vérifie P_0 ;
- on vérifie l'implication :

  « Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $P_0, ..., P_n$ soient vraies.
  [...]
  Donc P_{n+1} est vraie. »
- on conclut : « le principe de récurrence forte assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie ».

Exercice d'application 1.44. Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

↪ Pour tout $n \geqslant 2$, posons H_n : « n possède un diviseur premier ».

- H_2 est vraie, puisque 2 divise 2.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $H_2, H_3, ..., H_n$ soient vraies.
  Si $n+1$ est premier, alors il possède un diviseur qui est lui-même.
  Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe $q \in \mathbf{N}\backslash\{1, n+1\}$ qui divise $n+1$. Puisque $1 < q < n+1$, il existe, d'après H_q, un nombre premier qui divise q. Ce nombre divise également $n+1$, donc H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence forte permet de conclure : tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

1.3. Conseils de rédaction

1.3.1. Utilisation des symboles logiques

Lors d'un raisonnement, il faut absolument éviter le mélange des genres : on écrit en français ou en mathématique, mais pas les deux à la fois !

Exemple 1.45. Il ne faut pas écrire

$$\forall (m, n) \in \mathbf{Z}^2, \text{ la somme de } m \text{ et } n \text{ est un entier}$$

mais au choix :

1. $\forall (m, n) \in \mathbf{Z}^2,\ m + n \in \mathbf{Z}$.
2. La somme de deux entiers est un entier.

Les seuls mélanges couramment autorisés concernent les symboles $\in$, $=$, $\leqslant$, etc., comme dans « soit $x \in E$ » (qu'on devrait en toute rigueur écrire « soit x un élément de E »).

Quand on rédige un raisonnement, il est important de distinguer clairement les hypothèses, les conclusions et les rapports d'implication entre les différentes propositions (par exemple avec « donc », « alors » , « ainsi », etc.)

Exemple 1.46. S'il faut démontrer : $\forall x \in [0,1],\ \sqrt{1-x^2} \in [0,1]$, on n'écrira certainement pas :

$$\begin{array}{rl} 0 \leqslant x \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 & (t \longmapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbf{R}^+) \\ 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 & (t \longmapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbf{R}^+) \end{array}$$

mais plutôt : soit $x \in [0,1]$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}^+$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, on encore $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$. Mais la fonction racine carrée est aussi croissante, donc $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$. Comme voulu, $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$.

Remarque 1.47. Il faut faire très attention dans l'exemple précédent, la rédaction :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1,$$

ne répond pas du tout à la question. En effet, on rappelle que $\Longrightarrow$ ne signifie pas « donc » : si P et Q sont deux assertions, dire que $P \Longrightarrow Q$ est vraie n'entraîne certainement pas que Q est vraie. Pour pouvoir conclure, il faut aussi s'assurer que P est vraie (et l'écrire explicitement).

1.3.2. Introduction des variables

Lorsqu'on souhaite désigner un objet mathématique (nombres, fonctions...) par une lettre, cette correspondance doit être **explicitement déclarée**. Notons E l'ensemble des élèves de la classe. Si on veut travailler avec un élève, on peut le désigner par x. On écrira :

« Soit x un élève » ou « Soit $x \in E$ »

Exemple 1.48. Dérivation de la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^x$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
Soit x un réel. On a $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$.

◇◇

Remarque technique 1.49. Introduire ses notations avec soin permet souvent de bien commencer un raisonnement. Pour toute question de la forme : « montrer que pour tout $x \in E$, ... », la réponse devra commencer par « soit $x \in E$ ».

Exercice d'application 1.50. Montrer que toute fonction réelle croissante définie sur $\mathbf{R}$ possède une limite en $+\infty$.

↪ On peut commencer par traduire l'énoncé au moyen de quantificateurs : « pour toute fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, si f est croissante, alors $\lim_{+\infty} f$ existe ».
La réponse devra donc commencer par : « Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est croissante. Montrons que $\lim_{+\infty} f$ existe. [...] »

◇◇

◇◇

Remarque technique 1.51. Pour répondre à une question de la forme « montrer qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que... », il suffit de déterminer une valeur $x \in \mathbf{R}$ convenable. La réponse pourra commencer par : « on pose $x = ...$ ».

Exercice d'application 1.52. Montrer que l'assertion suivante est vraie :

$$\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x+y \in \mathbf{Z} \wedge x \notin \mathbf{Z} \wedge y \notin \mathbf{Z}$$

↪ On pose $x = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. On a $x+y \in \mathbf{Z}$, $x \notin \mathbf{Z}$ et $y \notin \mathbf{Z}$.

◇◇

Parfois, lorsqu'une même expression lourde apparaît souvent, il peut être utile d'introduire une variable. Par exemple, si dans un calcul on utilise souvent $\dfrac{\sqrt{n_0}+1}{\ln(n^0+7)}$ (où n_0 a déjà été défini), on peut introduire une variable : « on pose $K = \dfrac{\sqrt{n_0}+1}{\ln(n^0+7)}$ » ou « on note K le réel $\dfrac{\sqrt{n_0}+1}{\ln(n_0+7)}$ ». Il faut toutefois faire attention à ne pas introduire trop de variables inutiles, qui peuvent alourdir inutilement la rédaction.

Exemple 1.53. On veut résoudre l'équation x^2+3x-2 d'inconnue réelle x.

- La rédaction suivante n'est pas acceptable :

  « $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 1\times(-2) = 17$, donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. »

  En effet, a, b, c et Δ n'ont pas été introduites, et il n'est pas écrit à quoi correspondent x_1 et x_2.

- La rédaction suivante est correcte, mais très maladroite :

  « L'équation $x^3+3x-2=0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ peut s'écrire $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=3$ et $c=-2$. Son discriminant Δ vaut alors : $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 1\times(-2) = 17$. Posons $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. L'équation étudiée possède deux racines distinctes x_1 et x_2. »

- La rédaction suivante est la meilleure :

  « L'équation $x^3+3x-2=0$ d'inconnue $x\in\mathbf{R}$ a pour discriminant $3^2-4\times1\times(-2)=17$. Ainsi l'équation étudiée possède deux racines distinctes $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$. »

1.4. Quelques formules fondamentales

1.4.1. Utilisation du symbole somme

Définition 1.54.

Soit I un ensemble non vide. On appelle **famille de nombres complexes indexée par** I une application $a : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ i & \longmapsto & a_i \end{array}$. On la note $(a_i)_{i\in I}$. Pour $i \in I$, on dit que a_i est l'élément d'indice i.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble fini I. Si $I \neq \varnothing$, on note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Si $I=\varnothing$, on convient que $\sum\limits_{i\in I} a_i = 0$.

Exemple 1.55. Notons $I = \{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit\}$. Si $a_\clubsuit = 0$, $a_\blacklozenge = 1$, $a_\heartsuit = 2$ et $a_\spadesuit = 3$, alors $\sum\limits_{i\in I} a_i = a_\clubsuit + a_\blacklozenge + a_\heartsuit + a_\spadesuit = 0+1+2+3 = 6$.

Pour $(m,n)\in\mathbf{N}^2$ avec $m \leqslant n$, si $I = [\![m,n]\!] = \{m, m+1, ..., n\}$, on préfère utiliser la notation $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$.

Exemple 1.56. $\sum\limits_{k=2}^{5}(-1)^k k^2 = (-1)^2\times 2^2 + (-1)^3\times 3^2 + (-1)^4\times 4^2 + (-1)^5\times 5^2 = -14$.

Proposition 1.57.

Soient m et n deux entiers naturels avec $m \leqslant n$. Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. On a :

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \lambda = \lambda(n-m+1)$.
2. **Linéarité de la sommation**. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(a_i+\lambda b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \lambda \sum_{i=m}^{n} b_i$.
3. **Relation de Chasles**. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Démonstration. 1. Il suffit de remarquer qu'il y a $n-m+1$ entiers dans $[\![n,m]\!]$.

2. Une simple récurrence permet de conclure.
3. Une simple récurrence permet de conclure. □

Proposition 1.58 - Sommes télescopiques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0.$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}-u_0.$$

□

Exercice d'application 1.59. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

↪

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice d'application 1.60. Soit $(a,n) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{N}^\star$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$.

↪ On remarque que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{a+k+1-(a+k)}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{1}{a+k} - \frac{1}{a+k+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a+k} - \frac{1}{a+k+1}\right) = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n}.$$

1. Michel CHASLES - mathématicien français (1793-1880)

Proposition 1.61 - Ré-indiciation.

Soit n, m et n_0 trois nombres entiers. Soit $(a_i)_{i\in[\![n,m]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{j=n+n_0}^{m+n_0} a_{j-n_0}.$$

Remarque 1.62. Il est inutile d'apprendre la formule précédente, mais il faut savoir la retrouver. On a posé $j = i + n_0$, donc on a formellement remplacer tous les « i » par « $j - n_0$ ». Par ailleurs, dans la somme de gauche $n \leqslant i \leqslant m$ donc $n + n_0 \leqslant j \leqslant m + n_0$ et l'on retrouve les indices de début et de fin de la somme de droite.

Remarque technique 1.63. Les ré-indiciations permettent de rédiger plus soigneusement les simplifications de sommes télescopiques (sans points de suspension)

Exercice d'application 1.64. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

$\hookrightarrow$
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} && \text{on a posé dans la deuxième somme } j = k+1 \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$. Si $I = [\![0,n]\!] \times [\![0,p]\!]$, alors, pour toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ de nombres complexes, on note :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I} a_{i,j}.$$

Proposition 1.65.

Soit n et p deux entiers strictement positifs et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres réels ou complexes. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) && \text{découpage sur les lignes} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right) && \text{découpage sur les colonnes}
\end{aligned}$$

Exercice d'application 1.66. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$. On admettra que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

↪

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni+\sum_{j=1}^{n}j\right)\\ &= n\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)+n\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)\\ &= 2n\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\\ &= 2n\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $(n,p)\in(\mathbf{N}^\star)^2$, $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\mathbf{C}^n$ et $(b_j)_{j\in[\![1,p]\!]}\in\mathbf{C}^p$, on a :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{p}b_j\Big) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}a_ib_j.$$

Soit $E=\{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$, $E'=\{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in E}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note

$$\sum_{(i,j)\in E}a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{(i,j)\in E'}a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{i,j}$$

Proposition 1.67.

Soit n un entier strictement positif et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres réels ou complexes. On a

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=i+1}^{n}a_{i,j}\Big) \quad \text{découpage sur les lignes}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{j}a_{i,j}\Big) \qquad = \sum_{j=2}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{j-1}a_{i,j}\Big) \quad \text{découpage sur les colonnes}$$

Exercice d'application 1.68. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, simplifier $S=\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$.

↪

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=2}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{j-1} (j-i) \Big) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \Big(j(j-1) - \sum_{i=1}^{j-1} i \Big) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \Big(j(j-1) - \frac{j(j-1)}{2} \Big) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \Big(\frac{j^2 - j}{2} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} j \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{2n-2}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

1.4.2. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique

Proposition 1.69 - Somme des premiers entiers.

Soit $(n, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.
On peut le démontrer par récurrence. Nous préférons ici une approche utilisant une astuce attribuée à Gauss (alors âgé de 10 ans). Notons S_n la somme recherchée. On a :

$$S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} (k+n-k) = n(n+1),$$

donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Corollaire 1.70.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1) \frac{u_m + u_n}{2}.$$

Démonstration.
Soit $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, avec $m \leqslant n$. Pour tout $k \in [\![m,n]\!]$, $u_k = u_m + (k-m)r$, donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= (n-m+1)u_m + r\sum_{k=m}^{n}(k-m)\\ &= (n-m+1)u_m + r\sum_{k=0}^{n-m} k\\ &= (n-m+1)u_m + r\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\\ &= \frac{n-m+1}{2}(u_m + u_m + (n-m)r)\\ &= \frac{n-m+1}{2}(u_m+u_n).\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 1.71. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

↪ La somme recherchée s'écrit : $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + n = n(n-1)+n = n^2$.

Exercice d'application 1.72. Calculer $\sum_{k=0}^{101} \frac{2k-1}{7}$.

↪

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{101}\frac{2k-1}{7} &= \frac{2\left(\sum_{k=0}^{101}k\right)-\left(\sum_{k=0}^{101}1\right)}{7}.\\ &= \frac{2\left(\sum_{k=0}^{101}k\right)}{7} - \frac{102}{7}\\ &= \frac{2\left(\frac{100\times 101}{2}\right)}{7} - \frac{102}{7}\\ &= \frac{10100}{7} - \frac{102}{7}\\ &= \frac{9998}{7}\end{aligned}$$

Proposition 1.73.

Soit $(n,q) \in \mathbf{N}\times\mathbf{C}$. On a :

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1\\ = n+1 & \text{si } q = 1\end{cases}$$

Démonstration.
Si $q = 1$, le résultat est évident.
Supposons $q \neq 1$. Notons S_n la somme recherchée. On a :

$$qS_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = S_n - 1 + q^{n+1},$$

d'où $S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. □

Corollaire 1.74.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

Démonstration.
Soit $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ avec $m \leqslant n$. On a :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=0}^{n-m} q^k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

□

Exercice d'application 1.75. Soit $(x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}$.

$\hookrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^x)^k.$
Si $x = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = n+1.$
Si $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^x}.$

1.4.3. Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 1.76.

Soit $(a,b,n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$. On a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p} &= \sum_{p=0}^{n-1} a^{p+1} b^{n-1-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p} \\ &= \sum_{p=1}^{n} a^p b^{n-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p} \\ &= a^n b^0 - a^0 b^{n+0}\end{aligned}$$

□

Exemple 1.77. Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$.

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$;
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Exercice d'application 1.78. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la limite en 1 de $f : x \longmapsto \dfrac{x^n-1}{x-1}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k},$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f(x) = n$.

1.4.4. Formule du binôme de Newton

Définition 1.79.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle **factorielle** n et on note $n!$ le nombre

$$\begin{cases} n! &= 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n & \text{si } n \geqslant 1 \\ &= 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.80. $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Proposition 1.81.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)! = (n+1)n!$$

Le nombre $n!$ a une signification combinatoire : c'est l'ensemble des *permutations* ou des *bijections* sur un ensemble à n éléments (nous verrons plus tard en détail ce que cela signifie précisément). C'est donc notamment le nombre de façon d'« ordonner » n objets.

Exemple 1.82. Considérons l'ensemble $\{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit\}$. Les façons de ranger les éléments de cet ensemble sont : $(\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit)$, $(\clubsuit, \heartsuit, \blacklozenge)$, $(\blacklozenge, \clubsuit, \heartsuit)$, $(\blacklozenge, \heartsuit, \clubsuit)$, $(\heartsuit, \blacklozenge, \clubsuit)$ et $(\heartsuit, \clubsuit, \blacklozenge)$. Il y a donc bien $3! = 6$ façons de ranger ces trois éléments.

Définition 1.83.

Soit $(n, p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. Le **coefficient binomial** « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$, est défini par :

$$\begin{cases} \binom{n}{p} &= \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!] \\ &= 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le nombre $\binom{n}{p}$ a une aussi une signification combinatoire : c'est le nombres de façon de choisir p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple 1.84. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

Soit $(n, p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. Pour calculer « à la main » des coefficient binomiaux lorsque p n'est pas trop grand, on peut simplifier :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}.$$

Exemple 1.85. $\binom{21}{2} = \dfrac{21 \times 20}{2} = 210$.

Proposition 1.86 - Symétrie.

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration.
Si $p \notin [\![0,n]\!]$, alors l'égalité de la proposition s'écrit $0=0$.
Supposons $p \in [\![0,n]\!]$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$

Finalement, pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. □

Proposition 1.87 - Formule du capitaine.

Soit $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration.
Si $p=n$, l'égalité de la proposition s'écrit $1 = 1 \times 1$.
Si $p \notin [\![0,n]\!]$, l'égalité s'écrit $0 = \frac{n}{p} \times 0$.
Supposons $p \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Finalement, pour tout $(n,p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$. □

Remarque 1.88. Nous expliquerons un peu plus tard dans l'année pourquoi cette formule porte parfois le nom de « formule du capitaine ».

Proposition 1.89 - Formule de Pascal.

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

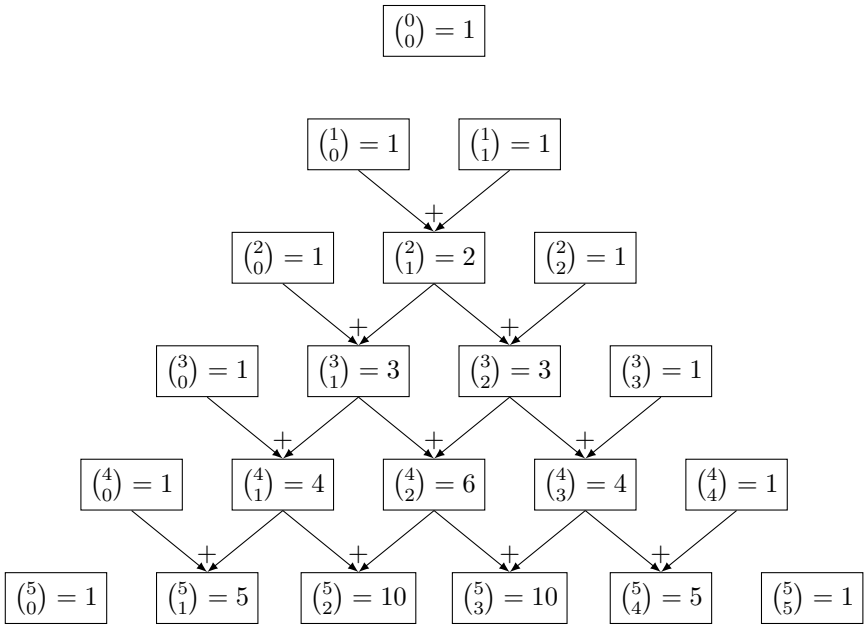
Démonstration.
Si $p=n$, l'égalité de la proposition s'écrit $1+0=1$.
Si $p \notin [\![0,n]\!]$, l'égalité de la proposition s'écrit $0+0=0$.
Supposons $p \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Finalement, pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. □

1. Blaise PASCAL - mathématicien, physicien, philosophe français (1623-1662)

La formule de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de « proches en proches », à l'aide du triangle de Pascal :



Par exemple, on lit sur le triangle que $\binom{5}{3}$ est égal à 10.

Corollaire 1.90.

Un coefficient binomial est un nombre entier naturel.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel ».

- $\binom{0}{0} = 1$, donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.
  Soit $p \in [\![1, n+1]\!]$. On a, avec la formule de Pascal, $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$. Or, d'après H_n, $\binom{n}{p} \in \mathbf{N}$ et $\binom{n}{p-1} \in \mathbf{N}$, donc $\binom{n+1}{p} \in \mathbf{N}$ en tant que somme de deux entiers naturels.
  Par ailleurs, $\binom{n+1}{0} = 1$ est un entier naturel. Ainsi H_{n+1} est vérifiée.
- Le principe de récurrence permet de conclure : un coefficient binomial est un nombre entier naturel. □

Proposition 1.91 - Formule du binôme de Newton.

Soit $(a, b, n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ ».

1. Isaac NEWTON - mathématicien et physicien anglais (1703-1727)

- On a : $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

  Ainsi H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $(n,a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. □

Exemple 1.92. Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Exemple 1.93. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (*voir exercices*)

Exercice d'application 1.94. Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

↪ Soit $k \in [\![1,n]\!]$. La Proposition 1.87 assure que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets.

Henri Poincaré [1]

2.1. Parties de $\mathbf{R}$

2.1.1. Inégalités dans $\mathbf{R}$

Définition 2.1.

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. On dit que a est **inférieur à** b, et on note $a \leqslant b$, si et seulement si $b-a \in \mathbf{R}_+$.

Remarque technique 2.2. Pour établir des inégalités ou résoudre des inéquations, on se ramène donc souvent à une étude de signe.

Exercice d'application 2.3. Résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant x$ d'inconnue réelle x.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x^2 \leqslant x \Longleftrightarrow x(x-1) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \leqslant & 0 \\ x & \geqslant & 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & \geqslant & 0 \\ x & \leqslant & 1 \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[0,1]$.

On admet les propositions suivantes.

1. Henri POINCARÉ - mathématicien français (1854-1912) ; ses travaux sont considérables, et il a même donné son nom à un lycée dans le coin ☺

Proposition 2.4 - $\leqslant$ est une relation d'ordre totale.

La relation $\leqslant$ satisfait les propriétés suivantes.

- **Réflexivité**. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x \leqslant x$.
- **Antisymétrie**. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$.
- **Transitivité**. $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$.

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.

Proposition 2.5 - Somme d'inégalités.

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbf{R}^2, \quad (x \leqslant y \wedge x' \leqslant y') \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'.$$

Proposition 2.6 - Produit d'inégalité à membres positifs.

$$\forall (x, y, z, t) \in (\mathbf{R}_+)^4, \quad (x \leqslant y \wedge z \leqslant t) \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot t.$$

Proposition 2.7 - Multiplication par un réel dans une inégalité.

$$\forall (a, x, y) \in \mathbf{R}^3, \quad x \leqslant y \Longrightarrow \begin{cases} ax \leqslant ay & \text{si } a \in \mathbf{R}_+ \\ ax \geqslant ay & \text{si } a \in \mathbf{R}_- \end{cases}.$$

2.1.2. Intervalles de réels

Définition 2.8.

On dit qu'une partie I de $\mathbf{R}$ est un **intervalle** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$, on a :

$$\{z \in \mathbf{R}, \quad x < z < y\} \subset I.$$

On peut aussi écrire la Définition 2.8 d'une autre façon :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in I^2 \Longrightarrow [\forall z \in \mathbf{R}, \quad x < y < y \Longrightarrow I].$$

Il existe dix formes d'intervalles. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a \leqslant b$:

L'intervalle noté...	**... est l'ensemble des réels x tels que...**	**Il est représenté sur une droite graduée par :**	**Intervalle...**
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$		fermé
$]a;b[$	$a < x < b$		ouvert
$[a;b[$	$a \leqslant x < b$		semi-ouvert
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$		semi-ouvert
$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$		fermé
$]a;+\infty[$	$a < x$		ouvert
$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$		fermé
$]-\infty;b[$	$x < b$		fermé
$\varnothing$	Aucun réel		ouvert et fermé
$\mathbf{R} =]-\infty;+\infty[$	Tous les réels		ouvert et fermé

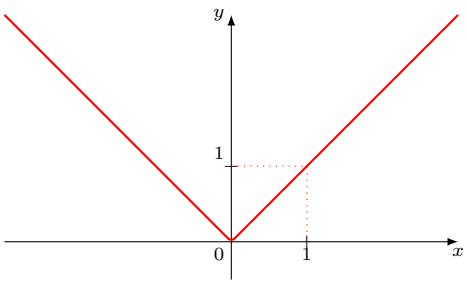
Exemple 2.9.
- $[0,1[\cup]1,3]$ n'est pas un intervalle ;
- les ensembles d'entiers $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, l'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$ ne sont pas des intervalles.

2.1.3. Valeur absolue d'un réel

Définition 2.10.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **valeur absolue** de x, et on note $|x|$, le réel $\max\{-x, x\}$.

Graphe de la fonction valeur absolue (définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto |x|$)



Proposition 2.11.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

Démonstration.
On rappelle que la racine carrée d'un nombre $a \in \mathbf{R}_+$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Par définition de la racine carrée, on a $(\sqrt{x^2})^2 = x^2$, puis

$$\left(\sqrt{x^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2} + x\right) = 0$$

Ainsi $\sqrt{x^2} \in \{-x, x\}$. Sachant que $\sqrt{x^2}$ est un nombre positif, on conclut que $\sqrt{x^2} = \max\{-x, x\} = |x|$. □

Exemple 2.12. $\sqrt{3^2} = |3| = 3$ et $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Proposition 2.13.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| \geqslant 0$;
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = |-x|$;
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0$;
4. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
5. $\forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\star, \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x \geqslant 0$, alors $-x \leqslant 0$, donc $x \geqslant -x$, puis $\max\{-x, x\} = x$. Ainsi $|x| \geqslant 0$.
   Si $x \leqslant 0$, $-x \geqslant 0$, donc $-x \geqslant x$, puis $\max\{-x, x\} = -x$, donc $|x| \geqslant 0$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. $|x| = \max\{-x, x\} = \max\{(-x), -(-x)\} = |-x|$.
3. On remarque que $|0| = 0$.
   Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| = 0$. On a $\max\{x, -x\} = 0$, donc $x \leqslant 0$ et $-x \leqslant 0$, ce qui entraîne $x = 0$.
4. On peut distinguer quatre cas.
   (a) Si $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, alors $|xy| = xy$, $|x| = x$ et $|y| = y$.
   (b) Si $(x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-$, alors $|xy| = -xy$, $|x| = x$ et $|y| = -y$.
   (c) Les autre cas sont similaires.
5. La preuve est similaire à celle du point précédent. □

Proposition 2.14 - Inégalités triangulaires.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

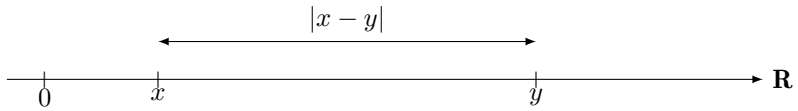
Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- $\begin{cases} x & \leqslant & \max\{-x, x\} \\ y & \leqslant & \max\{-y, y\} \end{cases}$, donc $x + y \leqslant |x| + |y|$.
  $\begin{cases} -x & \leqslant & \max\{-x, x\} \\ -y & \leqslant & \max\{-y, y\} \end{cases}$, donc $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$.
  Finalement, $\max\{(x + y), -(x + y)\} \leqslant |x| + |y|$, *i.e.* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
- Puisque $(x + y, -x) \in \mathbf{R}^2$, on obtient avec le point précédent $|y| \leqslant |x + y| + |-x|$, puis $|y| - |x| \leqslant |x + y|$.
  De même, puisque $(x + y, -y) \in \mathbf{R}^2$, $|x| - |y| \leqslant |x + y|$.
  Finalement, $||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

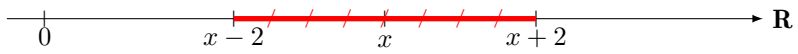
Définition 2.15.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On appelle **distance** entre x et y le nombre $|x - y|$.

On peut interpréter géométrique la distance entre x et y en représentant la droite des réels :



Sur la droite ci-dessous, où $x \in \mathbf{R}$, on a coloré l'ensemble $\{y \in \mathbf{R},\ |x - y| \leqslant 2\}$, qui est aussi égal à l'ensemble $\{y \in \mathbf{R},\ x - 2 \leqslant y \leqslant x + 2\}$.



2.1.4. Parties bornées de R

Définition 2.16.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$.

- Un nombre M est un **majorant** de A si tout élément de A est inférieur à M, *i.e.*

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M.$$

- Un nombre m est un **minorant** de A si tout élément de A est supérieur à m, *i.e.*

$$\forall x \in A, \quad x \geqslant m.$$

On dit que A est **majorée** (resp. **minorée**) si elle admet un majorant (resp. minorant).
On dit que A est **bornée** si et elle majorée et minorée.

Exemple 2.17. Considérons l'intervalle $A = [0, 1[$. Le nombre 1 est un majorant de A, ainsi que le nombre 3. Le nombre 0 est un minorant de A, ainsi que le nombre -3.

Exercice d'application 2.18. Montrer que l'intervalle $B = [1, +\infty[$ n'est pas majoré.

$\hookrightarrow$ Dire que B est majoré s'écrit :

$$\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in B, \quad x \leqslant M.$$

Montrons la négation de cette assertion, qui s'écrit :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists x \in B, \quad x > M.$$

Soit $M \in \mathbf{R}$. Si $M < 1$, le résultat est immédiat puisque $1 \in B$.
Si $M \geqslant 1$, alors $M + 1 > M$ et $M + 1 \in B$.

Proposition 2.19.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$. A est bornée si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbf{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad |x| \leqslant \mu.$$

Démonstration.
- Supposons qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant \mu$. Soit $x \in A$. Alors $-\mu \leqslant x \leqslant \mu$. Finalement A est bornée.
- Supposons A bornée. Alors il existe $(m, M) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in A$, $m \leqslant x \leqslant M$. On a $x \geqslant m$, donc $-x \leqslant -m$. En particulier, $|x| = \max(-x, x) \leqslant \max(M, -m)$. Donc $\mu = \max(M, -m)$ répond à la question. □

Définition 2.20.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$.
On dit qu'un nombre réel M est le **maximum** de A si M est un majorant et si $M \in A$.
On dit qu'un nombre réel m est le **minimum** de A si m est un minorant et si $M \in A$.

Démonstration (Unicité des extrema).
Soient M et M' deux maxima de A. Puisque $M' \in A$ et M est un majorant de A, $M' \leqslant M$. Puisque $M \in A$ et M' est un majorant de A, $M \leqslant M'$. Donc $M = M'$.
On peut montrer de manière similaire qu'il y a au plus un minimum de A. □

Exemple 2.21. 0 est le minimum de $\mathbf{N}$.

Exercice d'application 2.22. Démontrer que $[0\,;1[$ n'admet pas de maximum.

↪ Supposons que $[0\,;1[$ admet un maximum, qu'on note M. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$ puis, par passage à la limite, $1 \leqslant M$, ce qui contredit $M \in [0, 1[$. Finalement $[0, 1[$ n'admet pas de maximum.

Remarque technique 2.23. Pour montrer qu'un élément donné est un maximum (resp. minimum) d'un ensemble, on montre qu'il est un majorant (resp. minorant) puis qu'il est un élément de cet ensemble.

Exercice d'application 2.24. On considère la partie $A = \left\{ \dfrac{mn}{(m+n)^2} \;:\; (m, n) \in (\mathbf{N}^\star)^2 \right\}$ de $\mathbf{R}$.

1. A est minorée mais n'admet pas de minium.
2. Montrer que le maximum de A est $1/4$.

↪

1. Soit $(m, n) \in (\mathbf{N}^\star)^2$. Puisque $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, on a $\dfrac{mn}{(m+n)^2} \geqslant 0$, donc A est minorée par 0. On suppose qu'il existe un minimum a de A. On a en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $a \leqslant \dfrac{n}{(1+n)^2}$ puis, par passage à la limite, $a \leqslant 0$. Or 0 minore A, donc $a \geqslant 0$, puis $a = 0$. On en déduit $mn = 0$, ce qui est absurde. Donc A n'a pas de minium.
2. Soit $(m, n) \in (\mathbf{N}^\star)^2$.
$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2},$$
donc $\dfrac{mn}{(m+n)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$, ce qui signifie que $\dfrac{1}{4}$ est un majorant de A.
Par ailleurs, $\dfrac{1^2}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$, donc $\dfrac{1}{4} \in A$.
Finalement $\dfrac{1}{4}$ est le maximum de A.

2.2. Fonctions numériques d'une variables réelle

2.2.1. Généralités

Définition 2.25.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **fonction** de E dans F tout triplet (E, F, Γ), où Γ est une partie de $E \times F$ telle que, pour tout élément x de E, il existe au plus un élément y de F vérifiant $(x, y) \in \Gamma$.

Soient E et F deux ensembles et $f = (E, F, \Gamma)$ une fonction de E dans F. Lorsque $(x, y) \in \Gamma$, on écrit $y = f(x)$; cette écriture est légitime puisque, pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$. La partie Γ de $E \times F$ est appelée **graphe** de f. L'ensemble E (resp. F) est appelé **ensemble de départ** (resp. **ensemble d'arrivée**) de f. On appelle **ensemble de définition** de f l'ensemble des éléments x de E tel qu'il existe $y \in F$ vérifiant $y = f(x)$. Dans une telle situation, x est appelé **antécédent** de y et y est appelé **image** de x par la fonction f.

Par définition même, un élément x de E possède au plus une image par f (il en possède une si et seulement s'il est dans l'ensemble de définition de f) alors qu'un élément $y \in F$ peut avoir un nombre quelconque d'antécédents par f, voire aucun.

Si E est l'ensemble de définition de f, on utilise le diagramme $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ pour désigner f.

Exemple 2.26. Pour tout ensemble E, on appellera fonction identité de E et on notera usuellement Id_E la fonction : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$.

◇◇

Remarque technique 2.27. Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée et même expression ; ce dernier point signifie que pour tout élément x de leur ensemble de départ commun, $f(x) = g(x)$.
Ainsi deux fonctions f et g sont distinctes si elles n'ont pas le même ensemble de départ ou elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée ou, si les deux premiers points sont faux, il existe un élément x de leur ensemble de départ commun tel que $f(x) \neq g(x)$.

◇◇

Définition 2.28.

On appelle **fonction numérique (ou réelle) d'une variable réelle** toute fonction dont le domaine de définition et le domaine d'arrivée sont des parties de $\mathbf{R}$.
Pour toutes parties E et F de $\mathbf{R}$, on note F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions définies sur E et à valeurs dans F. On pourra noter $f : E \longrightarrow F$ un élément f de F^E.

Dans toute la suite, E et F désignent des parties non vides de $\mathbf{R}$.

Définition 2.29.

Soit $(f, g) \in (\mathbf{R}^E)^2$.

- La **somme** de f est g est la fonction définie par $f + g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array}$.
- Le **produit** de f est g est la fonction définie par $fg : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$.

Il faut être très vigilant lorsqu'on manipule un produit de fonctions. Toute situation conduisant à l'équation $fg = 0$, où f et g sont deux fonctions réelles d'une variable réelle, est délicate.

Exemple 2.30. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ tel que $f^2 = g^2$. Il ne faut pas croire que $f = g$ ou $f = -g$ (conclusion qui serait par exemple valable si f et g étaient des nombres réels). En effet, comme $f^2 = g^2$, on sait que $f^2 - g^2 = 0$, *i.e.* $(f - g)(f + g) = 0$. Arrivé à ce point, on ne peut plus rien dire. Par exemple, les fonction $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto |x|$ vérifient $f^2 = g^2$, mais on n'a pas la relation $f = g$ ou $f = -g$.

Définition 2.31.

Soient E, F et G trois sous-ensembles de $\mathbf{R}$, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On appelle **fonction composée** de f par g, on note note $g \circ f$, la fonction $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$

Exemple 2.32. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$. On a $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.

Soit $(f, g) \in (E^E)^2$. On n'a pas en général la relation $f \circ g = g \circ f$.

Exemple 2.33. Notons $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. Alors $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array}$. Ces composées sont distinctes puisque $f \circ g(1) \neq g \circ f(1)$.

2.2.2. Courbe représentative d'une fonction

Définition 2.34.

Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle à valeurs réelles. On rappelle que le graphe de f est la partie de $\mathbf{R}^2$:

$$\mathscr{C}_f = \{(x, f(x)), \quad x \in E\}.$$

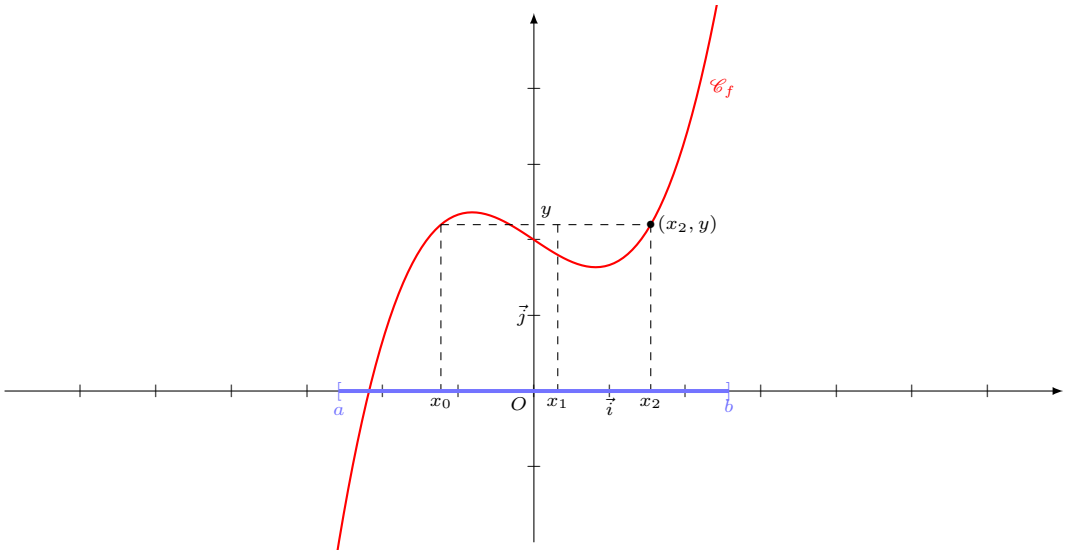
Cet ensemble peut aussi s'écrire :

$$\mathscr{C}_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \in E \wedge y = f(x)\}.$$

La représentation de $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est appelée **courbe représentative** de la fonction.

Dans la suite, on confondra graphe et courbe représentative.

Exemple 2.35. On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$. Les antécédents x_0, x_1 et x_2 d'une valeur de y apparaissent également.



Proposition 2.36.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dont on note $\mathscr{C}_f$ la courbe dans un repère orthonormé. Soit $a \in \mathbf{R}$.

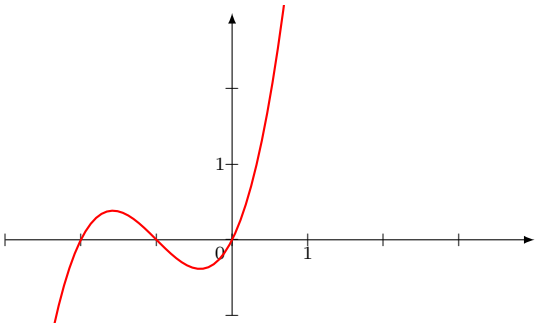
1. Le graphe de $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $a\vec{j}$.
2. Le graphe de $x \longmapsto f(x + a)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
3. Le graphe de $x \longmapsto f(a - x)$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $x = a/2$.
4. Le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par l'affinité orthogonale d'axe (Oy) et de rapport $1/a$ (ce qui signifie que les coordonnées des points du graphe de $x \longmapsto f(ax)$ sont les images par $(x, y) \longmapsto (x/a, y)$ des coordonnées des points de $\mathscr{C}_f$; autrement, c'est l'application qui à tout point $M(x, y)$ du plan associe le point $M'(\frac{x}{a}, y)$).
5. Le graphe de $x \longmapsto af(x)$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport a (ce qui signifie que les coordonnées des points du graphe de $x \longmapsto f(ax)$ sont les images par $(x, y) \longmapsto (x, ay)$ des coordonnées des points de $\mathscr{C}_f$).

Démonstration.
On en démontre que la point n°2. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). Notons $\tilde{f} : x \longmapsto f(x + a)$ et $\mathscr{C}_{\tilde{f}}$ la courbe représentative de cette fonction dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

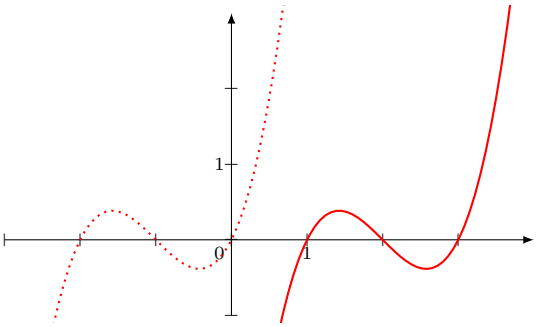
$$\begin{array}{lll} M \in \mathscr{C}_f & ssi & y = f(x) \\ & ssi & y = f(x + a - a) \\ & ssi & y = \tilde{f}(x - a) \\ & ssi & \text{le point de coordonnées } (x - a, y) \text{ appartient à } \mathscr{C}_{\tilde{f}} \\ & ssi & M - a\vec{i} \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}. \end{array}$$

□

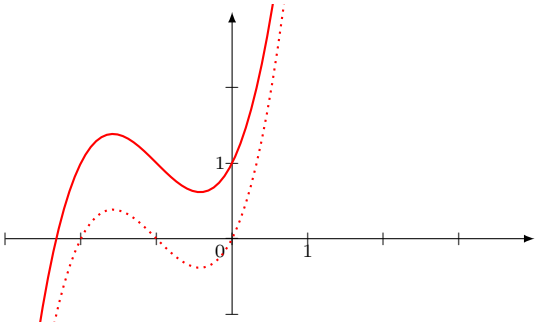
Graphe de $f : x \longmapsto x(x+1)(x+2)$



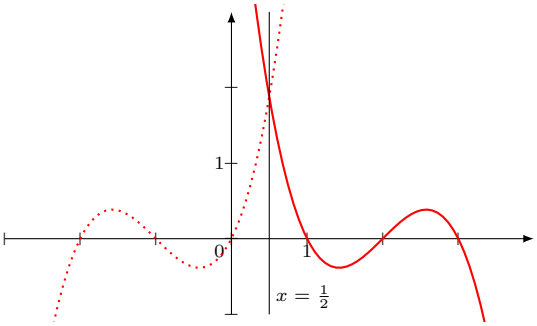
Graphe de $f : x \longmapsto f(x-3)$



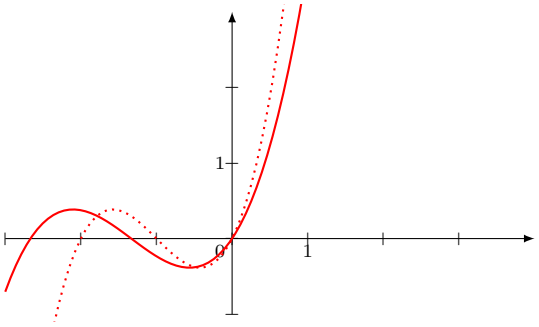
Graphe de $f : x \longmapsto f(x)+1$



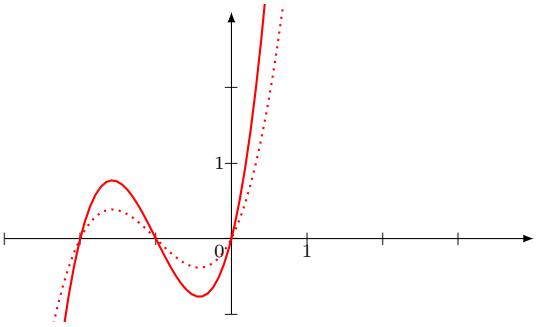
Graphe de $f : x \longmapsto f(1-x)$



Graphe de $f : x \longmapsto f(3x/4)$



Graphe de $f : x \longmapsto 2f(x)$



2.2.3. Parité et périodicité

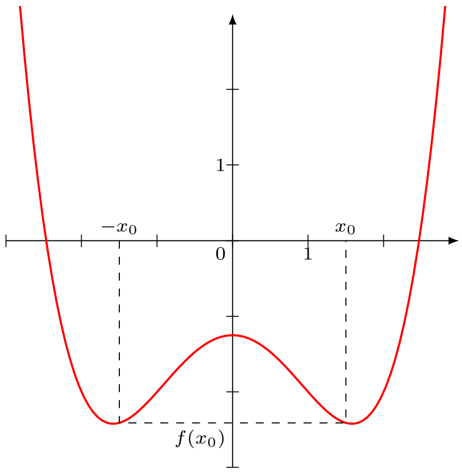
Définition 2.37.

Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite :

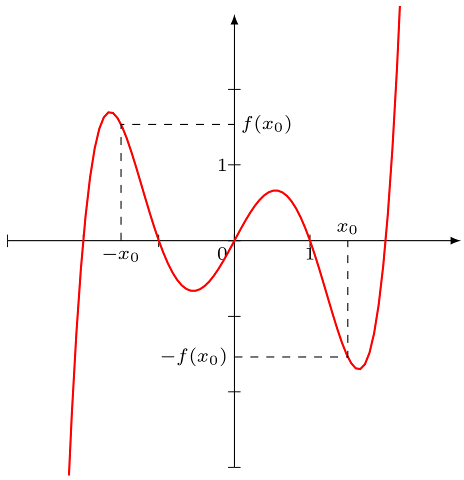
- **paire** si pour tout élément x de E, $-x$ est également dans E et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout élément x de E, $-x$ est également dans E et $f(-x) = -f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celui d'une fonction impaire est invariant par la symétrie de centre O.

Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire



Exemple 2.38. La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3 - \cos(x)$ est paire.

◇◇

Remarque technique 2.39.

Soit, pour $a > 0$, une fonction impaire $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbf{R}$. Alors $f(0) = 0$ (en effet, $f(-0) = -f(0)$, d'où $2f(0) = 0$ puis $f(0) = 0$). Cette propriété peut être utile pour démontrer rapidement qu'une fonction n'est pas impaire.

Exercice d'application 2.40. Etudier la parité et l'imparité de $f : x \longmapsto x^2 + x + 1$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $f(-x) - f(x) = (-x)^2 - x + 1 - (x^2 + x + 1) = -2x$, donc f n'est pas paire. De plus, $f(0) = 1$ donc f n'est pas impaire.

◇◇

⚠ **Attention** ⚠**.** Dire qu'une fonction est paire (resp. impaire) n'entraîne pas qu'elle n'est pas impaire (resp. paire). En effet, la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Les propriétés de symétrie précédentes permettent de réduire le domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire à $\mathbf{R}_+$.

On a plus généralement le résultat suivant.

◇◇

Remarque technique 2.41. S'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $2a - x$ soit dans E et $f(2a - x) = f(x)$, alors le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$. De même, s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(2a - x) = -f(x)$, alors le graphe de f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(a, 0)$.

Exercice d'application 2.42. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{t+1}{t-4}\right) \end{array}$. Pour tout réel t où cela a un sens, calculer $f(3 - t)$. Préciser alors un domaine d'étude possible pour la fonction f.

$\hookrightarrow$ La fonction f est définie sur $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$. Pour tout réel t de cette union d'intervalles, on remarque que $f(3 - t) = -f(t)$. Il s'ensuit que le graphe de f, tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, présente un centre de symétrie au point de coordonnées $(3/2, 0)$. On se propose donc d'étudier la restriction de la fonction f sur $]4, +\infty[$.

◇◇

Définition 2.43.

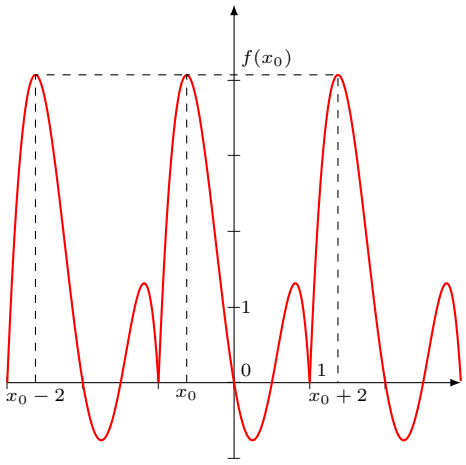
Soit $T \in \mathbf{R}_+^\star$. Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **T-périodique** si pour tout élément x de E, $x+T$ est également dans E et $f(x+T) = f(x)$. Le cas échéant, T est appelé une période de f.
Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **périodique** s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que f est T-périodique.

Exemple 2.44.
- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques. La fonction tan est π-périodique.
- La fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto \sin(2x)$ est π-périodique.

On peut montrer qu'une fonction non constante, périodique et continue admet une plus petite période strictement positive. Ce point est évidemment faux pour les fonctions constantes. On peut aussi trouver des contre-exemples parmi les fonctions non continues. Ainsi, l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui associe 0 à chaque irrationnel et 1 à chaque rationnel est périodique de période n'importe quel élément de $\mathbf{Q}^\star$.

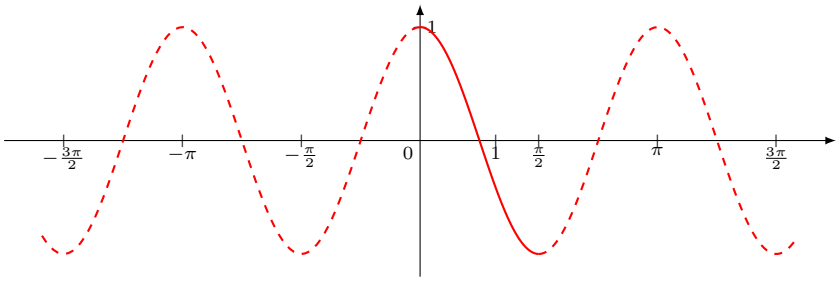
Si f est une fonction périodique de période $T \in \mathbf{R}_+^\star$, son graphe, tracé dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est invariant par les translations de vecteurs de l'ensemble $\{kT\vec{i},\ k \in \mathbf{Z}\}$. Cette propriété géométrique permet de réduire l'étude des fonctions T-périodiques définies sur E à l'ensemble $[0, T[\cap E$.

Graphe d'une fonction 2-périodique



Exercice d'application 2.45. Déterminer un domaine d'étude possible de $f : x \longmapsto \cos(2x)$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$ donc f est *pi*-périodique. Ainsi on peut se contenter d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$, donc f est paire. Ainsi, on peut se contenter d'étudier f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.



Exercice d'application 2.46. Déterminer un domaine d'étude possible de l'inéquation $\sin(2x - \pi/4) \geqslant \cos(4x)$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ La fonction $f : x \longmapsto \sin(2x - \pi/4) - \cos(4x)$ est définie sur $\mathbf{R}$, π-périodique et vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(\pi/4 - x) = -f(x)$. Son graphe, tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc invariant par la translation de vecteur $\pi\vec{i}$ et présente un centre de symétrie au point de coordonnées $(\pi/4, 0)$. On peut donc se limiter à l'étude de l'équation sur $[\pi/4, 3\pi/4]$.

2.2.4. Monotonie

Définition 2.47.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur E.

- f est **croissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \leqslant y$, $f(x) \leqslant f(y)$;
- f est **décroissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \leqslant y$, $f(x) \geqslant f(y)$;
- f est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$, $f(x) < f(y)$;
- f est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$, $f(x) > f(y)$.

Une fonction f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si et seulement si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exercice d'application 2.48. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer les variations sur $\mathbf{R}_+$ puis sur $\mathbf{R}_-$ de la fonction $f : x \longmapsto x^n$ définie sur $\mathbf{R}$.

↪ Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \leqslant y$.

$$f(x) - f(y) = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k+1}.$$

- Si $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, on déduit de l'égalité précédente que $f(x) \leqslant f(y)$. Ainsi la restriction de la fonction f à $\mathbf{R}_+$ est croissante.
- Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_-)^2$.
  Si n est pair, alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n - k + 1$ et k sont de parités différentes, donc $x^k y^{n-k+1} \leqslant 0$. Ainsi $f(x) \geqslant f(y)$. On en déduit que la restriction de f à $\mathbf{R}_-$ est décroissante.
  Si n est impair, alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n - k + 1$ et k sont de même parité, donc $x^k y^{n-k+1} \geqslant 0$. Ainsi $f(x) \leqslant f(y)$. On en déduit que la restriction de f à $\mathbf{R}_-$ est croissante.

En contraposant l'assertion qui traduit la stricte croissance (resp. décroissance), on obtient un résultat intéressant.

Proposition 2.49.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$. Si f est strictement croissante, alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y).$$

De plus, si f est strictement décroissante, alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \geqslant y).$$

Démonstration.
Supposons f strictement croissante. Soit $(x, y) \in E^2$. Par définition,

$$(x > y) \Longrightarrow (f(x) > f(y)).$$

En contraposant, on obtient que si $f(x) \leqslant f(y)$, alors $x \leqslant y$.
Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) \leqslant f(y)$ et supposons f strictement décroissante. Alors $-f$ est strictement croissante et $-f(x) \geqslant -f(y)$ donc, avec le premier point de la preuve, $x \geqslant y$. □

⚠ **Attention ⚠.** Le résultat de la proposition précédente n'est plus vrai si f sans la stricte croissance (resp. décroissance). Considérons par exemple $f : x \longmapsto 1$. On a $f(2) \leqslant f(1)$ et pourtant $2 > 1$.

Proposition 2.50.

La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est une fonction croissante (resp. décroissante).
Le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) positives (*i.e.* à valeurs dans $\mathbf{R}_+$) est une fonction croissante (resp. décroissante).

Démonstration.
Soit $(f, g) \in (\mathbf{R}^E)^2$.

- On suppose que f et g sont croissantes. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leqslant y$. Alors :
$$(f+g)(x) - (f+g)(y) = f(x) - f(y) + g(x) - g(y).$$
Ce nombre est négatif en tant que somme de nombres négatifs, donc $f+g$ est croissante.
- On montre de manière similaire que la somme de fonctions décroissantes est décroissante.
- On suppose que f et g sont croissantes et positives. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leqslant y$. On a $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. Puisque tous les nombres considérés sont positifs, on en déduit que $f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$, *i.e.* $(fg)(x) \leqslant (fg)(y)$. Ainsi f est croissante.
- On montre de manière similaire que le produit de fonctions décroissantes positives est décroissant.

□

En général, le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) n'est pas croissant : considérer par exemple le produit de $x \longmapsto x$ (resp. $x \longmapsto -x$) avec elle-même.

Proposition 2.51.

Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur E et F telles que $f(E) \subset F$. Si f et g ont même sens de variation (resp. des sens de variations opposés), alors $g \circ f$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration.
Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \leqslant y$.

- Supposons f croissante et g croissante. Puisque f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(y)$ puis, comme g est croissante, $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.
- Il reste trois autres cas à étudier, qui se traitent de manière similaire. □

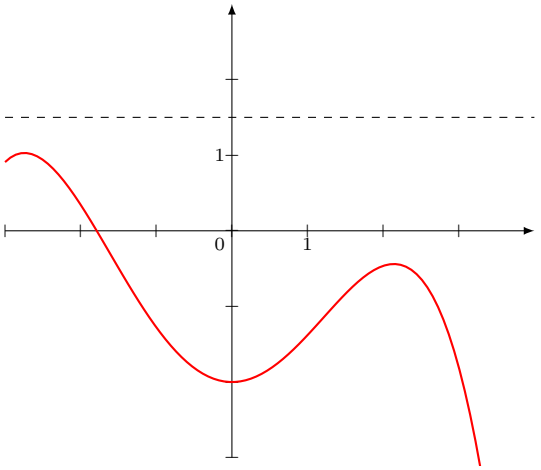
2.2.5. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2.52.

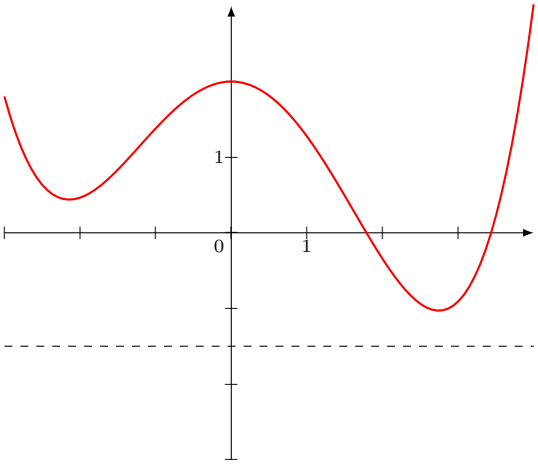
Soit f une fonction réelle définie sur E. On dit que cette fonction est :

- **majorée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$;
- **minorée** si et seulement s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$;
- **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

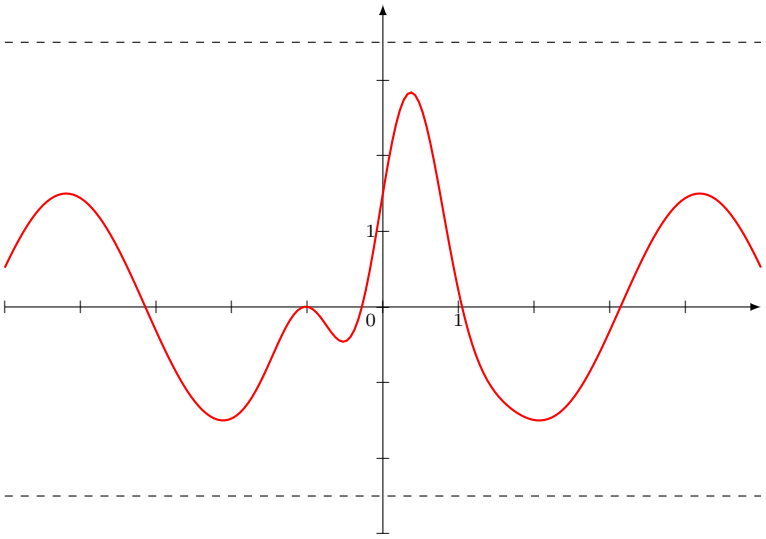
Graphe d'une fonction majorée



Graphe d'une fonction minorée



Graphe d'une fonction bornée



Définition 2.53.

Soit f une fonction réelle définie sur E. On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) en $a \in E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). On dit que f admet un **extremum** en a si et seulement si elle admet un maximum ou un minimum en a.

Dans la Définition 2.53, $f(a)$ est le maximum de l'ensemble $f(\mathbf{R}) = \{f(x),\ x \in E\}$ de toutes les images par f. Il y a unicité de ce maximum, comme nous l'avons signalé dans la Définition 2.20. En revanche, ce maximum peut être atteint en plusieurs points ! Par exemple, la fonction cos admet un maximum (qui vaut 1) et ce maximum est atteint tous les multiples de 2π.

2.3. Notion de dérivée

Dans toute cette partie, I et J désigneront des intervalles de $\mathbf{R}$, non vides et non réduits à un point.

2.3.1. Rappel des définitions et des premières propriétés

Définition 2.54.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** a si la fonction taux d'accroissement :

$$\begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

a une limite finie lorsque x tend vers a. Le cas échéant, cette limite est appelée **nombre dérivé** en a et est notée $f'(a)$.

Exemple 2.55. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $a \in]0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+\backslash\{a\}$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

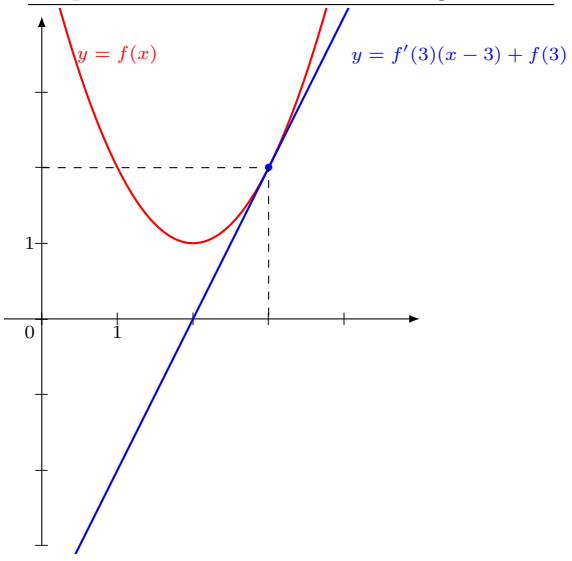
Ainsi, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $a > 0$, $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Par contre, $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.

La courbe représentative d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en un point a admet une tangente au point d'abscisse a. Cette droite a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Graphe d'une fonction et de sa tangente en 3



Définition 2.56.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f est dite **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout point de I. On peut alors définir la **fonction dérivée** de f, notée f' et définie par :

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Exemple 2.57. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ mais pas en 0, et $f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice d'application 2.58. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la dérivée de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est $f' : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n-1} \end{array}$.

↪ Soient $(n, a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{a\}$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1},$$

donc,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}.$$

ce qui signifie que $f'(a) = na^{n-1}$.
Finalement $f' : x \longmapsto nx^{n-1}$.

Proposition 2.59.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- La fonction $f \cdot g$ est dérivable sur I et $f' \cdot g + f \cdot g'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, la fonction f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{f^2}.$$

Démonstration.
La démonstration découle directement des opérations sur les limites, que nous reverrons en détail ultérieurement. Il en sera de même de tous les résultats de cette partie. □

Théorème 2.60 - Dérivée d'une composée.

Soient deux fonctions $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f est dérivable sur I, et si g est dérivable sur J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Les exemples suivants sont très importants et à connaître par cœur :

Exemple 2.61. Soit $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. Si $I = \mathbf{R}$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $x \longmapsto u(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $x \longmapsto au'(ax + b)$.
2. La fonction u^2 est dérivable sur I, de dérivée $2u'u$.
3. La fonction e^u est dérivable sur I, de dérivée $u'\mathrm{e}^u$.
4. Si u est à valeur dans $\mathbf{R}_+^\star$ (ou $\mathbf{R}^{-\star}$), alors la fonction $1/u$ est dérivable sur I, de dérivée $-u'/u^2$.
5. Si u est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^\star$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, de dérivée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
6. Si u est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^\star$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I, de dérivée u'/u.

Exercice d'application 2.62. Soit $u : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \end{array}$. Montrer que u est dérivable sur un ensemble à préciser et calculer sa dérivée.

$\hookrightarrow$ $x \longmapsto 1 - x$ est dérivable sur $]0, 1]$, donc $x \longmapsto \dfrac{1-x}{x}$ est dérivable sur $]0, 1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas ; sa dérivée vaut $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$. Par ailleurs, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\frac{1-x}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 1[.$$

En appliquant le théorème de dérivation d'une composée aux fonctions dérivables $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$, on obtient que u est dérivable sur $]0, 1[$, avec $u' : x \longmapsto -\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

Notons que u n'est pas dérivable en 1 car $\dfrac{1-1}{1} = 0$ et la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2.3.2. Etude des variations

Théorème 2.63.

Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$), alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Démonstration.
La démonstration de ce théorème nécessite de nouveaux outils d'analyse et sera accessible ultérieurement. □

Remarque 2.64.

1. Le fait que l'ensemble de définition de la fonction soit un intervalle est une hypothèse essentielle. Pour s'en convaincre, on pourra s'intéresser à la fonction inverse, définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $x \longmapsto 1/x$.
2. La fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et pourtant $u'(0) = 0$. Il est donc *suffisant* qu'une fonction dérivable sur un intervalle ait une dérivée strictement positive pour être strictement croissante. Ce n'est pas *nécessaire*.

Corollaire 2.65.

Une fonction dérivable sur un intervalle, et dont la dérivée y est nulle, est constante sur cet intervalle.

Démonstration.
Il suffit de se rappeler qu'une fonction à la fois croissante et décroissante est constante. □

2.3.3. Dérivée d'ordre supérieur

Définition 2.66.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Si f est n fois dérivable sur I, peut définir de manière itérative une dérivée de f à l'ordre n :

- On convient que $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Si la dérivée à l'ordre n, $f^{(n)}$, est bien définie sur I et est elle-même dérivable sur I, alors la dérivée à l'ordre $n+1$ est définie par :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

On note parfois $f'' = f^{(2)}$ et $f''' = f^{(3)}$.

Exemple 2.67. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) + x^2 \end{array}$ est trois fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et $f^{(3)} : x \longmapsto 2/x^3$.

Proposition 2.68.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et considérons $f_n : x \longmapsto x^n$. Alors, f_n est indéfiniment dérivable et

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f^{(k)} : x \longmapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

De plus, pour tout $k > n$ entier, on a $f^{(k)} = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous allons démontrer le résultat à l'aide d'une récurrence finie. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on introduit H_k : « $f^{(k)} : x \longmapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ ».
Par définition, $f^{(0)} = f$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{n!}{(n-0)!} x^{n-0} = x^n = f(x)$, donc H_0 est vraie.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que H_k soit vraie. Avec H_k, on a

$$f^{(k)} : x \longmapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

En particulier, $f^{(k)}$ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)} x^{n-k-1},$$

donc H_{k+1} est vraie.
Le principe de récurrence finie permet de conclure que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, H_k est vraie.
En particulier, $f^{(n)} = n!$. Cette fonction est dérivable et permet d'obtenir $f^{(n+1)} = 0$. On en déduit que pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$. □

Exercice d'application 2.69. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$.

$\hookrightarrow$ En calculant les premières dérivées, on conjecture que $f^{(n)} : x \longmapsto (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}$. On démontre sans difficulté ce résultat par récurrence.

Chapitre 3

Fonctions usuelles

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.

Pierre-Simon de Laplace [1]

3.1. Théorème de la bijection monotone

3.1.1. Fonctions réelles bijectives

Définition 3.1.

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbf{R}$ à valeurs dans une partie B de $\mathbf{R}$.
On dit que f est une **bijection**, ou que f est **bijective**, si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in A$ admet une unique solution.

Exemple 3.2. Les fonctions suivantes sont des bijections :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \quad h : \begin{array}{ccc} [0,\pi/2] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

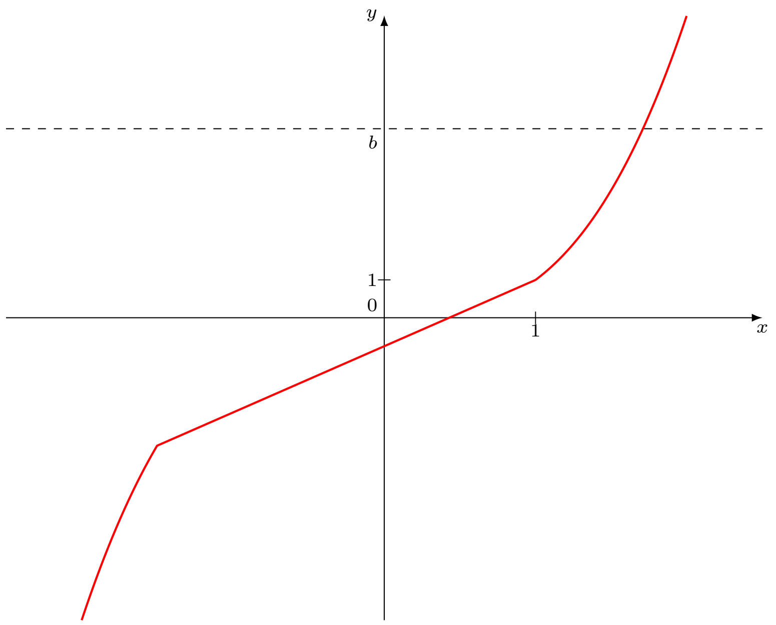
Par ailleurs,

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas des bijections. En effet, l'équation $u(x) = 1$ admet deux solutions et l'équation $v(x) = -1$ n'admet pas de solution.

Graphiquement, $f : A \to B$ est une bijection si, et seulement si, pour tout $b \in B$, la droite horizontale d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.

1. Pierre-Simon de LAPLACE - mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749-1827)



Définition 3.3.

Soit f une bijection définie sur une partie A de $\mathbf{R}$ à valeurs dans une partie B de $\mathbf{R}$.
On appelle **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie sur B et à valeurs dans A qui à tout $b \in B$ associe l'unique solution de l'équation $f(x) = b$.

Attention : $f^{-1} \neq 1/f$ en général !!

Définition 3.4.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie D de $\mathbf{R}$. Soit A une partie de D et B une partie de $\mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$.
On dit que f réalise une **bijection de A sur B** si, et seulement si, la fonction

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection, autrement dit si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ possède une unique solution dans A.

Exemple 3.5. La fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1]$. D'ailleurs la fonction $\widetilde{\cos}$ de la Définition 3.4 serait ici la fonction h de l'Exemple 3.2.

Remarque technique 3.6. Soient A et B des parties de $\mathbf{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une fonction. Si, pour tout élément $y \in B$, on sait prouver l'existence et l'unicité d'un antécédent de f dans A (une solution de l'équation $y = f(x)$), on a prouvé la bijectivité de f. De plus, l'expression de x en fonction de y alors obtenue correspond à l'expression de $f^{-1}(y)$.

Exercice d'application 3.7. Démontrer que $f : \begin{array}{ccc} [1, 2] & \longrightarrow & [0, 3] \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque.

$\hookrightarrow$ Soit $y \in [0, 3]$. Soit $x \in [1, 2]$.

$$f(x) = y \iff x^2 - 1 = y \iff x^2 = y + 1 \iff x = \sqrt{y + 1} \text{ car } (y + 1, x) \in (\mathbf{R}_+)^2.$$

Or $y \in [0,3]$, donc $\sqrt{y+1} \in [1,2]$. Ainsi, l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [1,2]$ est $\sqrt{y+1}$.
Finalement, f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,3] & \longrightarrow & [1,2] \\ y & \longmapsto & \sqrt{y+1} \end{array}$.

◇◇

Proposition 3.8.

Soit f une fonction bijective de A sur une partie B de $\mathbf{R}$.

1. Pour tout $x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$. Autrement dit, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$
2. Pour tout $y \in B$, $f(f^{-1}(y)) = y$. Autrement dit, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$.

Démonstration.
La proposition se démontre en traduisant directement la Définition 3.3.

1. Soit $x \in A$. $f^{-1}(f(x))$ est l'unique solution de l'équation $f(a) = f(x)$ d'inconnue $a \in \mathbf{R}$, *i.e.* x.
2. Soit $y \in B$. $f(f^{-1}(y))$ est l'image par f de l'unique solution de l'équation $f(a) = y$ d'inconnue $a \in \mathbf{R}$, *i.e.* y. □

Exercice d'application 3.9. Soit $(a,b) \in (\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\})^2$, soit $f :]-a,a[\longrightarrow]-b,b[$ une fonction bijective. Montrer que si f est impaire, alors f^{-1} l'est aussi.

↪ Soit $y \in]-b,b[$. Puisque f est bijective, il existe un unique $x \in]-a,a[$ tel que $f(x) = y$. On a $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ et $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}f(-x)) = -x$, d'où $f^{-1}(y) = -f^{-1}(-y)$, puis f^{-1} est impaire.

3.1.2. Bijections continues

Théorème 3.10 - Théorème de la bijection.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie A de $\mathbf{R}$. Soit I un intervalle inclus dans A.
Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur un intervalle noté $f(I)$ et défini par le tableau ci-dessous :

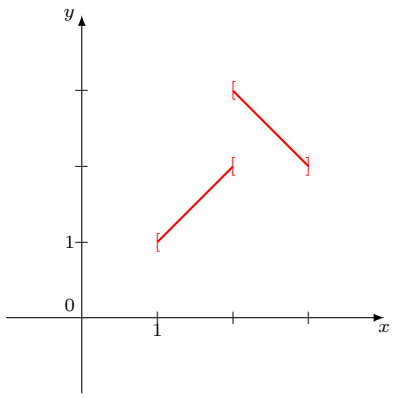
I	$f(I)$	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$

Dans ce tableau, a et b sont des réels, éventuellement égaux à $-\infty$ ou $+\infty$ lorsque cela a un sens.

Démonstration (idée de preuve).
On s'intéresse uniquement au cas où $I = [a,b]$. Supposons f continue et strictement monotone sur I. Puisque f est continue sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (qui sera étudié en détail ultérieurement), toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes. La stricte monotonie entraîne que lorsqu'une valeur est prise, elle ne l'est qu'une seule fois.

En attendant une démonstration plus rigoureuse, on retiendra que l'existence d'un antécédent est liée à la continuité, tandis que l'unicité d'un antécédent est liée à la stricte monotonie. □

Remarque 3.11. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection entre deux intervalle. On peut démontrer que si f est continue, elle est nécessairement strictement monotone. De plus, si f est strictement monotone, elle est nécessairement continue. Mais il faut être très prudent, puisqu'il existe des bijections non continues et non monotones. Nous donnons ci-après le graphe d'une fonction bijective de $[1, 3]$ dans $[1, 3]$ qui n'est ni continue, ni monotone.



Exercice d'application 3.12. Déterminer un couple d'intervalles (intervalle de définition et intervalle d'arrivée) sur lesquels la fonction

$$f : x \longmapsto x^4 + 7x^2 - 12$$

réalise une bijection.

↪ La fonction f est continue en tant que somme de fonctions continues. De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes et d'une constante. Par ailleurs, $f(0) = -12$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[-12, +\infty[$.
On peut montrer de la même manière que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-12, +\infty[$.

Exercice d'application 3.13. Démontrer que la fonction suivante est une bijection

$$\begin{array}{rccc} f : & [0\,;\,1[& \longrightarrow & [1\,;\,2[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} + 1 \end{array}$$

↪ La fonction f est continue, strictement croissante en tant que somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction croissante. Le théorème de la bijection assure alors que f réalise une bijection de $[0\,;\,1[$ sur $f([0\,;\,1[) = \left[f(0)\,;\,\lim\limits_{x \to 1} f(x)\right[= [1\,;\,2[$.

3.1.3. Propriétés des fonctions réciproques

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Proposition 3.14.

Soient A et B des parties de $\mathbf{R}$ et f une bijection de A sur B. La courbe représentative de f et celle de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).

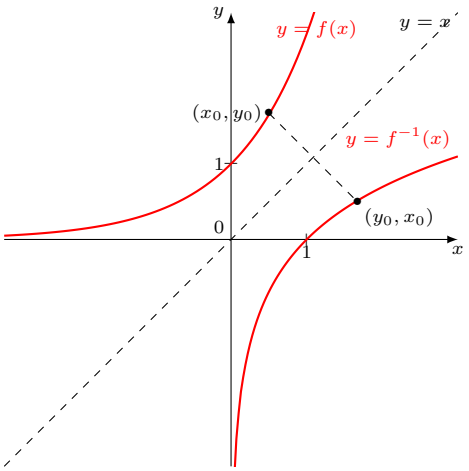
Démonstration.
Notons $\mathcal{C}_f$ (resp. $\mathcal{C}_{f^{-1}}$) la courbe représentative de f (resp. f^{-1}). Soit $M \in \mathcal{C}_f$ de coordonnées (x_0, y_0). Soit M' de coordonnées (x', y') l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (d) d'équation $y = x$. Notons $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 1)$ un vecteur directeur de (d). Le milieu de $[MM']$ de coordonnées $((x_0 + x')/2, (y_0 + y')/2)$ appartient à (d), et $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc :

$$\begin{cases} (y_0 + y')/2 &= (x_0 + x')/2 \\ (x' - x_0) + (y' - y_0) &= 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} -x' + y' &= x_0 - y_0 \\ x' + y' &= x_0 + y_0 \end{cases}.$$

Ainsi M' a pour coordonnées (y_0, x_0).
On obtient alors :

$$M \in \mathcal{C}_f \iff y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0) \iff M' \in \mathcal{C}_{f^{-1}}.$$

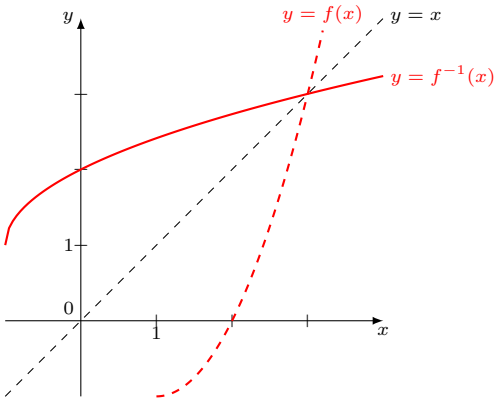
□



Exercice d'application 3.15. Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque de

$$f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & [-1, +\infty[\\ x & \longmapsto & (x-1)^2 - 1 \end{array}.$$

↪ On commence par tracer la parabole représentative de f, dont le sommet a pour coordonnées $(1, -1)$ et qui passe par les points de coordonnées $(2, 0)$ et $(3, 3)$. Par symétrie, on en déduit la courbe représentative de f^{-1}.



Proposition 3.16.

Soient A, B des parties de $\mathbf{R}$ et f une bijection de A sur B. Si f est strictement monotone sur A, alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur B et de même monotonie que f.

Démonstration.
Supposons que f est strictement croissante. Soit $(y, y') \in B^2$ tels que $y < y'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. On a ainsi $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
L'hypothèse $y < y'$ se réécrit $f(x) < f(x')$ et puisque f est strictement croissante, on en déduit que $x < x'$, autrement dit que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Ceci prouve que f^{-1} est strictement croissante. □

Proposition 3.17.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et f une bijection de I sur J.
Si f est continue sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J.

Démonstration.
La démonstration de ce résultat sera vue plus tard dans le cours sur la continuité. Graphiquement, puisque la courbe représentative de f^{-1} est obtenue par symétrie à partir de celle de f, qui peut être tracée « sans lever le crayon » , il en va de même pour celle de f^{-1}. □

Théorème 3.18 - Dérivée d'une bijection réciproque.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I.
Soit $b \in J$.
f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Le cas échéant,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration.
Puisque f est bijective, il existe un unique $a \in I$ tel que $f(a) = b$. D'après la Proposition 3.17, f^{-1} est continue en b. Ainsi :

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a.$$

et la valeur a n'est jamais atteinte (si $f^{-1}(y) = a$, alors $y = b$). Or, par hypothèse,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

d'où, par composition des limites,

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a) \quad i.e. \quad \lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = f'(a).$$

Ainsi, puisque $f'(a) \neq 0$,

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} \quad i.e. \quad \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

□

Remarque 3.19. Le point crucial dans cette démonstration est la preuve que f^{-1} est dérivable en b. Si l'on admet ce fait, la formule du théorème peut se retrouver en appliquant le théorème de dérivation d'une composée à l'identité $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$: $\left(f^{-1}\right)' \cdot \left(f' \circ f^{-1}\right) = 1$, puis $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Ce résultat s'interprète de manière graphique : puisque les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice il en va de même pour leurs tangentes. Les pentes de ces tangentes sont donc inverses l'une de l'autre. En particulier, si la tangente à la courbe représentative de f en un point est horizontale, au point correspondant sur la courbe représentative de f^{-1}, la tangente est verticale.

3.2. Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances entières et puissances réelles

3.2.1. Fonctions logarithmes

Définition 3.20.

On appelle **logarithme népérien** et on note ln la primitive nulle en 1 de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}.$$

Proposition 3.21 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Démonstration.

1. Soit $y \in \mathbf{R}_+^\star$. Notons $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) - \ln(x) \end{array}$. Par définition de ln, f et dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $f'(x) = \dfrac{y}{xy} - \dfrac{1}{x} = 0$. Par ailleurs, $f(1) = \ln(y)$. Ainsi, $f(x) = \ln(y)$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, d'où $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$.
2. Soit $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$. On remarque d'abord que $0 = \ln\left(y \times \dfrac{1}{y}\right) = \ln(y) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)$, d'où $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$. Il s'ensuit que $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) \times \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)$, d'où pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$. □

Corollaire 3.22.

Pour tout $(x,n) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $\ln(x^n) = n\ln(x)$. »
On a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$ donc H_0 est vrai.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vrai.

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x \cdot x^n) = \ln(x) + \ln(x^n) = \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x)$$

donc H_{n+1} est vraie. Donc le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Soit $n \in \mathbf{Z}_-$. On a

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x)$$

car $-n \in \mathbf{N}$ et on peut appliquer le résultat démontré plus haut par récurrence. □

Proposition 3.23 - Propriétés analytiques.

1. La fonction ln est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. En particulier, ln est une fonction strictement croissante.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration. 1. Découle de la définition du logarithme népérien.

2. • Soit $M \in \mathbf{R}_+^\star$. Puisque $x \longmapsto 1/x$ est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^\star$, on obtient que ln est strictement croissante. En particulier, $\ln(2) > 0$, puis $M/\ln(2) > 0$.
Notons n le plus petit entier tel que $n \geqslant M/\ln(2)$. On a $n \times \ln(2) \geqslant M$, puis $\ln(2^n) \geqslant M$. Puisque ln est croissante, on en déduit, pour tout $x \geqslant 2^n$, $\ln(x) \geqslant \ln(2^n) \geqslant M$. Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

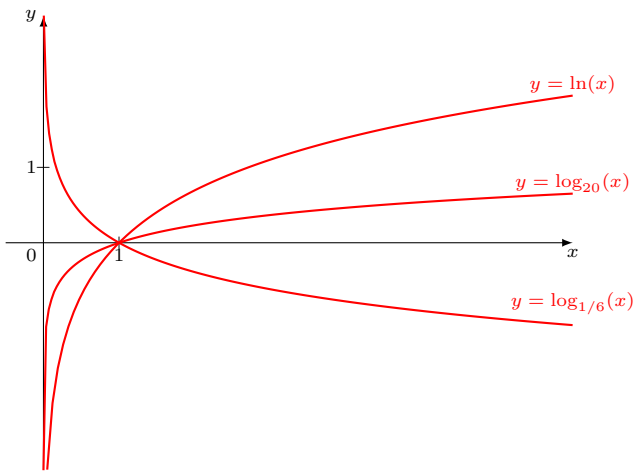
• Puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. □

Pour tout $a \in \mathbf{R}_+^\star$, on appelle **fonction logarithme en base** a la fonction

$$\begin{array}{rccc} \log_a : & \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x)/\ln(a) \end{array}$$

Pour $a = 10$, cette fonction est aussi notée Log. Les propriétés de ces fonctions découlent de celles de ln. Faire cependant attention lors du calcul des fonctions dérivées (ne pas oublier le facteur multiplicatif).

Graphes de fonctions logarithmes



L'inégalité suivante est à retenir, car très utile en pratique.

Proposition 3.24.

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Démonstration.
La fonction $f : x \longmapsto \ln(x) - x + 1$ est dérivable avec $f' : x \longmapsto \frac{1}{x} - 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $f'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{x} \geqslant 1 \iff x \in]0\,;\,1]$. On en déduit que f est croissante sur $]0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f(1) = 0$ est le maximum de f. Donc $f \leqslant 0$. □

3.2.2. Fonctions exponentielles

Comme ln est une application strictement croissante et continue définie sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$, elle établit une bijection de $\mathbf{R}_+^\star$ sur $\left]\lim_0 \ln; \lim_{+\infty} \ln\right[$, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}$. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, il existe donc un unique réel x tel que $\ln(x) = a$. En particulier, on peut poser les définitions suivantes.

Définition 3.25.

L'unique solution sur $\mathbf{R}_+^\star$ de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e.

Définition 3.26.

On appelle **fonction exponentielle** la réciproque de la fonction logarithme népérien. L'image d'un réel x par cette fonction est noté e^x ou $\exp(x)$.

Remarque 3.27.
1. En tant que réciproque de ln, exp est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

Proposition 3.28 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$.

Démonstration.
1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. $\ln(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln(\mathrm{e}^y) = x + y = \ln(\mathrm{e}^{x+y})$, donc, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. $\ln(\mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y) = \ln(\mathrm{e}^x) - \ln(\mathrm{e}^y) = x - y = \ln(\mathrm{e}^{x-y})$, donc, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y$. □

Proposition 3.29 - Propriétés analytiques.

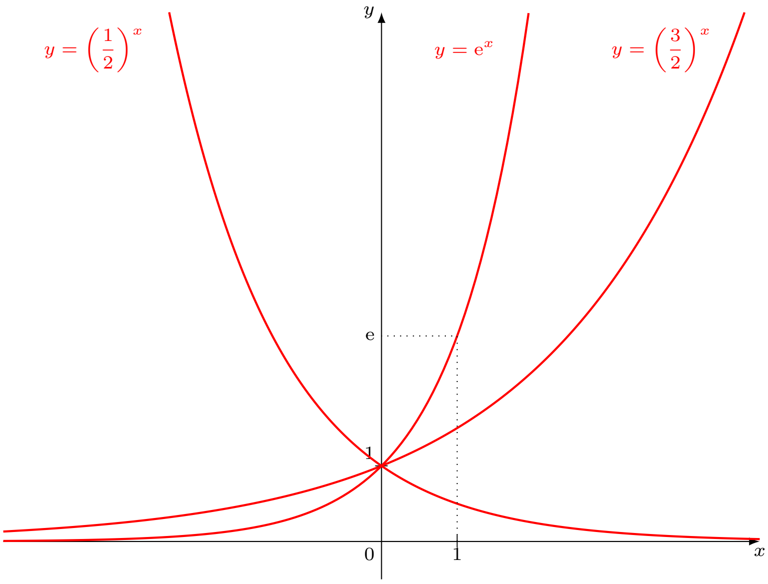
1. La fonction exp est dérivable et $\exp' = \exp$.
2. $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Démonstration.
1. La fonction exp est la réciproque de ln, qui est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et dont la dérivée ne s'annule jamais. Le Théorème 3.18 assure alors que exp est dérivable sur $\mathbf{R}$ et,
$$\exp' = \frac{1}{\ln' \circ \exp} = \frac{1}{\frac{1}{\exp}} = \exp .$$
2. - Soit $\varepsilon > 0$. Notons $x_0 = \ln(\varepsilon)$. Puisque exp est croissante ($\exp' = \exp$ et $\exp > 0$), pour tout $x \leqslant x_0$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{x_0}$, d'où, pour tout $x \leqslant x_0$, $|\mathrm{e}^x| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
   - Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$, donc $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

□

Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$. On appelle **fonction exponentielle en base** a la fonction inverse de la fonction logarithme en base a ; elle est donc définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^\star$. L'image d'un réel x par cette fonction est notée a^x. Par définition, on a donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$. Ici encore, il faut prendre garde lors de la dérivation des fonctions exponentielles en base quelconque. Ainsi si a désigne un réel strictement positif et $f : x \longmapsto a^x$, on remarque que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \ln(a)a^x$.

Graphes de fonctions exponentielles



◇◇

Remarque technique 3.30. Pour manipuler des expressions mettant en jeu des exponentielles ou des logarithmes de bases différentes, on se ramène à une seule base. Dans le cas des équations, on peut conserver deux bases, que l'on isole chacune d'un côté du signe « = » avant de passer au logarithme.

Exercice d'application 3.31. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2^{(3^x)}}{3^{(2^x)}}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. On remarque que

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{3^x\ln(2)}}{\mathrm{e}^{2^x\ln(3)}} = \exp\left(\ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(3)} - \ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(2)}\right) = \exp\left(\mathrm{e}^{x\ln(3)}\left(\ln(2) - \ln(3)\mathrm{e}^{x(\ln(2)-\ln(3))}\right)\right)$$

La dernière opération consistant à mettre en facteur l'exponentielle « prépondérante » au voisinage de $+\infty$ est repérable puisque toutes les bases sont les mêmes. Sachant que $\ln(3) > \ln(2)$, on n'est plus en présence d'une forme indéterminée ; la limite de f en $+\infty$ existe et vaut $+\infty$.

Exercice d'application 3.32. Résoudre l'équation $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$ d'inconnue réelle x.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. On remarque que

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1} &\iff 4^x - \frac{1}{\sqrt{3}}3^x = \sqrt{3}3^x - \frac{1}{2}4^x \\ &\iff 3\sqrt{3}4^x = 8 \times 3^x \\ &\iff \ln(3\sqrt{3}) + x\ln(4) = \ln(8) + x\ln(3) \end{aligned}$$

L'équation étudiée possède donc $3/2$ comme seule solution.

◇◇

L'inégalité suivante est à retenir, car très utile en pratique.

Proposition 3.33.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

Démonstration.
La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ est dérivable avec $f' : x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $f(0)=0$ est le minimum de f. Donc $f \geqslant 0$. □

3.2.3. Fonctions puissances

Définition 3.34.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on définit la fonction puissance d'ordre a par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & \exp(a\ln(x)) \end{array}$$

Pour tout $a \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}_+^\star$, on note x^a le réel $\exp(a\ln(x))$.

Cette définition est cohérente avec la définition des fonctions puissance d'ordre entier. De plus, par définition même, on a pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$, $\ln(x^y) = y\ln(x)$ et pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\exp(x)^y = \exp(xy)$.

Proposition 3.35 - Propriétés algébriques.

1. Pour tout $(x,y,z) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2 \times \mathbf{R}$, $(xy)^z = x^z y^z$.
2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}^2$, $x^{y+z} = x^y x^z$.
3. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}^2$, $(x^y)^z = x^{yz}$.

Démonstration.

1. Soit $(x,y,z) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2 \times \mathbf{R}$.
$$(xy)^z = \exp(z\ln(xy)) = \exp(z\ln(x) + z\ln(y)) = \exp(z\ln(x))\exp(z\ln(y))$$
d'où $(xy)^z = x^z y^z$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}^2$.
$$x^{y+z} = \exp((y+z)\ln(x)) = \exp(y\ln(x))\exp(z\ln(x))$$
d'où $x^{y+z} = x^y x^z$.
3. Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}^2$.
$$(x^y)^z = (\exp(y\ln(x)))^z = \exp(zy\ln(x))$$
d'où $(x^y)^z = x^{yz}$.
4. • Soit $a \in \mathbf{R}^\star$. Soit $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$.
$$x^a = y \iff \exp(a\ln(x)) = y \iff a\ln(x) = \ln(y) \iff \ln(x) = \frac{\ln(y)}{a} \iff x = \exp\left(\frac{\ln(y)}{a}\right)$$
Donc la fonction puissance d'ordre a est bijective et sa réciproque est $x \longmapsto x^{1/a}$.

- Soit $(a,x,y) \in (\mathbf{R}_+^\star)^3$. Si $x < y$, alors $a\ln(x) < a\ln(y)$ puis $x^a < y^a$. Ainsi $x \longmapsto x^a$ est strictement croissante.
- Soit $(a,x,y) \in \mathbf{R}_-^\star \times (\mathbf{R}_+^\star)^2$. Si $x < y$, alors $a\ln(x) > a\ln(y)$, puis $x^a > y^a$. Ainsi $x \longmapsto x^a$ est strictement décroissante. □

Corollaire 3.36.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$, $\ln(x^y) = y\ln(x)$.

Démonstration. 1. Immédiat avec la proposition précédente, puisque $\mathrm{e} > 0$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$. $\ln(x^y) = \ln(\exp(y\ln(x))) = y\ln(x) = \ln(x^y)$. □

Proposition 3.37.

Soit $a \in \mathbf{R}^\star$.

- Si $a > 0$, la fonction $x \longmapsto x^a$ est strictement croissante si $a > 0$.
- Si $a < 0$, la fonction $x \longmapsto x^a$ est strictement décroissante si $a > 0$.

La fonction puissance d'ordre a est une bijection de $\mathbf{R}_+^\star$ sur $\mathbf{R}_+^\star$ de réciproque la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & x^{1/a} \end{array}.$$

Soit p un entier naturel impair. Le cas de la puissance d'ordre $1/p$ pose un problème particulier. En effet, on peut définir cette fonction comme précédemment ou comme étant la réciproque f de la bijection $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^p \end{array}$. La fonction f ainsi construite est définie sur $\mathbf{R}$ entier et coïncide avec la puissance d'ordre $1/p$ sur $\mathbf{R}_+^\star$; on l'appelle **fonction racine p-ième**. En général, afin d'éviter les confusions, la fonction racine p-ième appliquée à un réel x s'écrit $\sqrt[p]{x}$ plutôt que $x^{1/p}$.

Proposition 3.38 - Propriétés analytiques.

1. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, la fonction puissance d'ordre a est dérivable et sa dérivée est $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & ax^{a-1} \end{array}$.
2. Pour tout $a \in \mathbf{R}_+^\star$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
   Pour tout $a \in \mathbf{R}_-^\star$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$.

Démonstration. 1. Soit $a \in \mathbf{R}$. La fonction puissance d'ordre a, qu'on note f, est dérivable comme composée de fonction dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $f'(x) = \dfrac{a}{x}\exp(a\ln(x)) = \dfrac{a}{\mathrm{e}^{\ln(x)}}\exp(a\ln(x))$, d'où le résultat.

2. - Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} a\ln(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} a\ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
   - Soit $a \in \mathbf{R}_-^\star$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} a\ln(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^a = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} a\ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$. □

Remarque 3.39. On convient parfois que $0^0 = 1$. En effet, la fonction f définie par $f(x) = x^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$ et $f(0) = 0$ est continue (on parle de prolongement par continuité de $x \longmapsto x^x$; on étudiera cela plus en détail bientôt).

◇◇

Remarque technique 3.40. Pour étudier des limites avec les fonctions puissances, il faut **toujours** revenir à la forme exponentielle !

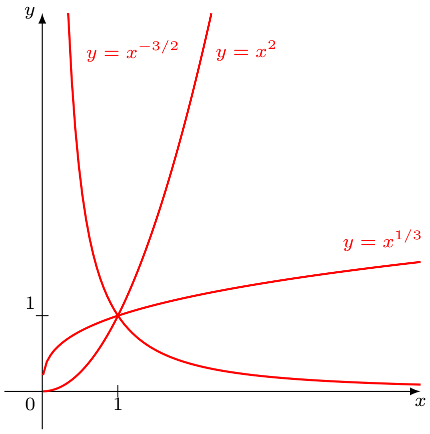
Exercice d'application 3.41. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

↪ Soit $x > 0$. On a $\frac{1+2x}{1+x} = \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Ainsi,

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1.$$

◇◇

Graphes de fonctions puissances



3.2.4. Comparaison asymptotique des fonctions introduites

Théorème 3.42 - Théorème de croissances comparées.

1. En $+\infty$, le logarithme népérien est négligeable devant les fonctions puissances d'exposant strictement positif : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0$ pour tout $b > 0$.
2. $\lim\limits_{x\to0^+} x^b \ln(x) = 0$ pour tout $b > 0$.
3. En $+\infty$, les fonctions puissances sont négligeables par rapport à la fonction exponentielle : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^x} = 0$ pour tout $b \in \mathbf{R}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^x = 0$ pour tout $b > 0$.

Démonstration. 1. On a vu que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\ln(x) \leqslant x-1$ et a fortiori, on a $\ln(x) \leqslant x$. Soit $x \in]0,+\infty[$. On peut donc écrire aussi $\ln\left(x^{1/2}\right) \leqslant x^{1/2}$ c'est-à-dire

$$\ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$$

En divisant par x, on obtient pour tout $x > 1$: $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient avec le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Soit $b > 0$. Soit $x > 0$. Posons $X = x^b$. On a

$$\frac{\ln(x)}{x^b} = \frac{\ln(X^{1/b})}{\left(X^{1/b}\right)^b} = \frac{1}{b}\frac{\ln(X)}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Soit $x > 0$ et posons $y = \frac{1}{x}$. On a $x\ln(x) = \frac{1}{y}\ \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(y)}{y}$ donc

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Soit $b > 0$. Soit $x > 0$. Posons $X = x^b$.

$$x^b \ln(x) = X\ln(X^{\frac{1}{b}}) = \frac{1}{b} X\ln(X) \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

3. Soit $b \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$ et posons $t = \mathrm{e}^x$ de sorte que $x = \ln(t)$. On a alors $\frac{x^b}{\mathrm{e}^x} = \frac{\left(\ln(t)\right)^b}{t}$ si bien que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\ln(t)\right)^b}{t} = 0$$

d'après le résultat précédent.

4. Soit $b > 0$. Pour $x < 0$, on pose $X = -x$. Alors, $|x| = X$ et $|x|^b\,\mathrm{e}^x = X\mathrm{e}^{-X} = \frac{X^b}{\mathrm{e}^x}$.

Comme $X \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$ et puisque $\lim_{X\to+\infty} \frac{X^b}{\mathrm{e}^x} = 0$, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^x = 0.$$

□

On a en particulier :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

◇◇

Remarque technique 3.43. Cette proposition exprime grossièrement que les exponentielles « l'emportent » sur les puissances qui « l'emportent » sur les logarithmes. Ce résultat, même s'il a l'air restrictif, permet de traiter toutes les bases et tous les cas de produits de fonctions du type précédent. Même si revenir à l'énoncé exact du théorème est un exercice de style, il faut savoir faire cette opération pour être convaincu de sa légitimité.

Exercice d'application 3.44. Etudier la limite en $+\infty$ de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-3x}x^4\ln(x)^2 \end{array}$.

↪ Intuitivement, l'exponentielle « l'emportant » sur les autres fonctions, f admet 0 comme limite en $+\infty$; cette rédaction est suffisante en pratique. Pour se ramener aux résultats précédents, il suffit d'écrire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, on a $f(x) = (\ln(x)/x)^2(x\mathrm{e}^{-x/2})^6$. La proposition précédente assure que $x \longmapsto \ln(x)/x$ et $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x/2}$ admettent 0 comme limite en $+\infty$. Il en est donc de même de la fonction f.

◇◇

On peut généraliser le théorème de croissances comparées :

Corollaire 3.45.

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^a}{x^b} = 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $b > 0$.
2. $\lim_{x\to 0^+} x^b\big|\ln(x)\big|^a = 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $b > 0$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}} = 0$ pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbf{R}$.
4. $\lim_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^{ax} = 0$ pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$.

3.3. Fonctions hyperboliques

Définition 3.46.

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** et on note sh la fonction $\mathrm{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$.
- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** et on note ch la fonction ch : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$.

Proposition 3.47.

- sh est impaire.
- ch est paire.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbf{R}$.

- $\mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{2} = -\mathrm{sh}(x)$.
- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e{-x} + \mathrm{e}^x}{2} = \mathrm{ch}(x)$.
- $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}}{4} = 1$. □

Exercice d'application 3.48. Soit $x \in \mathbf{R}$. Linéariser (transformer en somme) $\mathrm{sh}^3(x)\,\mathrm{ch}(x)$.

$$\hookrightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{sh}^3(x)\,\mathrm{ch}(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^3 \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-4x} + 3\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{-2x}}{4} \\ &= \frac{1}{8}\,\mathrm{sh}(4x) - \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}(2x) \end{aligned}$$

◇◇

Remarque technique 3.49. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Pour simplifier certaines expression, on peut factoriser $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$ par $\mathrm{e}^{(a+b)/2}$:

$$\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} + \mathrm{e}^{b-\frac{a}{2}}) = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{\frac{b}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{b-a}{2}}),$$

ce qu'on peut encore simplifier en :

$$e^a + e^b = 2e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même, on peut montrer que

$$e^a - e^b = 2e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Noter qu'il est absolument inutile d'apprendre ces formules par cœur puisqu'on peut les retrouver en une minute.

Exercice d'application 3.50. Calculer $S = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{sh}(p)$.

$\hookrightarrow S = \sum_{p=0}^{n} \frac{e^p - e^{-p}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}(e)^p - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}(e^{-1})^p$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{e^{(n+1)}-1}{2(e-1)} - \frac{e^{-(n+1)}-1}{2(e^{-1}-1)} \\
&= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right)e^{(n+1)/2}}{2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)e^{1/2}} - \frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{n+1}{2}\right)e^{-(n+1)/2}}{2\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-1/2}} \\
&= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)}\left(e^{n/2} - e^{-n/2}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n}{2}\right).
\end{aligned}$$

◇◇

Exercice d'application 3.51. Soit $(n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

$\hookrightarrow$ En procédant comme avant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}x)\operatorname{ch}(\frac{nx}{2})}{\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}.$$

◇◇

Remarque technique 3.52. Pour retrouver les formules de trigonométrie hyperbolique, on se sert des formules de trigonométrie standards et on « remplace » sin par i sh et cos par ch, puis on « simplifie » par i.
Attention : ceci est une astuce pour pouvoir démarrer une preuve.

Exemple 3.53. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. On en déduit que $\operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(x)$.
On prouve alors plus facilement la formule :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(2x) - 1 - 2\operatorname{sh}^2(x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^x - e^{-x})^2}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

◇◇

◇◇

Remarque technique 3.54. Pour résoudre une équation faisant intervenir ch, sh il peut être utile de revenir à la forme exponentielle.

Exercice d'application 3.55. Résoudre $3\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) = 3$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) = 3 &\iff 3(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + 2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = 6 \\ &\iff 5\mathrm{e}^x - 6 + \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x}(5\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 1) = 0 \\ &\iff (\mathrm{e}^x - 1)5\mathrm{e}^x - 1) = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-\ln(5), 0\}$.

◇◇

Proposition 3.56.

Les fonctions ch et sh sont dérivables, et :

- $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
- $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$

Démonstration.
On voit immédiatement que les fonctions sont dérivables d'après leurs définitions.

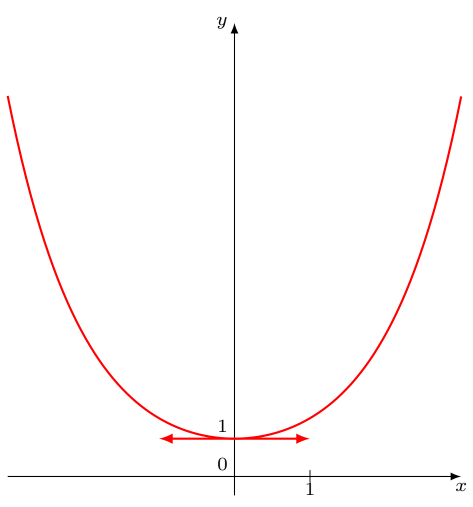
- Soit $x \in \mathbf{R}$. $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \mathrm{ch}(x)$.
- Soit $x \in \mathbf{R}$. $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \mathrm{sh}(x)$. □

Proposition 3.57.

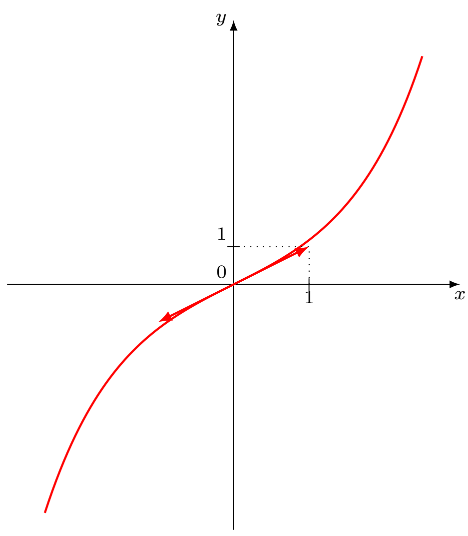
1. $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$.

Démonstration.
1. Immédiat avec $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
2. Se traite comme le point précédent. □

Graphe de la fonction cosinus hyperbolique



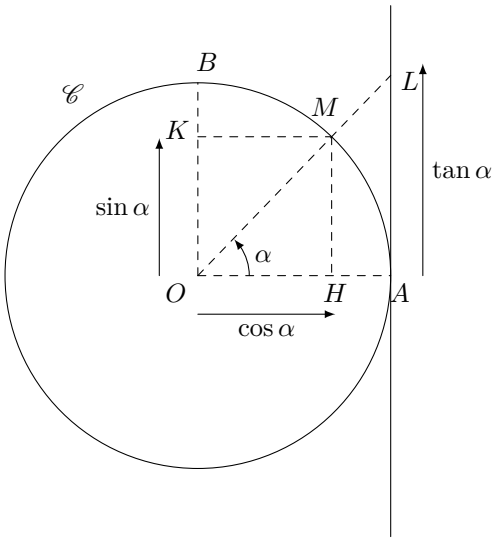
Graphe de la fonction sinus hyperbolique



3.4. Fonctions circulaires

3.4.1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle

Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K, projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB), et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A.



On oriente la droite (OA) (resp. (OB), (OL)) par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OL}$).

Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$, on sait que :

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OH}, \quad \sin\alpha = \overline{OK}, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AL}},$$

la tangente de α étant définie si et seulement si L existe, *i.e.* si le point M n'est pas sur la droite (OB), *i.e.* si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Le théorème de Pythagore entraîne immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.58 - Théorème fondamental de la trigonométrie.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1.$$

Réciproquement, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour lequel $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel α, unique à 2π-près, pour lequel $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Géométrique, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

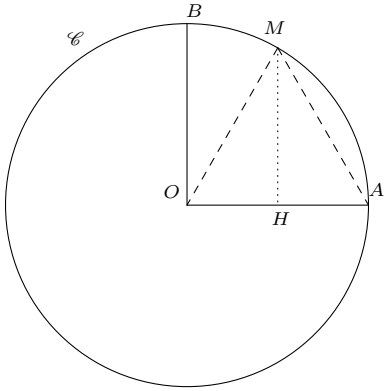
La géométrie du triangle permet de déterminer quelques angles remarquables (à connaître par cœur).

Proposition 3.59 - Angles remarquables.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

Démonstration.
Ces valeurs s'obtiennent en utilisant la géométrie du triangle. On se contente de démontrer $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, les autres valeurs étant laissées à la sagacité du lecteur.

On reprend les notations précédentes, avec $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) = \pi/3$. On a $OA = OM$, donc le triangle OAM est isocèle. Puisque $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) = \pi/3$, on en déduit que OAM est équilatéral. Il s'ensuit que la hauteur (MH) de OAM est également une médiane, d'où, comme $\cos(\pi/3) > 0$, $\cos(\pi/3) = OH = 1/2$.



Par ailleurs, $\sin^2(\pi/3) = 1 - \cos^2(\pi/3) = 1 - 1/4 = 3/4$, puis, comme $\sin(\pi/3) > 0$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. □

La lecture du cercle trigonométrique fournit également les relations suivantes :

Proposition 3.60 - Transformations affines.

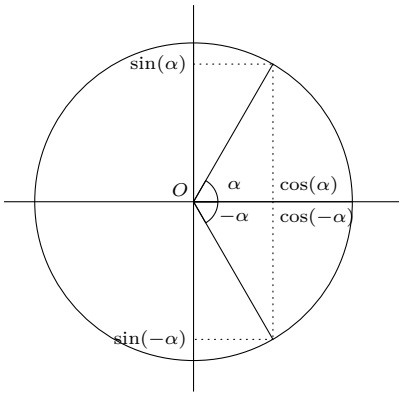
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

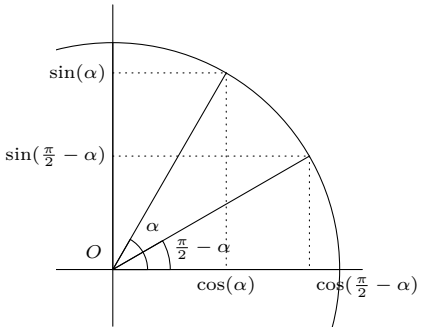
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

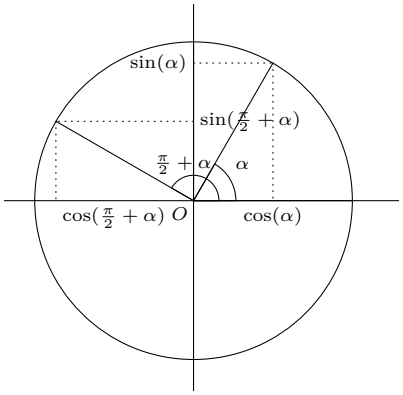
En particulier, en prenant garde à choisir α pour que les formules aient un sens,

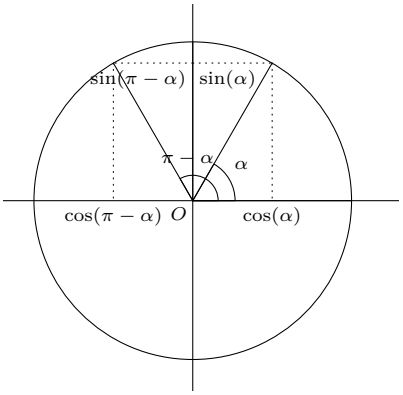
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tfrac{1}{\tan(\alpha)} \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tfrac{1}{\tan(\alpha)}$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \qquad \tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha).$$

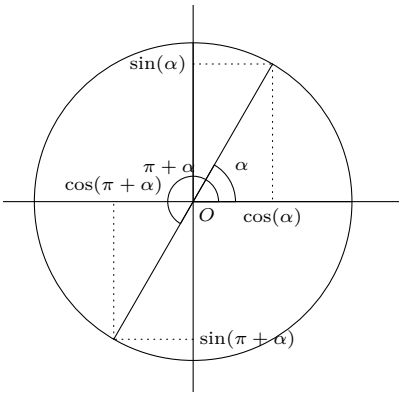
On peut rapidement retrouver ces égalités en dessinant un cercle trigonométrique :











Proposition 3.61 - Formules d'addition.

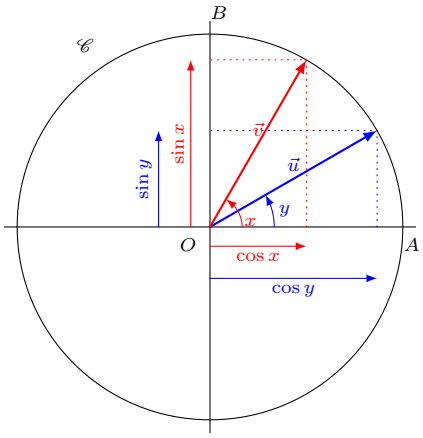
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \qquad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

Si de plus, x, y, $x+y$ et $x-y$ ne sont pas des éléments de $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\right\}$, alors :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Notons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(\cos y, \sin y)$ et $(\cos x, \sin x)$.



- D'une part $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \cos y \cos x + \sin y \sin x$ (produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^2$). D'autre part,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 1 \times 1 \times \cos(x - y).$$

- On a de plus $\cos(x + y) = \cos(x - (-y)) = \cos(-y)\cos(x) + \sin(-y)\sin(x)$ avec la formule précédente. On conclut en remarquant que $\cos(-y) = \cos(y)$ et $\sin(-y) = -\sin(y)$ (cf. Proposition 3.60).
- D'après la Proposition 3.60, $\sin(x - y) = \cos(\frac{\pi}{2} - x + y) = \cos(y)\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(y)\sin(\frac{\pi}{2} - y)$. Or $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, d'où $\sin(x - y) = \cos y \sin x - \sin y \cos x$.
- On a $\sin(x + y) = \sin(x - (-y))$ et on conclut avec le point précédent.
- On a :

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} = \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}.$$

  d'où $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$.
- $\tan(x - y) = \tan(x + (-y)) = \frac{\tan(x)+\tan(-y)}{1-\tan(x)\tan(-y)} = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$ (car $\tan(-y) = -\tan(y)$, cf. Proposition 3.60). □

Avec la proposition précédent, on obtient immédiatement les formules suivantes, qui sont également à connaître par cœur.

Corollaire 3.62 - Formules de duplication.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

Si de plus, x n'est pas un élément de $\{\pi/4 + k\pi/2,\ \pi/2 + k\pi\ :\ k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Exercice d'application 3.63. Déterminer la valeur du réel positif $\cos(\pi/8)$.

↪ On a $\cos(\pi/4) = \cos(2\pi/8) = 2\cos^2(\pi/8) - 1$, d'où $\cos^2(\pi/8) = (\sqrt{2} + 2)/4$. Puisque $\cos(\pi/8) \geqslant 0$, on obtient $\cos(\pi/8) = \sqrt{(\sqrt{2} + 2)/2}$.

Corollaire 3.64.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On suppose que x n'est pas un élément de $\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ et on pose $t = \tan(\frac{\pi}{2})$.

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration.
Les formules proviennent directement du Corollaire 3.62. □

3.4.2. Etude des fonctions circulaires

Définition 3.65.

On appelle **fonction cosinus** (resp. **fonction sinus**) les fonctions définies respectivement par

$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \sin : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} .$$

On appelle **fonction tangente**, et on note tan, la fonction

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

Du formulaire de trigonométrie, on tire le corollaire ci-dessous.

Corollaire 3.66.

La fonction cos est paire, tandis que les fonctions sin et tan sont impaires. Les fonctions cos et sin sont 2π-périodique et la fonction tan est π-périodique. La courbe représentative de sin dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ se déduit de celle de cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.

Proposition 3.67.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$, et

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos .$$

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 .$$

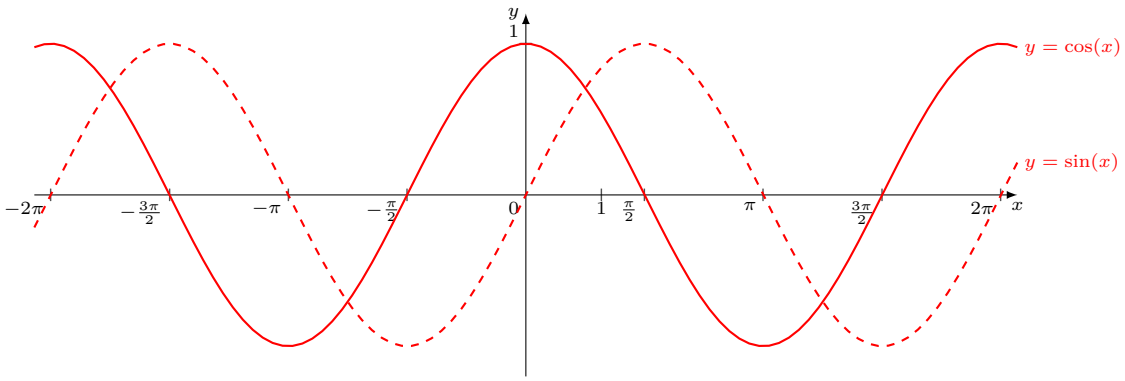
En particulier, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, la fonction tangente est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Proposition 3.68.

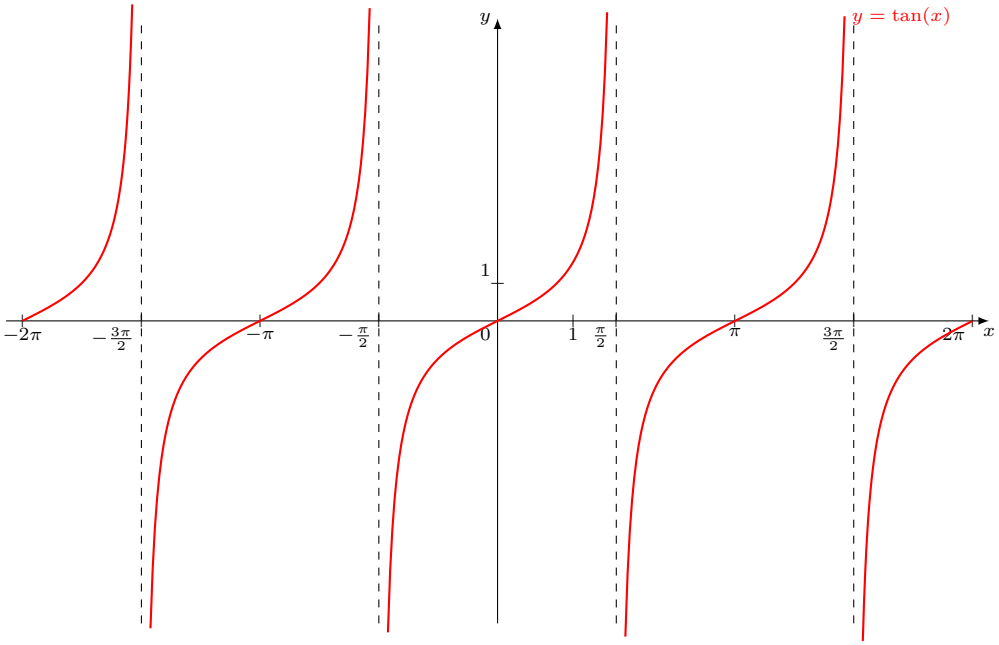
On a les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} \tan(x) = -\infty.$$

Graphes des fonctions sinus et cosinus



Graphe de la fonction tangente



3.5. Equations et inéquations trigonométriques

3.5.1. Outils de base

On utilise trois outils de base :

1. Les transformations des différences en produits, avec les complexes.
2. Les changements de lignes trigonométriques (transformation d'un sinus en cosinus, etc.).

3. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, soit $x \in \mathbf{R}$.

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$

Il existe x_0 tel que $\cos(x_0) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(x_0) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Donc

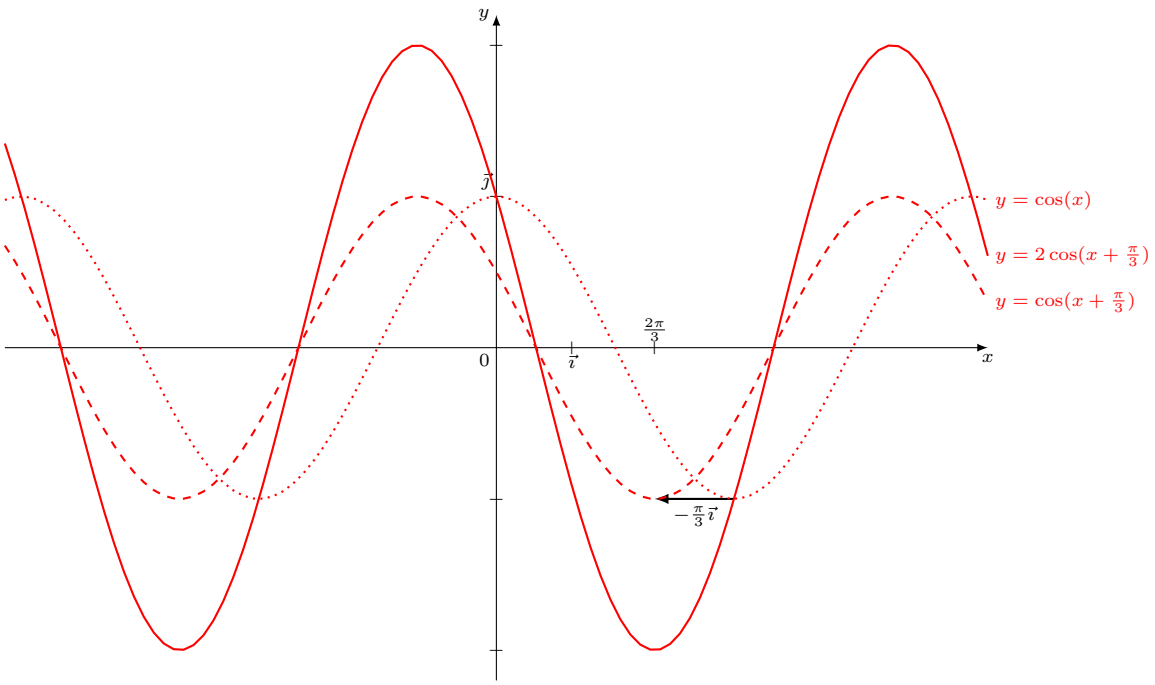
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - x_0).$$

Exercice d'application 3.69. Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$ définie sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3}\cos x + \sin\frac{-\pi}{3}\sin x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

On peut ainsi représenter la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:



Définition 3.70.

Soit $(a,b,m) \in \mathbf{R}^3$. On dit que a **est congru à** b **modulo** m, et on note $a \equiv b\ [m]$, s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b + km$ (autrement dit $a - b$ est un multiple de m).

Exemple 3.71. Soit $(\theta,\theta') \in \mathbf{R}^2$. Si $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$, alors $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta')$, puisque sin et cos sont 2π-périodique. La réciproque est fausse. Par exemple, $\sin(\pi/4) = \sin(3\pi/4)$ et pourtant $3\pi/4 - \pi/4$ n'est pas un multiple de 2π. De même, $\cos(\pi/4) = \cos(-\pi/4)$ alors que $\pi/4 - (-\pi/4)$ n'est pas un multiple de 2π.

Proposition 3.72.

Soit $m \in \mathbf{R}$.

1. **Réflexivité**. $\forall a \in \mathbf{R}$, $a \equiv a\ [m]$.
2. **Symétrie**. $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $a \equiv b\ [m] \iff b \equiv a\ [m]$.
3. **Transitivité**. $\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, si $a \equiv b\ [m]$ et $b \equiv c\ [m]$ alors $a \equiv\ c[m]$.
4. **Somme**. $\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, si $a \equiv c\ [m]$ et si $b \equiv d\ [m]$, alors $a+b \equiv c+d\ [m]$.
5. **Produit**. $\forall (a,b,\lambda) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^\star$, si $a \equiv b\ [m]$, alors $\lambda a \equiv \lambda b\ [\lambda m]$.
6. **Projection**. $\forall (a,b,p) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$, si $a \equiv b\ [pm]$, alors $a \equiv b\ [m]$.

3.5.2. Equations trigonométriques

La résolution d'équations trigonométriques est basée sur trois équivalences de base.

Proposition 3.73.

1. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. $\sin(x) = \sin(y)$ ssi $x \equiv y\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y\ [2\pi]$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. $\cos(x) = \cos(y)$ ssi $x \equiv y\ [2\pi]$ ou $x \equiv -y\ [2\pi]$.
3. Soit $(x,y) \in \left(\mathbf{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}\right)^2$. $\tan(x) = \tan(y)$ ssi $x \equiv y\ [\pi]$.

Exercice d'application 3.74. Résoudre l'équation $(E_1) : 2\sin(2x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} 2\sin(2x) = 1 &\iff \sin(2x) = \frac{1}{2} \\ &\iff \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } \pi - 2x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{12}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12}\ [\pi] \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi,\ \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice d'application 3.75. Résoudre l'équation $(E_2) : \sin(2x) = \cos(3x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} \sin(2x) = \cos(3x) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) \\ &\iff \frac{\pi}{2} - 2x \equiv 3x\ [2\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 2x \equiv -3x\ [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{10}\ \left[-\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice d'application 3.76. Résoudre l'équation $(E_3) : \sin(x) + \cos(7x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} \sin(x) + \cos(7x) = 0 &\iff -\sin(x) = \cos(7x) \\ &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(7x) \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{16}\ \left[\frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Exercice d'application 3.77. Résoudre l'équation $(E_4) : \sin(x) + \cos(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. $\cos(x) + \sin(x) = 1 \iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)\right) = 1$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\iff x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

L'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

3.5.3. Inéquations trigonométriques

Proposition 3.78.

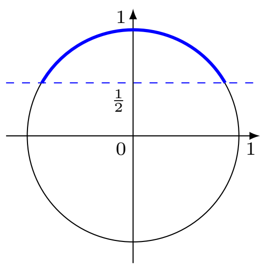
1. Pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $\sin(x) > 0$ si et seulement si $x \in]0, \pi[$.
2. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque technique 3.79. Pour résoudre une inéquation trigonométrique, la première étape consiste à réduire l'intervalle d'étude en utilisant la périodicité des fonctions mises en jeu. Pour cela, une étude préalable au brouillon est nécessaire.

Exercice d'application 3.80. Résoudre l'inéquation $2\sin(2x-4) > 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ *Au brouillon.* On commence par écrire formellement :

$$2\sin(2x-4) > 1 \iff \sin(2x-4) > \frac{1}{2}.$$



Avec un schéma, on constate que cette inéquation est facile à résoudre si $2x - 4 \in [0\,;\,2\pi[$ par exemple (sur cet intervalle, la solution est donnée par un unique intervalle et pas par une union d'intervalles, comme cela aurait été le cas si on avait travaillé sur $[-\pi\,;\,\pi[$ par exemple). Ainsi on est amené à introduire $x \in [2\,;\,2+\pi[$.

Au propre. Soit $x \in [2\,;\,2+2\pi[$. On remarque que $2x - 4 \in [0\,;\,2\pi[$. Donc

$$2\sin(2x-4) > 1 \iff \sin(2x-4) > \frac{1}{2}$$
$$\iff 2x - 4 \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$$
$$\iff x \in \left]\frac{\pi}{12} + 2, \frac{5\pi}{12} + 2\right[$$

Comme $x \longmapsto \sin(2x-4)$ est π-périodique, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left]\frac{\pi}{12} + 2 + k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2 + k\pi\right[$$

Exercice d'application 3.81. Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geqslant \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{7\pi}{2}\right[$.

$$\sin(x) > \cos(2x) \iff 2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

On étudie deux inéquations :

$$\begin{aligned}(F_1):\quad \sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) &\geqslant 0 \quad \text{d'inconnue } x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[\\ (F_2):\quad \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) &\geqslant 0 \quad \text{d'inconnue } x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[$. On remarque que $\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4} \in [-\pi, 5\pi[$. Donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 &\iff \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4} \in \{-\pi\}\cup[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]\cup[4\pi,5\pi[\\ &\iff x \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{17\pi}{6},\frac{7\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[$. On remarque que $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$. Donc

$$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \iff \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

- De plus, la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[$ s'annule uniquement sur $\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}\right\}$.

  Sur la même restriction, la fonction $x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ s'annule uniquement en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Ainsi :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{13\pi}{6}$		$\frac{17\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{2}$
$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[$. On déduit du tableau :

$$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \iff x \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}\right]$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\cup\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]\right)$$

Exercice d'application 3.82. Résoudre l'inéquation $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Soit $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right[$. En particulier $x - \frac{\pi}{4} \in [-\pi\,;\,\pi[$, d'où

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2} \iff x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + 2k\pi\,;\,\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right[$.

Exercice d'application 3.83. Résoudre l'inéquation $6\sin(x) + 8\cos(x) \leqslant 5$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ et $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$.
Soit $x \in \left]\alpha + \frac{\pi}{6}, \alpha + \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$.

$$\begin{aligned} 6\sin(x) + 8\cos(x) \leqslant 5 &\iff \frac{3}{5}\sin(x) + \frac{4}{5}\cos(x) \leqslant \frac{1}{2} \\ &\iff \sin(x - \alpha) \leqslant \frac{1}{2} \\ &\iff x - \alpha \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right] \end{aligned}$$

Comme $x \longmapsto 6\sin(x) + 8\cos(x)$ est 2π-périodique, l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[\alpha + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \alpha + \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

3.5.4. Choix des inconnues

Exercice d'application 3.84. Résoudre l'inéquation $\sin(x) - \cos(2x) = 1$ d'inconnue réelle x.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\sin(x) - \cos(2x) = 1 \iff 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0 \iff \sin(x) \in \left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right\}$$

Il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\sin(\alpha) = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. En remarquant que $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < 1$, on en déduit les solutions de l'équation, à savoir $\{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Exercice d'application 3.85. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) \leqslant \sin(x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in [0, 2\pi[$.

$$\cos(2x) \leqslant \sin(x) \iff 2\sin^2(x) + \sin(x) + 1 \geqslant 0 \iff 2(\sin(x) + 1)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$

On retrouve ainsi l'ensemble des solutions déterminé dans l'Exercice d'application 3.81.

Exercice d'application 3.86. Résoudre l'équation $\sin(x) + \cos(x) = \tan(x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$

- Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\left\{\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

$$\sin(x) + \cos(x) = \tan(x) \iff \tan^4\left(\frac{x}{2}\right) - 4\tan^3\left(\frac{x}{2}\right) - 2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$$

Avec un logiciel de calcul formel, on détermine que l'équation $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 1 = 0$ d'inconnue $y \in \mathbf{R}$ admet comme seules solutions, à 10^{-3} près, $0,514$ et $4,439$, notées α et β. Donc

$$\sin(x) + \cos(x) = \tan(x) \iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha \quad \text{ou} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \beta$$

Si on note $\begin{cases} \alpha' \in \mathbf{R} & \text{tel que} & \tan(\alpha') = \alpha \\ \beta' \in \mathbf{R} & \text{tel que} & \tan(\beta') = \beta \end{cases}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation,

$$S \cap \mathbf{R} \backslash \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} = \{2\alpha' + 2k\pi, 2\beta' + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

- Soit $k \in \mathbf{Z}$.

$$\sin(\pi + 2k\pi) + \cos(\pi + 2k\pi) - \tan(\pi + 2k\pi) = -1$$

Finalement,

$$S = \{2\alpha' + 2k\pi, 2\beta' + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

3.6. Fonctions trigonométriques réciproques

3.6.1. La fonction arccosinus

cos est continue, strictement décroissante sur $[0, \pi]$, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Elle établit donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 3.87.

On appelle **arccosinus**, et on note Arccos, la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

On a donc Arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

Proposition 3.88.

Soit $x \in [-1, 1]$.

1. $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$.
2. $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}(x)$.

Démonstration. 1. Découle de la définition.

2. $\cos^2(\text{Arccos}(x)) + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 \iff x^2 + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1$. Or $\text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$, donc $\sin(\text{Arccos}(x)) \in [0, 1]$, d'où $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\begin{cases} \cos(\text{Arccos}(-x)) & = & -x \\ \cos(\pi - \text{Arccos}(x)) & = & -\cos(\text{Arccos}(x)) \end{cases}$, donc $\cos(\text{Arccos}(-x)) = \cos(\pi - \text{Arccos}(x))$. Or $\begin{cases} \text{Arccos}(-x) & \in & [0, \pi] \\ \pi - \text{Arccos}(x) & \in & [0, \pi] \end{cases}$, donc $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}(x)$. □

◇◇

Remarque technique 3.89. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\text{Arccos}(\cos(x))$ est l'unique solution de l'équation $\cos(y) = \cos(x)$ d'inconnue $y \in [0, \pi]$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x - y$ ou $x + y$ soit un multiple de 2π. En particulier, on retrouve que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$.

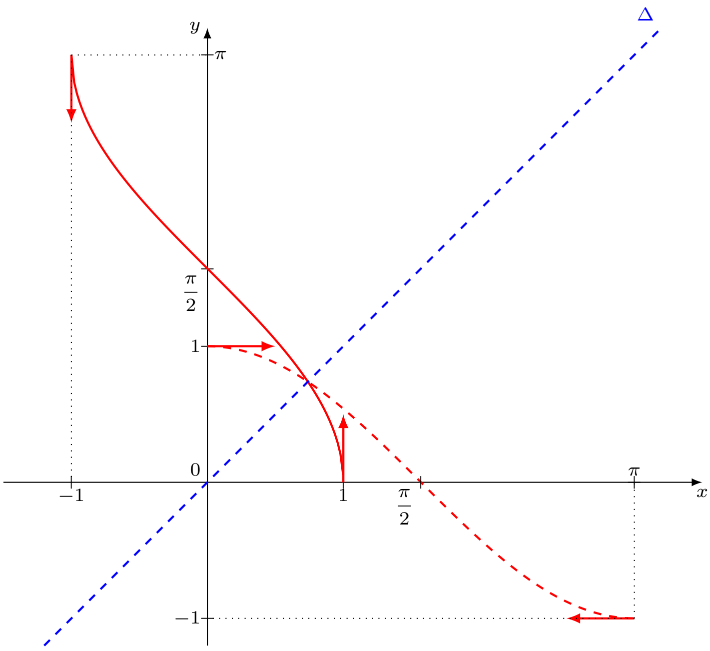
Il faut donc faire très attention. Si $x \notin [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) \neq x$.

Exercice d'application 3.90. Calculer $\text{Arccos}(\cos(16\pi/3))$.

$\hookrightarrow$ On cherche l'unique réel $y \in [0, \pi]$ tel que $\cos(y) = \cos(16\pi/3)$. On remarque que l'on a $16\pi/3 - 6\pi < 0$ et $-16\pi/3 - 4\pi > \pi$ donc on ne peut pas trouver de réel y qui diffère de $16\pi/3$ d'un multiple entier de 2π. Cette étape est inutile du point de vue de la logique puisque l'étape suivante permet de déterminer y et que l'on a unicité de la solution au problème posé ; mais, en pratique, il faut bien commencer par tester une des deux formes de y !
Comme $-16\pi/3 + 6\pi = 2\pi/3$ et comme $2\pi/3 \in [0, \pi]$, la simple définition de la fonction Arccos assure que $\text{Arccos}(\cos(16\pi/3)) = 2\pi/3$.

◇◇

Sur le schéma ci-contre, on a tracé le graphe de la fonction cosinus (en pointillés) et celui de la fonction arccosinus (en trait plein), qui est évidemment le symétrique du premier par rapport à la droite Δ, première bissectrice du repère de travail. La fonction cosinus est continue, c'est-à-dire que son graphe peut être tracé « sans lever le crayon ». Cette simple considération géométrique assure qu'il en est de même de la fonction arccosinus. Dans le même ordre d'idée, le graphe de la fonction arccosinus admet une tangente en tout point m, qui est l'image par la symétrie axiale orthogonale s d'axe Δ de la tangente au graphe de cosinus au point $s(m)$. Il s'ensuit que la fonction arccosinus est dérivable en tout point de $]-1, 1[$ et n'est pas dérivable en -1 ni en 1.



◇◇

Remarque technique 3.91. Lorsqu'on veut démontrer une égalité ou résoudre une équation avec Arccos, on compose souvent par la fonction cos et on utilise le résultat suivant :

$$\forall (a, b) \in [0\,;\,\pi]^2, \quad \cos(a) = \cos(b) \iff a = b.$$

(le sens réciproque est évident ; pour le sens direct, si $\cos(a) = \cos(b)$ avec $(a, b) \in [0\,;\,\pi]^2$, alors $\text{Arccos}(\cos(a)) = \text{Arccos}(\cos(b))$ puis $a = b$ puisque $(a, b) \in [0\,;\,\pi]^2$).

Exercice d'application 3.92. Résoudre l'équation $\text{Arccos}(x) = 2\,\text{Arccos}(\frac{3}{4})$ d'inconnue $x \in [-1\,;\,1]$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in [-1\,;\,1]$. On a $\text{Arccos}(\frac{3}{4}) \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ puis $2\,\text{Arccos}(\frac{3}{4}) \in [0\,;\,\pi]$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Arccos}(x) = 2\,\text{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) &\iff \cos(\text{Arccos}(x)) = \cos\left(2\,\text{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\ &\iff x = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{8}\right\}$.

◇◇

Proposition 3.93.

La fonction Arccos est continue.

Démonstration.
Découle de la Proposition 3.17. □

Proposition 3.94.

La fonction Arccos est dérivable seulement sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$, $\left(\text{Arccos}\,|_{]-1,1[}\right)'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration.
La fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et, pour tout $x \in [0,\pi]$, $\cos'(x) = 0 \iff x \in \{0,\pi\}$. Le Théorème 3.18 assure alors que Arccos est dérivable sur $[-1,1]\backslash\{\text{Arccos}(0), \text{Arccos}(\pi)\}$, *i.e.* sur $]-1,1[$. Le théorème fournit également, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'après la Proposition 3.88. □

3.6.2. La fonction arcsinus

sin est continue, strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Elle établit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.

Définition 3.95.

On appelle **arcsinus**, et on note Arcsin, la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

On a donc Arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Proposition 3.96.

Soit $x \in [-1,1]$.

1. $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$.
2. $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$.

Démonstration. 1. Découle de la définition.

2. $\cos^2(\text{Arcsin}(x)) + \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 \iff x^2 + \cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1$. Or $\text{Arcsin}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \in [0,1]$, d'où $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\left\{\begin{array}{rcl} \sin(\text{Arcsin}(-x)) & = & -x \\ \sin(-\text{Arcsin}(x)) & = & -\sin(\text{Arcsin}(x)) \end{array}\right.$, donc $\sin(\text{Arcsin}(-x)) = \sin(-\text{Arcsin}(x))$.
Or $\left\{\begin{array}{rcl} \text{Arcsin}(-x) & \in & [-\pi/2, \pi/2] \\ -\text{Arcsin}(x) & \in & [-\pi/2, \pi/2] \end{array}\right.$, donc $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$. □

◇◇

Remarque technique 3.97. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\text{Arcsin}(\sin(x))$ est l'unique solution de l'équation $\sin(y) =$

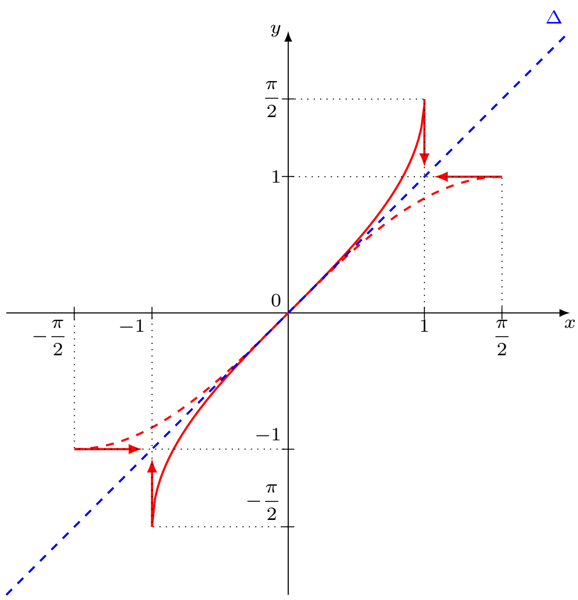
$\sin(x)$ d'inconnue $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$ tel que $x - y$ ou $x + y - \pi$ soit un multiple de 2π. En particulier, on retrouve que pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

Il faut donc faire très attention. Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$.

Exercice d'application 3.98. Calculer $\mathrm{Arcsin}(\sin(16\pi/3))$.

$\hookrightarrow$ On cherche l'unique réel $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(y) = \sin(16\pi/3)$. On remarque que l'on a $16\pi/3 - 6\pi < -\pi/2$ et $16\pi/3 - 4\pi > \pi/2$ donc on ne peut pas trouver de réel y qui diffère de $16\pi/3$ d'un multiple entier de 2π. Cette étape est inutile du point de vue de la logique puisque l'étape suivante permet de déterminer y et que l'on a unicité de la solution au problème posé ; mais, en pratique, il faut bien commencer par tester une des deux formes de y !
Comme $-16\pi/3 + 5\pi = -\pi/3$ et comme $-\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$, la simple définition de la fonction Arcsin assure que $\mathrm{Arcsin}(\sin(16\pi/3)) = -\pi/3$.

Sur le schéma ci-contre, on a tracé le graphe de la fonction sinus (en pointillés) et celui de la fonction arcsinus (en trait plein), qui est évidemment le symétrique du premier par rapport à la droite Δ, première bissectrice du repère de travail. La fonction sinus est continue, c'est-à-dire que son graphe peut être tracé « sans lever le crayon ». Cette simple considération géométrique assure qu'il en est de même de la fonction arcsinus. Dans le même ordre d'idée, le graphe de la fonction arcsinus admet une tangente en tout point m, qui est l'image par la symétrie axiale orthogonale s d'axe Δ de la tangente au graphe de cosinus au point $s(m)$. Il s'ensuit que la fonction arcsinus est dérivable en tout point de $]-1, 1[$ et n'est pas dérivable en -1 ni en 1.



Remarque technique 3.99. Lorsqu'on veut démontrer une égalité ou résoudre une équation avec Arcsin, on compose souvent par la fonction sin et on utilise le résultat suivant :

$$\forall (a, b) \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]^2, \quad \sin(a) = \sin(b) \Longleftrightarrow a = b.$$

Proposition 3.100.

La fonction Arcsin est continue.

Démonstration.
Découle de la Proposition 3.17. □

Proposition 3.101.

La fonction Arcsin est dérivable seulement sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\left(\mathrm{Arcsin}\,|_{]-1,1[}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Démonstration.
La fonction sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin'(x) = 0 \iff x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. Le Théorème 3.18 assure alors que Arcsin est dérivable sur $[-1,1]\backslash\{\mathrm{Arcsin}(-\frac{\pi}{2}), \mathrm{Arcsin}(\frac{\pi}{2})\}$, *i.e.* sur $]-1,1[$. Le théorème fournit également, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'après la Proposition 3.96. □

3.6.3. La fonction arctangente

tan est continue, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\pi/2 \\ x>-\pi/2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2 \\ x<\pi/2}} \tan(x) = +\infty$. Elle établit donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

Définition 3.102.

On appelle **arctangente**, et on note Arctan, la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

On a donc $\mathrm{Arctan} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbf{R}$.

Proposition 3.103.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

1. $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$;
2. $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
3. $\mathrm{Arctan}(-x) = -\mathrm{Arctan}(x)$;
4. $\sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Démonstration. 1. Découle directement de la définition de Arctan.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.
$$\cos(\mathrm{Arctan}(x))^2 = \frac{1}{1+\tan(\mathrm{Arctan}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$
Comme Arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ et comme cosinus ne prend que des valeurs positives sur cet intervalle, on en déduit la formule recherchée.
3. Découle des deux points précédents, puisque $\sin = \tan \times \cos$.
4. Soit $x \in \mathbf{R}$. On remarque que $\tan(-\mathrm{Arctan}(x)) = -\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = -x = \tan(\mathrm{Arctan}(-x))$. Autrement dit, $-\mathrm{Arctan}(x)$ et $\mathrm{Arctan}(-x)$ sont deux solutions de l'équation $\tan(y) = -x$ d'inconnue $y \in \mathbf{R}$ et ces deux solutions appartiennent à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi $\mathrm{Arctan}(-x) = -\mathrm{Arctan}(x)$. Finalement, la fonction Arctan est impaire. □

Remarque technique 3.104. Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. $\mathrm{Arctan}(\tan(x))$ est l'unique solution de l'équation $\tan(y) = \tan(x)$ d'inconnue $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $x-y$ soit un multiple de π. En particulier, on retrouve que pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$.

Il faut donc faire très attention. Si $x \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) \neq x$.

Exercice d'application 3.105. Calculer $\mathrm{Arctan}(\tan(16\pi/3))$.

↪ Comme $16\pi/3 - 5\pi = \pi/3$ et comme $\pi/3 \in]-\pi/2, \pi/2[$, la simple définition de la fonction Arctan assure que $\text{Arctan}(\tan(16\pi/3)) = \pi/3$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 3.106. Lorsqu'on veut démontrer une égalité ou résoudre une équation avec Arctan, on compose souvent par la fonction tan et on utilise le résultat suivant :

$$\forall (a,b) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[^2, \quad \tan(a) = \tan(b) \Longleftrightarrow a = b.$$

◇◇

Proposition 3.107.

La fonction Arctan est continue.

Démonstration.
Découle de la Proposition 3.17. □

Proposition 3.108.

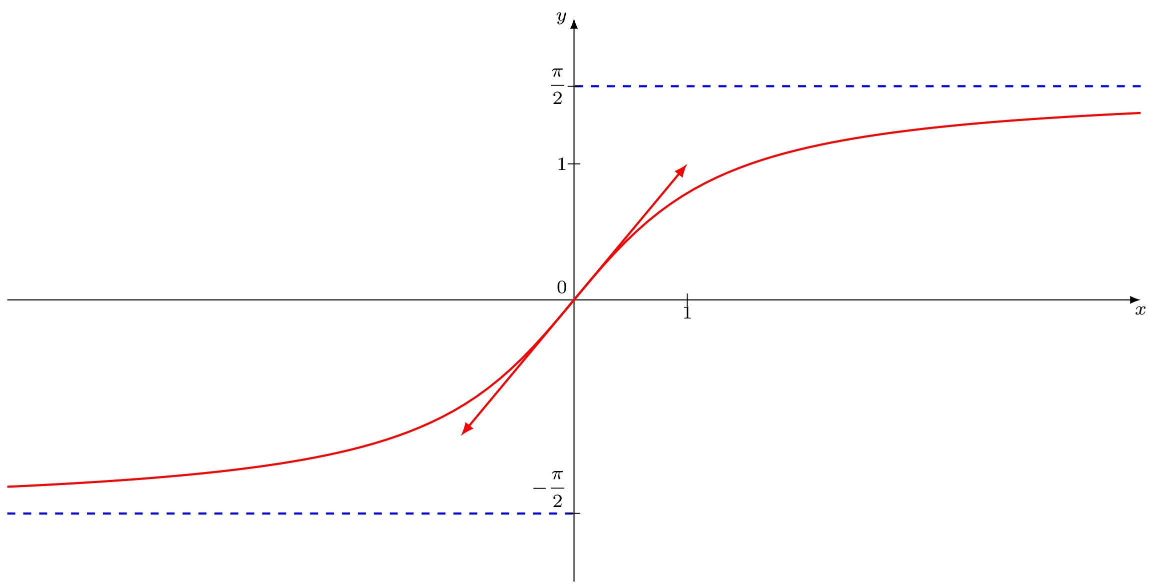
La fonction Arctan est dérivable sur **R** et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration.
La fonction tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) \neq 0$. Le Théorème 3.18 assure alors que Arctan est dérivable sur **R** et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Graphe de la fonction arctangente



Chapitre 4

Nombres complexes

Le plus court chemin entre deux vérités du domaine réel passe par le domaine complexe.

Jacques Hadamard [1]

Le numéro que vous avez composé est imaginaire. Veuillez tourner le téléphone de 90 degrés.

4.1. Présentation

4.1.1. Ensemble C et opérations

Définition 4.1.

L'ensemble **C** des **nombres complexes** est l'ensemble des nombres qui s'écrivent de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels, muni des opérations d'addition et de multiplication définies par

- addition : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$,
- multiplication : $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

En particulier, on a

$$i^2 = -1.$$

1. Jacques HADAMARD - mathématicien français (1865-1963). Il est connu pour sa démonstration du théorème des nombres premiers (qui donne un comportement de la répartition des nombres premiers en l'infini) à l'aide de nombres complexes.

Les calculs dans $\mathbf{C}$ s'effectuent exactement comme dans $\mathbf{R}$ en remplaçant chaque occurrence de i^2 par -1. Mais attention, il est impossible d'établir un ordre sur $\mathbf{C}$ qui prolonge l'ordre sur $\mathbf{R}$ et qui obéisse aux mêmes règles.

⚠ **Attention** ⚠**.** Il ne faut donc jamais écrire une inégalité entre nombres complexes (sauf si ce sont des nombres réels).

Définition 4.2.

Si $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, alors a et b sont appelés respectivement la **partie réelle** et la **partie imaginaire** de z. On les note $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$. L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe, où a et b sont deux nombres réels, est appelée **la forme algébrique** de z.

Remarque 4.3. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel !

Exemple 4.4. $\mathfrak{Im}(3 + 5i) = 5$.

Remarque 4.5. Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : pour tous nombres complexes z et z',

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z'). \end{cases}$$

L'ensemble des nombres complexes de la forme $a + 0i$ est naturellement identifié à $\mathbf{R}$. Un nombre réel est donc aussi un nombre complexe.

Définition 4.6.

Les nombres complexes de la forme ib où $b \in \mathbf{R}$ sont appelés les **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbf{R}$.

Exercice d'application 4.7. Soit a un nombre complexe et z le nombre complexe $z = a^2 + i(a+1)$. Quelles sont les parties réelle et imaginaire de z ?

$\hookrightarrow$ On a $a = \mathfrak{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a)$. Alors

$$z = (\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a))^2+i(\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a)+1) = \mathfrak{Re}(a)^2-\mathfrak{Im}(a)^2+2i\,\mathfrak{Re}(a)\,\mathfrak{Im}(a)+i\,\mathfrak{Re}(a)-\mathfrak{Im}(a)+i$$

$$z = \left(\mathfrak{Re}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)\right) + i\left(2\,\mathfrak{Re}(a)\,\mathfrak{Im}(a) + \mathfrak{Re}(a) + 1\right)$$

On a bien mis z sous la forme $x + iy$ avec x et y réel, donc $\mathfrak{Re}(z) = \left(\mathfrak{Re}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)\right)$ et $\mathfrak{Im}(a) = (2\,\mathfrak{Re}(a)\,\mathfrak{Im}(a) + \mathfrak{Re}(a) + 1)$.

Proposition 4.8 - Linéarité des parties réelle et imaginaire.

Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$,

$$\mathfrak{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathfrak{Re}(z) + \mu\,\mathfrak{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathfrak{Im}(z) + \mu\,\mathfrak{Im}(z').$$

Démonstration.
On a :

$$\lambda z+\mu z' = \lambda(\mathfrak{Re}(z)+i\,\mathfrak{Im}(z))+\mu(\mathfrak{Re}(z')+i\,\mathfrak{Im}(z')) = \left(\lambda\,\mathfrak{Re}(z) + \mu\,\mathfrak{Re}(z')\right)+i\left(\lambda\,\mathfrak{Im}(z) + \mu\,\mathfrak{Im}(z')\right),$$

d'où le résultat. □

4.1.2. Structure de C

On constate que :

- La somme de deux nombres complexes est un nombre complexe. On dit que l'addition sur **C** est **interne**.
  Toutes les opérations ne sont pas internes ; pensez au produit scalaire.
- L'addition sur **C** est **associative** :

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ (z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

  Toutes les opérations ne sont pas associatives ; pensez aux puissances : $(3^3)^3 \neq 3^{(3^3)}$.
- Le nombre complexe 0 est un **élément neutre** pour l'addition :

$$\forall z \in \mathbf{C},\ z + 0 = 0 + z = z.$$

- Tout nombre complexe $z = a + ib$ admet un **opposé** dans **C**, noté $-z$, qui est égal à $-a + i(-b)$. (l'opposé d'un nombre z est par définition un nombre z' tel que $z + z' = z' + z = 0$.)

Pour résumer ces quatre propriétés, on dit que $(\mathbf{C}, +)$ est un groupe.

- L'addition sur **C** est **commutative** :

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ z + z' = z' + z.$$

  Toutes les opérations ne sont pas commutatives ; pensez à la soustraction des nombres réels.

Cette cinquième propriété permet de préciser la structure de **C** : $(\mathbf{C}, +)$ est un groupe commutatif.

- Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe : la multiplication sur **C** est **interne**.
- La multiplication dans **C** est **associative** :

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ (zz')z'' = z(z'z'')$$

- Le nombre complexe 1 est un **élément neutre** pour la multiplication :

$$\forall z \in \mathbf{C},\ z \times 1 = 1 \times z = z.$$

- La multiplication dans **C** est **distributive** par rapport à l'addition :

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ z(z' + z'') = zz' + zz'' \quad \text{et} \quad (z' + z'')z = z'z + z''z.$$

  Autrement dit : on peut développer !

Avec ces quatre nouvelles propriétés, ajoutées au cinq précédentes, on dit que : $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un anneau.

- La multiplication dans **C** est **commutative** :

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ zz' = z'z.$$

Cette dixième propriété précise la structure de $(\mathbf{C}, +, \times)$: $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- Tout nombre complexe non nul admet un **inverse** (pour la multiplication) : Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul , alors $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ vérifie $zz' = z'z = 1$.

Avec cette dernière propriété, ajoutée aux dix précédentes, on dit que : $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Remarque 4.9. $(\mathbf{R}, +, \times)$ est aussi un corps commutatif.

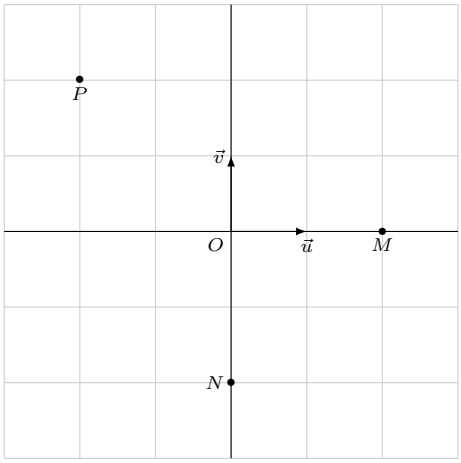
4.1.3. Le plan complexe

Définition 4.10.

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. A tout point M du plan, de coordonnées (x,y), on associe le nombre complexe $x+iy$, dit **affixe** de z. Réciproquement, pour tout nombre complexe $z=x+iy$, avec $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, le point du plan de coordonnées (x,y) est l'unique point d'affixe z.
On appelle **plan complexe** (ou **plan de Cauchy**) cette représentation du plan euclidien par les nombres complexes.

Dans toute la suite, on se donne un plan de Cauchy muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Exemple 4.11. Sur la figure ci-dessous, les points M, N et P sont d'affixes respectives 2, $-2i$ et $-2+2i$.



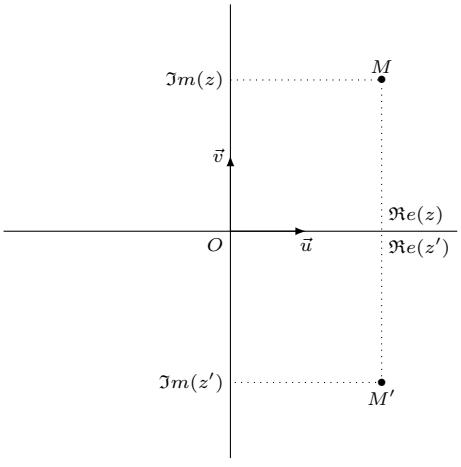
4.1.4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 4.12.

Soit $z\in\mathbf{C}$.
On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le complexe $\mathfrak{Re}(z)-i\,\mathfrak{Im}(z)$.

Interprétation géométrique :

Soit $z\in\mathbf{C}$. Le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des réels (*i.e.* l'axe des abscisses).
Ce résultat sera démontré ultérieurement.



Proposition 4.13.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
3. $\overline{-z} = -\overline{z}$;
4. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
5. si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

Démonstration.
On pose $a = \Re e(z)$, $b = \Im m(z)$, $a' = \Re e(z')$ et $b' = \Im m(z)$

1. $\overline{z} = a - ib$, donc $\overline{\overline{z}} = a + ib = z$.
2. $\overline{z + z'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - ib - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$.
3. $\overline{-z} = \overline{-a - ib} = -a + ib = -(a - ib) = -\overline{z}$.
4. $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = (a - ib)(a' - ib') = \overline{z} \times \overline{z'}$.
5. On suppose $z \neq 0$, donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
$$\overline{\left(\frac{1}{a + ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a - ib} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

□

Proposition 4.14.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

- $\Re e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$;
- $\Im m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;
- $z \in \mathbf{R}$ ssi $z = \overline{z}$;
- $z \in i\mathbf{R}$ ssi $z = -\overline{z}$.

Démonstration.
On a $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = a$ et $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b$ On en déduit que $z \in \mathbf{R}$ ssi $\Im m(z) = 0$ ssi $z - \overline{z} = 0$ ssi $z = \overline{z}$, et $z \in i\mathbf{R}$ ssi $\Re e(z) = 0$ ssi $z + \overline{z} = 0$ ssi $z = -\overline{z}$. □

Remarque technique 4.15. Soit $z \in \mathbf{C}$. On a $z\overline{z} = \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2$. Ainsi on peut déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe en multipliant son dénominateur et son numérateur par la forme conjuguée du dénominateur.

Exercice d'application 4.16. Écrire le nombre complexe $z = \dfrac{1 - i}{2 + 3i}$ sous forme algébrique.

$\hookrightarrow z = \dfrac{1 - i}{2 + 3i} = \dfrac{(1 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{2 - 2i - 3i - 3}{4 + 9} = \dfrac{-1}{13} + i\dfrac{-5}{13}$.

4.2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

4.2.1. Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbf{C}$. Puisque $z\overline{z} = \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2$, on a $z\overline{z} \in \mathbf{R}^+$. On peut donc poser :

Définition 4.17.

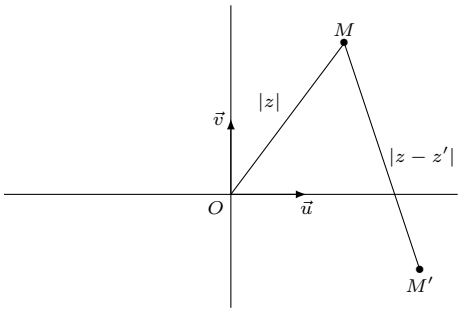
On appelle **module** d'un nombre complexe z et on note $|z|$ lé réel

$$\sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}, \text{ ie } \sqrt{z\bar{z}}.$$

Interprétation géométrique :

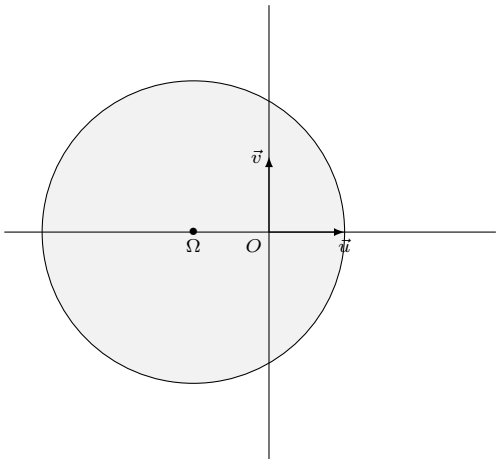
Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On considère M et M' d'affixes respectives z et z'. Alors :

- $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$.
- $|z - z'|$ est la distance entre M et M'.



Exercice d'application 4.18. Représenter l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait $|z+1| \leqslant 2$.

$\hookrightarrow$ L'ensemble regroupe tous les points qui sont à une distance inférieure à 2 du point Ω d'affixe -1, *i.e.* le disque centré en Ω et de rayon 2.



Proposition 4.19.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;
2. $|z| = 0$ ssi $z = 0$;
3. $|zz'| = |z| \times |z'|$;
4. si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$;

Démonstration. 3. $|zz'|^2 = z\bar{z}z'\bar{z'} = zz'\bar{z}\bar{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$.

Les autres points se montrent tout aussi facilement. □

Lemme 4.20.

Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\begin{cases} |\mathfrak{Re}(z)| & \leqslant & |z| \\ |\mathfrak{Im}(z)| & \leqslant & |z| \end{cases}$$

Démonstration.
$|z^2| = \mathfrak{Im}(z)^2 + \mathfrak{Re}(z)^2$. Donc $|z|^2 \geqslant \mathfrak{Re}(z)^2$, puis $|z| \geqslant |\mathfrak{Re}(z)|$. L'autre point se montre de la même manière. □

Lemme 4.21.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$;
2. $|z - z'|^2 = |z|^2 - 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$.

Démonstration. 1. $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z' + z'\overline{z'} = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$ d'après la Proposition 4.14.

2. En utilisant 1., on a : $|z - z'| = |z + (-z')| = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z(\overline{-z'})) + |-z'|^2 = |z|^2 - 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$. □

Proposition 4.22 - Inégalités triangulaires.

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On a :

- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (**inégalité triangulaire**).
- $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $z = kz'$.
- $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$ (**seconde inégalité triangulaire**).

Démonstration. • $(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 = 2|zz'| - 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) = 2|z\bar{z'}| - 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z'})$.
Or $|z\bar{z'}| \geqslant \mathfrak{Re}(z\bar{z'})$, donc $(|z| + |z'|)^2 \geqslant |z + z'|^2$, puis $|z| + |z'| \leqslant |z + z'|$.

- Supposons que $|z + z'| = |z| + |z'|$. Le calcul précédent donne $0 = |z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2 = 2(|z\bar{z'}| - \mathfrak{Re}(z\bar{z'}))$, et cette égalité entraîne que $\mathfrak{Im}(z\bar{z'}) = 0$, puis que $z\bar{z'} \in \mathbf{R}$. Or $\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) = |zz'|$, d'où $z\bar{z'} \in \mathbf{R}_+$ (en effet, $|zz'|^2 = |z\bar{z'}|^2 = \mathfrak{Re}(z\bar{z'})^2 + \mathfrak{Im}(z\bar{z'})^2$, donc $\mathfrak{Im}(z\bar{z'}) = 0$ puis $\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) = |z\bar{z'}| \geqslant 0$). Ainsi, il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $z\bar{z'} = k$ ce qui fournit, en multipliant par z', $z|z'|^2 = kz'$. Si $z' \neq 0$, alors $\bar{z} = \frac{k'}{|z'|^2} z'$.
  Si $z' = 0$, l'inégalité triangulaire est clairement une égalité. Supposons qu'il existe $k \in \mathbf{R}^+$ tel que $z = kz'$. Alors, puisque $k \geqslant 0$,

$$|z + z'| = |(k+1)z'| = (k+1)|z'| = |kz'| + |z'| = |z| + |z'|.$$

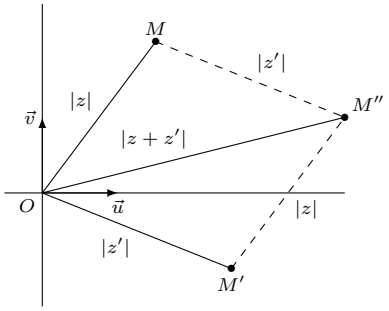
- Puisque $(z + z', -z) \in \mathbf{C}^2$, on obtient avec le point précédent $|z'| \leqslant |z + z'| + |-z|$, puis $|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$.
  De même, puisque $(z + z', -z) \in \mathbf{C}^2$, $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$.
  Finalement, $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$. □

Interprétation géométrique :

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. On considère M, M' et M'' d'affixes respectives z, z' et $z+z'$. L'inégalité triangulaire peut se traduire par :

$$\|\overrightarrow{OM''}\| \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{OM'}\|.$$

avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et de même sens.



Corollaire 4.23 - Inégalité triangulaire généralisée.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n$,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} z_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{n} |z_p|.$$

Démonstration.
Une récurrence permet de conclure. □

4.2.2. Argument d'un complexe et écriture trigonométrique

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On note M le point d'affixe z. On note α une mesure de $(\overrightarrow{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$. On a :

$$\boxed{z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\boxed{\mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$$

Définition 4.24.

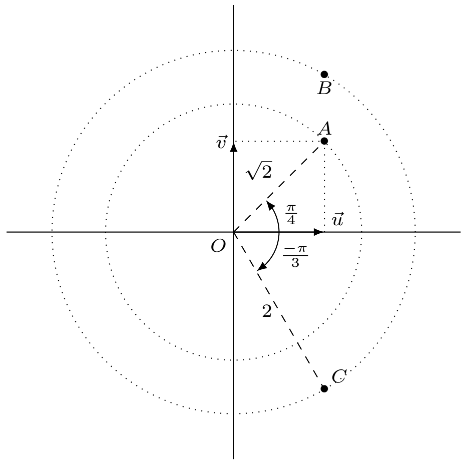
Pour tout $z \in \mathbf{C}^\star$, il existe un $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\alpha}$. α est appelé un **argument** de z.
Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. L'écriture de z sous la forme $z = |z|\mathrm{e}^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$, s'appelle **écriture trigonométrique** de z.

Remarque 4.25. 0 n'a pas d'écriture trigonométrique.

4.2.3. Calcul d'un argument

Exemple 4.26. • $1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$;
- $1+\sqrt{3}i=2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$;
- $1-\sqrt{3}i=2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$;

Sur la figure ci-contre, les points A, B et C sont d'affixes respectives $1+i$, $1+\sqrt{3}i$ et $1-\sqrt{3}i$.



◇◇

Remarque technique 4.27. Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tel que $a\neq 0$ et $b\neq 0$. On cherche à calculer numériquement un argument de $a+ib$. Cela revient à trouver $\alpha\in\mathbf{R}$ tel que :

$$\boxed{\cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\text{et}\quad\sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Exercice d'application 4.28. Ecrire sous forme trigonométrique le complexe $z=1+\sqrt{3}i$.

↪ On a $|z|^2=1+3$, d'où $|z|=2$. De plus, pour $\theta\in\mathbf{R}$, le système :

$$\begin{cases}\cos(\theta) & = & \frac{1}{2}\\ \sin(\theta) & = & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

admet $\theta=\frac{\pi}{3}$ comme solution. Donc $z=2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 4.29. Si α n'est pas un angle remarquable, on remarque que

$$\tan(\alpha)=\frac{b}{a}.$$

On localise α dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, $\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ grâce aux signes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. On calcule ensuite $\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ et on remet dans le bon ensemble.

Exercice d'application 4.30. Calculer, à 10^{-3} près, un argument de $2-i$ appartenant à $[0,2\pi[$.

↪ On appelle α l'argument de $2-i$ appartement à $[0;2\pi[$. Comme $\cos\alpha>0$ et $\sin\alpha<0$, $\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$. De plus, $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$. Comme $\mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{2}\right)=-0,463$ rad à 10^{-3} près, $\alpha=5,819$ rad à 10^{-3} près.

◇◇

◇◇

Remarque technique 4.31. Il faut être vigilant : si un nombre complexe est écrit sous la forme $r\mathrm{e}^{i\theta}$, où $(r,\theta)\in\mathbf{R}^2$, il n'est pas nécessairement sous sa forme trigonométrique. Si $r<0$, on écrit $r\mathrm{e}^{i\theta}=(-1)\times\mathrm{e}^{i\pi}\times r\times\mathrm{e}^{i\theta}=(-r)\times\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}$ qui est sous forme trigonométrique.

Exercice d'application 4.32. Donner la forme trigonométrique de $-2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{8}}$.

↪ On a $-2e^{\frac{i\pi}{8}} = 2e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{8}} = 2e^{\frac{9i\pi}{8}}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 4.33. Soit $(r, r', t, t') \in \mathbf{R}^4$.

Pour résoudre $re^{it} = r'e^{it'}$, il y a trois cas à traiter :

1. $r = r' = 0$;
2. $r = r'$ et $t - t' \equiv 0\ [2\pi]$;
3. $r = -r'$ et $t - t' \equiv \pi\ [2\pi]$.

Exercice d'application 4.34. Déterminer l'ensemble $\{(r, t) \in \mathbf{R}^2,\ re^{it} = 1 + i\}$.

↪ Soit $(r, t) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} re^{it} = 1 + i &\iff re^{it} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff \begin{cases} r &= \sqrt{2} \\ t - \frac{\pi}{4} &\equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r &= -\sqrt{2} \\ t - \frac{\pi}{4} &\equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est égal à $\left\{\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\ :\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 4.35. Pour résoudre une équation d'inconnue $|z|$, $\overline{z}$, etc. il peut être utile de cherche z sous forme algébrique ou sous forme trigonométrique.

Exercice d'application 4.36. Résoudre l'équation $\frac{\overline{z}}{z+1} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

↪ Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\{1\}$. Notons $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$.

$$\frac{\overline{z}}{z+1} = 1 \iff a - ib = a + ib + 1$$

En observant la partie réelle de l'égalité précédente, on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde. Ainsi l'équation n'a pas de solution.

◇◇

4.2.4. Propriétés de l'exponentielle complexe

Proposition 4.37.

Soit $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

1. $e^{it}e^{it'} = e^{i(t+t')}$;
2. $\frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$;
3. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$.

Démonstration. 1. $e^{it}e^{it'} = (\cos(t) + i\sin(t))(\cos(t') + i\sin(t')) = \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t') + i(\sin(t)\cos(t') + \sin(t)\cos(t')) = \cos(t + t') + i\sin(t + t') = e^{i(t+t')}$.

2. $e^{it}e^{-it} = e^{i(t-t} = 1$, donc $e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$.
3. $\overline{e^{it}} = \overline{(\cos(t) + i\sin(t)} = \cos(t) - i\sin(t) = \cos(-t) + i\sin(-t) = e^{-it}$. □

◇◇

Remarque technique 4.38. Soit $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

- $e^{it} + e^{it'} = 2\cos\left(\frac{t-t'}{2}\right) e^{i\frac{t+t'}{2}}$;
- $e^{it} - e^{it'} = 2i\sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) e^{i\frac{t+t'}{2}}$.

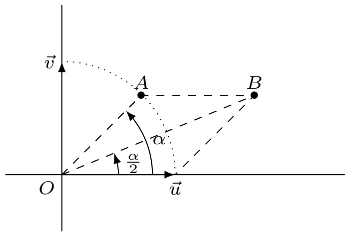
Démonstration.
$e^{it} + e^{it'} = e^{it'/2}(e^{i(t-t'/2)} + e^{it'/2}) = e^{it/2}e^{it'/2}(e^{i(t/2-t'/2)} + e^{i(t'/2-t/2)}) = 2e^{(t+t')/2}\cos((t-t')/2)$.
L'autre égalité se montre de la même manière. □

Exercice d'application 4.39. Trouver le module et un argument de $1 + e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ $1 + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, $|1 + e^{i\alpha}| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et un argument de $1 + e^{i\alpha}$ est $\frac{\alpha}{2}$.
- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$, $|1 + e^{i\alpha}| = 0$. Il n'y a pas d'argument.
- Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$, $|1 + e^{i\alpha}| = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et un argument de $1 + e^{i\alpha}$ est $\frac{\alpha}{2} + \pi$.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha/2) > 0$. Sur la figure ci-contre, les points A et B sont pour affixes respectives $e^{i\alpha}$ et $1 + e^{i\alpha}$.
On retrouve que dans un losange, les diagonales sont également les bissectrices des angles internes.



◇◇

On obtient en particulier qu'un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments, tous égaux à un multiple de 2π près. Ainsi :

Définition 4.40.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On appelle **argument principal** de z, et on note $\arg(z)$, l'unique argument de z situé dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Avec la Proposition 4.37, on obtient les règles opératoires suivantes :

$$\forall (z, z') \in (\mathbf{C}^\star)^2,\ \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

Proposition 4.41.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$.

1. $z \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$.
2. $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Démonstration.
Notons θ un argument de z.

1. $z \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\mathfrak{Im}(z) = 0$, si et seulement si $\sin(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$.
2. $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, si et seulement si $\cos(\theta) = 0$, si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. □

4.2.5. Applications de l'exponentielle complexe

Proposition 4.42 - formule de Moivre.

Pour tout $(n,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$,

$$(\mathrm{e}^{it})^n = \mathrm{e}^{int}.$$

Démonstration.
On démontre la formule pour tout $n \in \mathbf{N}$ par récurrence, puis on en déduit que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbf{Z}$ en utilisant $(\mathrm{e}^{it})^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{-it}$. □

Une application usuelle de cette formule est la factorisation de formes trigonométriques.

Exemple 4.43. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos(3x) = \mathfrak{R}e(\mathrm{e}^{3ix}) = \mathfrak{R}e((\mathrm{e}^{ix})^3) = \mathfrak{R}e((\cos x + i\sin x)^3) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x).$$

De même,

$$\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).$$

Proposition 4.44 - formules d'Euler.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}.$$

Une application de ces formules est la linéarisation des expressions trigonométriques.

Exemple 4.45. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$\sin(x)^3\cos(x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{+ix}}{2}\right)^2$. Donc $\sin(x)^3\cos(x)^2 = -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)$.

Une autre application des formules d'Euler est le calcul explicite de sommes de fonctions trigonométriques.

Exemple 4.46. Soit $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$. On pose $S = \sum_{p=0}^{n} \sin(px)$.

$$S = \sum_{p=0}^{n} \mathfrak{I}m(\mathrm{e}^{ipx}) = \mathfrak{I}m \sum_{p=0}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^p.$$

- Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, $S = 0$.
- Si x n'est pas congru à $0\ [2\pi]$, $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$, puis :

$$S = \mathfrak{I}m\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1}\right) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2}.$$

Exemple 4.47. Soit $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$. On pose $S = \sum_{p=0}^{n} (\cos(px))^3$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\cos(px)^3 = \frac{1}{4}(\cos(3px) + 3\cos(px))$. Donc $S = \frac{1}{4}\mathfrak{R}e\left(\sum_{p=0}^{n} (\mathrm{e}^{i3x})^p\right) + \frac{3}{4}\mathfrak{R}e\left(\sum_{p=0}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^p\right)$.

On distingue trois cas :

1. Si $x \equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\cos(px) = 1$. Donc $S = n+1$.
2. Si $x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ et $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas $\mathrm{e}^{i3x} = 1$ et $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$.

$$S = \frac{n+1}{4} + \frac{3\cos\frac{nx}{2} + \sin\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}.$$

3. Si $x \not\equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ et $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. Dans ce cas $\mathrm{e}^{i3x} \neq 1$ et $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$.

$$S = \frac{\cos\frac{3nx}{2}\sin\frac{3(n+1)x}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}} + \frac{3\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}.$$

4.3. Racine n-ièmes d'un complexe

4.3.1. Définition et expression

Définition 4.48.

Soit $z \in \mathbf{C}$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Une **racine n-ième** de z est un complexe z' tel que $(z')^n = z$.

- Si $n = 1$, z admet une seul racine 1-ième (lui-même).
- Si n est quelconque, 0 admet une seule racine n-ième (lui-même).

Théorème 4.49.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. z admet n racine n-ième. En notant S l'ensemble des racines n-ième de re^{it}, $(r,t) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$, on a :

$$S = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n})i},\ k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n})i},\ k \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Démonstration.

- Soit $z' \in \mathbf{C}^\star$. Il existe $(r,r',t,t') \in (\mathbf{R}^{+\star})^2 \times \mathbf{R}^2$ tel que $\begin{cases} z &= re^{it} \\ z' &= r'\mathrm{e}^{it'} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
(z')^n = z &\iff (r'\mathrm{e}^{it'})^n = re^{it} \\
&\iff (r')^n\mathrm{e}^{itn'} = re^{it} \\
&\iff \begin{cases} (r')^n &= r \\ t - nt' &\equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r' &= r^{\frac{1}{n}} \\ \text{il existe } k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } t' &= \dfrac{t}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

  Comme 0 ne vérifie par $0^n = z$,

$$S = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n})i},\ k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- On pose $S' = \left\{ r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n})i},\ k \in [\![0,n-1]\!] \right\}$.
  - Par définition, $S' \subset S$.

- ○ Soit $z \in S$. Il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i}$. Comme $n \neq 0$, il existe $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $k = an + b$ et $b \in [\![0, n-1]\!]$.

$$z = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2(an+b)\pi}{n}\right)i} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2b\pi}{n}\right)i}.$$

  Finalement, $z \in S'$. Donc $S' \subset S$.
- ○ Donc $S = S'$.

- Soit $(k,k') \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)i}$.

  On sait que $\dfrac{t}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} - \left(\dfrac{t}{n} + \dfrac{2k'\pi}{n}\right) \equiv 0\ [2\pi]$, ie $n | k - k'$.

  Or $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 1-n \leqslant -k' \leqslant 0 \end{cases}$, donc $1 - n \leqslant k - k' \leqslant n - 1$, puis $k = k'$.

  On en déduit que $\mathrm{card}(S') = n$. □

Définition 4.50.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle **racine n-ième de l'unité** les racines n-ièmes de 1.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :

$$\mathbf{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{2i\frac{k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Les racines n-ièmes d'un nombre complexe $z \neq 0$ sont obtenues en multipliant une racine n-ième quelconque par les racines n-ièmes de l'unité.

Remarque technique 4.51. $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a : $\begin{cases} j^3 &= 1 \\ \bar{j} &= j^2 \\ 1 + j + j^2 &= 0 \end{cases}$.

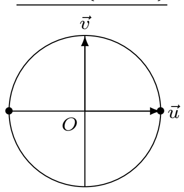
Exercice d'application 4.52. Déterminer $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\dfrac{(1+3j)^2}{1-2j^2} = a + bj$.

$\hookrightarrow \dfrac{(1+3j)^2(1-2j)}{(1-2j^2)(1-2j)} = \dfrac{(1+6j+9j^2)(1-2j)}{1-2j^2-2j+4j^3} = \dfrac{1-2j+6j-12j^2+9j^2-18j^3}{7}$.

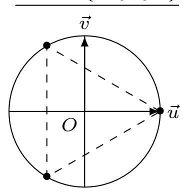
Finalement, $\dfrac{(1+3j)^2}{1-2j^2} = -2 + j$.

Exemple 4.53.

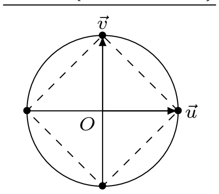
$\mathbf{U}_2 = \{1, -1\}$



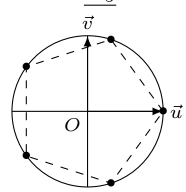
$\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}$



$\mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$



$\mathbf{U}_5$



Proposition 4.54.

Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

$$\sum_{z \in \mathbf{U}_n} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{2i\pi/n})^k = \frac{\mathrm{e}^{2i\pi} - 1}{\mathrm{e}^{2i\pi/n} - 1} = 0.$$

□

◇◇

Remarque technique 4.55. Soit $(a, b, n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$. Soit α une racine n-ième de -1.

$$a^n + b^n = (a - \alpha b) \sum_{p=0}^{n-1} a^n (\alpha b)^{n-p-1}.$$

Si n est impair, on peut choisir $\alpha = -1$.

◇◇

Exemple 4.56. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. Avec la remarque technique précédente, on a $a^2+b^2 = (a-ib)(a+ib)$, $a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (ces identités sont à connaître par cœur).

Remarque 4.57. La notation $\sqrt{x}$ n'est valable que pour $x \in \mathbf{R}_+$ (elle désigne alors l'unique racine 2-ième positive de x, au sens de la Définition 4.48). En particulier, il est interdit d'utiliser le symbole $\sqrt{\cdot}$ pour les éléments de $\mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_+$.

4.3.2. Calcul des racines n-ièmes

Le calcul des racines n-ièmes d'un complexe est immédiat si z est donné sous forme trigonométrique.

Exercice d'application 4.58. Déterminer les racines 3-ièmes de $1 + i$.

$\hookrightarrow$ On a $1 + i = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc l'ensemble des racines 3-ièmes de $1 + i$ est :

$$\left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}},\ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} \right\}.$$

On peut aussi calculer les racines carrées d'un complexe donné sous forme algébrique :

◇◇

Remarque technique 4.59. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Notons z une racine de α. Alors, par identification du module, de la partie réelle et de la partie imaginaire dans l'égalité $z^2 = \alpha$, on tire :

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2 &= |\alpha| \\ \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z)^2 &= \mathfrak{Re}(\alpha) \\ 2\,\mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Im}(z) &= \mathfrak{Im}(\alpha) \end{cases}.$$

Exercice d'application 4.60. Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$.

$\hookrightarrow$ $3+4i$ admet deux racines carrées opposés l'une de l'autre. Il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $(a+ib)^2 = 3+4i$. En particulier, $|a + ib|^2 = 5$. On peut aussi identifier les parties réelle et imaginaire. Donc $\begin{cases} a^2 + b^2 &= 5 \\ a^2 - b^2 &= 3 \\ 2ab &= +4 \end{cases}$, donc $\begin{cases} a^2 &= 4 \\ b^2 &= 1 \\ ab &> 0 \end{cases}$, puis $(a, b) = (2, 1)$ ou $(a, b) = (-2, -1)$. Ainsi les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$.

◇◇

4.3.3. Equation du second degré

On se donne $(a, b, c) \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^2$ pour tout la suite. On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{C}$. Soit $x \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \iff && a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0 \\ \iff && a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) &= 0 \\ \iff && \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \end{aligned}$$

On appelle δ une racine carrée de b^2-4ac (qui est le discriminant de l'équation).

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) = 0 \end{aligned}$$

Proposition 4.61.

L'ensemble des solutions de $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue $x\in\mathbf{C}$ est $\left\{\frac{-b+\delta}{2a},\frac{-b-\delta}{2a}\right\}$ avec $\delta^2=b^2-4ac$.

Définition 4.62.

Les solutions de $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue $x\in\mathbf{C}$ sont dites des **racines** de l'équation. Le nombre b^2-4ac est appelé **discriminant** de l'équation.

Exercice d'application 4.63. Résoudre $z^2+(3i-4)z+1-7i=0$ d'inconnue $z\in\mathbf{C}$.

↪ Le discriminant de l'équation est $3+4i$. On a obtenu à l'Exercice d'Application 4.60 qu'une racine de $3+4i$ est $2+i$. On en déduit que les solutions de l'équation sont $\frac{-(3i-4)+(2+i)}{2}=3-i$ et $\frac{-(3i-4)-(2+i)}{2}=1-2i$.

On appelle x_0 et x_1 les solutions éventuellement confondues de l'équation manipulée.

Soit $x\in\mathbf{C}$. $ax^2+bx+c=0\iff a(x-x_0)(x-x_1)=0$. Donc $ax^2+bx+c=ax^2-a(x_0+x_1)x+ax_0x_1$. Comme cette égalité est vraie pour tout $x\in\mathbf{C}$,

$$\boxed{\begin{cases} x_0+x_1 &= -\dfrac{b}{a} \\ x_0x_1 &= \dfrac{c}{a} \end{cases}}$$

Ces égalités sont appelées **relations coefficients-racines**.

Exercice d'application 4.64. On considère l'équation $2z^2-iz+1+i=0$ d'inconnue $z\in\mathbf{C}$. Calculer la somme des cubes des solutions de l'équation.

↪ On appelle x_0 et x_1 les solutions de l'équation. On sait que $\begin{cases} x_0+x_1 &= \frac{i}{2} \\ x_0x_1 &= \frac{1+i}{2} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} x_0^3+x_1^3 &= (x_0+x_1)^3-3x_0^2x_1-3x_0x_1^2 \\ &= (x_0+x_1)^3-3x_0x_1(x_0+x_1) \\ &= \left(\tfrac{i}{2}\right)^3-3\tfrac{i+1}{2}\times\tfrac{i}{2} \\ &= \tfrac{6-7i}{8}. \end{aligned}$$

4.4. Nombres complexes et géométrie plane

Définition 4.65.

Si A et B sont deux points du plan d'affixes z_A et z_B, on appelle **affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_B - z_A$. Il s'agit de l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

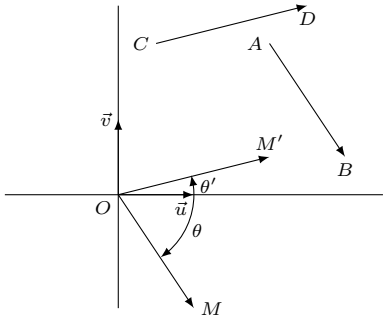
Proposition 4.66.

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Le réel

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

Démonstration.
La notion d'angle orienté n'ayant pas encore été explicitement étudiée, le texte qui suit correspond plutôt à une explication qu'à une démonstration.



On se donne M et M' deux points du plan satisfaisant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{CD}$. Notons θ l'argument principal de $z_B - z_A$. C'est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. De même, notons θ' l'argument principal de $z_D - z_C$, qui est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}})$. Le nombre $\theta' - \theta$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ (on le « voit » sur la figure, mais nous ne l'avons pas démontré...), donc de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$. On peut désormais conclure en écrivant :

$$\theta' - \theta = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A),$$

d'où

$$\theta' - \theta \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi].$$

□

Corollaire 4.67.

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a :

1. $(AB) /\!/ (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.
2. A, B et C sont alignés ssi $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.
3. $(AB) \perp (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbf{R}$.

Démonstration. 1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, *i.e.* si 0 ou π est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$. On a donc :

$$(AB) /\!/ (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$$

d'après la Proposition 4.66.

2. Les points A, B et C sont alignés ssi $(AB) /\!/ (AC)$. On conclut en conduisant un raisonnement similaire à celui de 1.
3. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, *i.e.* si $\pi/2$ ou $-\pi/2$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$. On a donc

$$(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbf{R}$$

d'après la Proposition 4.66. □

Exercice d'application 4.68. Soient A, B et C trois points distincts non alignés, d'affixes respectives a, b et c. Démontrer que le centre du triangle ABC a pour affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

↪ Posons $a' = \frac{b+c}{2}$ l'affixe du milieu de $[BC]$ et $g = \frac{a+b+c}{3}$. On a :

$$g - a = \frac{b + c - 2a}{3} \quad \text{et} \quad g - a' = \frac{2a - b - c}{6},$$

donc,

$$\frac{g - a}{g - a'} = \frac{2b + 2c - 4a}{2a - b - c} = \frac{-1}{2}.$$

Puisque ce dernier nombre est réel, on obtient avec le Corollaire 4.67 que G, C et C' sont alignés, *i.e.* G appartient à la médiane issue de C.
Étant donné la symétrie du problème, on montre de la même manière que G appartient à la médiane issue de A. Ainsi G est le centre de gravité de ABC.

Remarque 4.69. Soient A et B deux points distincts, d'affixes respectives a et b. Soit C un point d'affixe c. En adaptant la démonstration précédente, on peut montrer que :

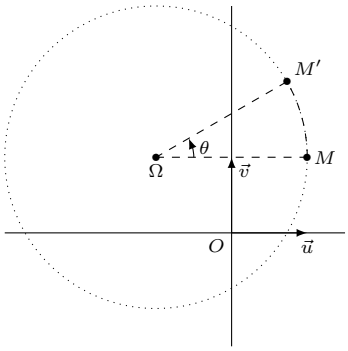
$$(AB) \perp (AC) \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbf{R}.$$

Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$. Si M est d'affixe z, f permet de lui associer naturellement un point M' d'affixe $f(z)$. On peut donc voir f comme une transformation du plan.

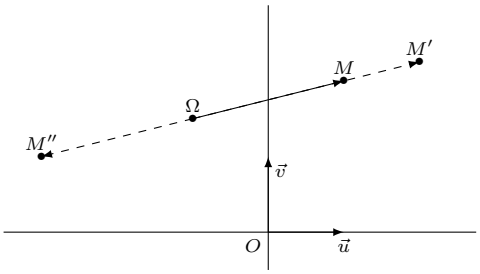
Définition 4.70.

- Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :
  a) $\Omega M = \Omega M'$;
  b) si $M \neq \Omega$, une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$ vaut θ.
- Soit Ω un point du plan et k un réel. L'**homothétie** de rapport k est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Exemple de rotation. Ω et M sont deux points du plan, et M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.



Exemples d'homothéties. Ω et M sont deux points du plan. M' (resp. M'') est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$ (resp. -1).



Proposition 4.71.

- Si $\theta \in \mathbf{R}$, la transformation $z \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.
- Si $b \in \mathbf{C}$, la transformation $z \longmapsto z + b$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$, où B est le point d'affixe b.
- Si $k \in \mathbf{R}$, la transformation $z \longmapsto kz$ est l'homothétie de rapport k et de centre O.
- La transformation $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}\vec{u}$ (l'axe des abscisses).

Démonstration.
Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbf{C}$.

- Notons M' le point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta} z$. Si $M = O$ (*i.e.* $z = 0$) alors $\mathrm{e}^{i\theta} z = 0$, puis $M' = O$.
  Supposons $M \neq O$. On a $OM' = |\mathrm{e}^{i\theta} z| = |z| = OM$. D'autre part, d'après la Proposition 4.66,

une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ est :

$$\arg\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}z - 0}{z - 0}\right) = \arg(\mathrm{e}^{i\theta}),$$

ce qui entraîne qu'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ vaut θ. Ainsi M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.

- Notons M' le point d'affixe $z + b$. Alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z + b - z = b$, donc M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
- Notons M' le point d'affixe kz. Alors $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe kz et $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z, d'où
$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$
Ainsi M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Notons M' le point d'affixe $\bar{z}$. Le centre de $[MM']$ a pour affixe le nombre réel $\frac{z+\bar{z}}{2}$, donc il appartient à l'axe des abscisses. Par ailleurs,
$$\frac{\bar{z} - z}{1 - 0} \in i\mathbf{R},$$
donc les droites (OI) et (MM') sont perpendiculaires (où I est le point d'affixe 1) d'après le Corollaire 4.67. Ainsi M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses.

□

En pratique, on utilisera plutôt le résultat suivant (qu'il faut être capable de démontrer) et qui généralise la proposition précédente.

Proposition 4.72.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

1. Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbf{C}$, soit $\theta \in \mathbf{R}$.
   f est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$ si et seulement si
   $$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega).$$
2. Soit $\vec{b}$ un vecteur d'affixe $b \in \mathbf{C}$.
   f est la translation de vecteur $\vec{b}$ si et seulement si
   $$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = z + b.$$
3. Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbf{C}$, soit $k \in \mathbf{R}$.
   f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si
   $$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) - \omega = k(z - \omega).$$

Démonstration.
Soit M, M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.

1. Supposons $M \neq \Omega$ et notons r la rotation de centre Ω et d'angle θ.
$$\begin{aligned}
M' = r(M) &\iff \begin{cases} |\Omega M'| &= |\Omega M| \\ \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) &\equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z' - \omega| &= |z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) &\equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z' - \omega| &= |z - \omega| \\ \arg(z' - \omega) &\equiv \arg(\mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega))\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff f(z) - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega).
\end{aligned}$$

Si $M = \Omega$, $f(z) = z$ et $z - \omega = 0$, d'où $f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

2. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{b}$ *ssi* $\overrightarrow{MM'} = \vec{b}$ *ssi* $z' - z = b$ *ssi* $z' = z + b$ *ssi* $f(z) = z + b$.
3. M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k *ssi* $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ *ssi* $z' - \omega = k(z - \omega)$ *ssi* $f(z) - \omega = k(z - \omega)$. □

◇◇

Remarque technique 4.73. La proposition précédente est utile pour déterminer la nature (*i.e.* donner la transformation géométrique associée) d'une application complexe $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. Les translations sont immédiates à identifier. On identifie les rotations (resp. les homothéties) comme les applications affines où z est multiplié par un nombre complexe de module 1 (resp. par un nombre réel). Pour les rotations, on écrira

$$f(z) = e^{i\theta} z + \omega(1 - e^{i\theta}).$$

Sous cette forme, $e^{i\theta}$ est immédiat à déterminer ; pour trouver ω, on factorise le terme constant par $1 - e^{i\theta}$.

Pour les homothéties, on écrira

$$f(z) = kz + (1 - k)\omega.$$

Sous cette forme, k est immédiat à déterminer ; pour trouver ω, on factorise le terme constant par $1 - k$.

Exercice d'application 4.74. Déterminer la nature des applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & -5z - 18 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & iz - 3i \end{array}$.

$\hookrightarrow$

1. Soit $z \in \mathbf{C}$. On reconnaît une homothétie, de rapport $k = -5$. Notons ω l'affixe du centre.

$$f(z) = \underbrace{-5}_{k} \times z + (\underbrace{1 - (-5)}_{1-k}) \times \underbrace{\frac{-18}{6}}_{\omega}$$

   Ainsi f est une homothétie de rapport -5 et de centre le point d'affixe $-\frac{18}{6}$.

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. On reconnaît une rotation, d'angle de mesure principale $\frac{\pi}{2}$. Notons ω l'affixe du centre.

$$f(z) = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{e^{i\theta}} \times z + (\underbrace{1 - i}_{1-e^{i\theta}}) \times \underbrace{\frac{-3i}{1 - i}}_{\omega}$$

   Ainsi f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\frac{-3i}{1-i} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

◇◇

4.5. Fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbf{R}$.

4.5.1. Présentation

Définition 4.75.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$. On définit les fonctions **partie réelle** et **partie imaginaire** de f respectivement par

$$\mathfrak{Re}(f) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{Re}(f(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(f) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{Im}(f(x)) \end{array}.$$

Les propriétés de la fonction complexe $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ se ramène alors eux propriétés des fonctions réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$.

Proposition 4.76.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$. La fonction f est continue si et seulement si les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont.

Démonstration.
Notons $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$. Pour tout $a \in I$, montrons que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a)$ si et seulement si les limites de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ existent et valent respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$.
Si les limites quand x tend vers a de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ existent et valent respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$, alors on a $\lim_{x\to a} f(x) = f_1(a) + if_2(a) = f(a)$.
Réciproquement, supposons que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a)$. Alors on a pour tout $x \in I$,

$$|f_1(x) - f_1(a)| = |\,\mathfrak{Re}(f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)|,$$

puis, par encadrement, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = f_1(a)$. On montre de même que $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = f_2(a)$. □

Proposition 4.77.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$. La fonction f est dérivable sur I si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables sur I. Le cas échéant, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\,\mathfrak{Im}(f)'(x).$$

Démonstration.
On note $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$. Soit $a \in I$. Soit $x \neq a$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + i\frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a}.$$

Si f_1 et f_2 sont dérivables, alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = f_1'(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = f_2'(a)$, d'où l'existence de la limite : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f_1'(a) + if_2'(a) = f'(a)$.
Réciproquement, supposons f dérivable.

$$\left|\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} - \mathfrak{Re}(f'(a))\right| = \left|\mathfrak{Re}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right)\right| \leqslant \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

d'où $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ dérivable (avec $\mathfrak{Re}(f)'(a) = \mathfrak{Re}(f'(a))$). De même, on montre que f_2 est dérivable. □

Exemple 4.78. Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + i\mathrm{e}^x \end{array}$. On a $\mathfrak{Re}(f) = \sin$ et $\mathfrak{Im}(f) = \exp$ dérivables, donc f est dérivable avec $f' : x \longmapsto \cos(x) + i\mathrm{e}^x$.

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes. Citons par exemple :

Proposition 4.79.

Soit $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^2$. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable, fg est dérivable et, si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable avec

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration.
Montrons par exemple que $(fg)' = f'g + fg'$. Notons f_1, f_2, g_1, g_2 les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f et de g. On a

$$fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1).$$

On dérive alors fg en dérivant parties réelles et imaginaires :

$$(fg)' = (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f_2g_1').$$

On vérifie qu'on a alors bien :

$$(fg)' = (f_1' + if_2')(g_1 + ig_2) + (f_1 + if_2)(g_1' + ig_2') = f'g + fg'.$$

□

4.5.2. Exponentielle complexe

Définition 4.80.

Soit $z \in \mathbf{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** par

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\mathrm{e}^{i\,\mathfrak{Im}(z)} = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}(\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z)).$$

Proposition 4.81.

Soit $(z,z') \in \mathbf{C}^2$.

1. $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathfrak{Im}(z)\ [2\pi]$.
2. $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.
3. $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.
4. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ z - z' = 2ik\pi$ (on note parfois $z - z' \in 2i\pi\mathbf{Z}$).

Démonstration. 1. Direct avec la définition.

2. $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+z'} &= \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z+z')}\mathrm{e}^{i\,\mathfrak{Im}(z+z')} \\ &= \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)+\mathfrak{Re}(z')}\mathrm{e}^{i(\mathfrak{Im}(z)+\mathfrak{Im}(z'))} \\ &= \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z')}\mathrm{e}^{i\,\mathfrak{Im}(z)}\mathrm{e}^{i\,\mathfrak{Im}(z')} \\ &= \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)+i\,\mathfrak{Im}(z)}\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z')+i\,\mathfrak{Im}(z')} \\ &= \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} \end{aligned}$$

3. $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z}$ d'après la question précédente.

4. $$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) &= \mathfrak{Re}(z') \\ \arg(\mathrm{e}^z) &\equiv \arg(\mathrm{e}^{z'})\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) &= \mathfrak{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) &\equiv \mathfrak{Im}(z')\ [2\pi] \end{cases}.$$

Ainsi, si $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$, $z - z' = i(\mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Im}(z')) \in 2i\pi\mathbf{Z}$.
Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z - z' = 2ik\pi$, alors $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'+2ik\pi} = \mathrm{e}^{z'}\mathrm{e}^{2ik\pi} = \mathrm{e}^{z'}$. □

Exercice d'application 4.82. Résoudre l'équation $e^z = 3(1+\sqrt{3}i)$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

$\hookrightarrow$ On utilise la proposition précédente. Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$e^z = 3(1+\sqrt{3}i) \iff e^z = 6e^{i\frac{\pi}{3}} \iff e^z = \exp\left(\ln(6) + i\frac{\pi}{3}\right) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ z = \ln(6) + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\ln(6) + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi \ :\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

4.5.3. Fonction exponentielle complexe

Définition 4.83.

On appelle **fonction exponentielle complexe** la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$.

Théorème 4.84.

Soit $\phi \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{\phi(t)} \end{array}$ est dérivable sur I, avec :

$$f' : t \longmapsto \phi'(t)e^{\phi(t)}.$$

Démonstration.
On note $\phi_1 = \Re e(\phi)$ et $\phi_2 = \Im m(\phi)$. Par compositions, produits et sommes de fonctions dérivables sur I, $\exp(\phi)$ est dérivable sur I. En utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \exp(\phi)' & = & \exp(\phi_1 + i\phi_2)' \\ & = & (\phi_1 + i\phi_2)' \exp(\phi_1 + i\phi_2) \\ & = & \phi_1' \exp(\phi_1)(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) + \exp(\phi_1)(-\phi_2' \sin(\phi_2) + \phi_2' i\cos(\phi_2)) \\ & = & (\phi_1' + i\phi_2') \exp(\phi_1)(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) \\ & = & \phi' \exp(\phi). \end{array}$$

□

Exemple 4.85. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. La dérivée de $t \longmapsto e^{\alpha t}$ est $t \longmapsto \alpha e^{\alpha t}$.

Exercice d'application 4.86. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto e^x \sin(\sqrt{3}x)$.

$\hookrightarrow$ On peut écrire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \Im m(e^x e^{\sqrt{3}ix})$. Posons $g : x \longmapsto e^x e^{\sqrt{3}ix}$. Pour obtenir la dérivée n-ième de f, il suffit de prendre la partie imaginaire de la dérivée n-ième de g. Or g est clairement dérivable à tout ordre sur $\mathbf{R}$ avec, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$g^{(n)}(x) = (1+i\sqrt{3})^n g(x) = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} g(x) = 2^n e^x \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}x\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}x\right)\right).$$

On en déduit que $f^{(n)} : x \longmapsto 2^n e^x \sin(\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}x)$.

Chapitre 5

Primitives et équations différentielles

S'équation différentielle est une façon de regarder.

Antoine de Saint-Exupéry [1]

5.1. Primitives

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et non vide, et $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

5.1.1. Présentation

Définition 5.1.

Soit f une fonction réelle définie sur I. On appelle **primitive** de f toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 5.2. La fonction sin est une primitive de la fonction cos sur $\mathbf{R}$.

Théorème 5.3.

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$. On appelle F une primitive de f.
L'ensemble des primitives de f est $\{F + c : c \in \mathbf{K}\}$.
De plus, pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbf{K}$, il existe une unique primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0.

1. Antoine de Saint-Exupéry - écrivain, poète et aviateur français (1900-1944), célèbre auteur du roman *Le Petit Prince*

Démonstration.
- Soit $G \in \{F + c \,:\, c \in \mathbf{K}\}$. Il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + c$. G est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables et $G' = (F + c)' = F' = f$. Donc G est une primitive de f.
- Soit G une primitive de f. Par définition, G est dérivable et $G' = f$. Donc $G' = F'$, *i.e.* $(G - F)' = 0$. Donc, puisque I est un intervalle, il existe $c \in \mathbf{K}$ tel que $G - F = c$.

Ainsi $\{F + c \,:\, c \in \mathbf{K}\}$ est l'ensemble des primitives de f.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$. $F - F(t_0) + y_0$ est une primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0, qu'on note F_0.
Soit G une primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0. Il existe $c \in \mathbf{K}$ tel que $G = F_0 + c$. En particulier, $c = G(t_0) - F(t_0) = y_0 - y_0 = 0$. Donc $G = F_0$.
Finalement, on a l'unicité de la primitive de f prenant la valeur y_0 en t_0. □

Exemple 5.4. L'ensemble des primitives de cos est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + c \end{array} \;:\; c \in \mathbf{R} \right\}$$

D'après le Théorème 5.3, il existe par ailleurs une unique primitive de cos qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.
Notons F cette primitive. Il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $F : x \longmapsto \sin(x) + c$. On a $F(\frac{\pi}{4}) = 0$ qui se réécrit $\sin(\frac{\pi}{4}) + c = 0$, *i.e.* $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finalement, $F : x \longmapsto \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. L'**intégrale de Riemann** sera construite plus tard dans l'année, et on donnera un sens au nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dès que f est continue sur $[a\,;b]$. En attendant, rappelons quelques propriétés entrevues au lycée :

- **positivité** : si f est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est un nombre positif.
- **opposé** : si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$, par définition,

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **relation de Chasles** : si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et $c \in [a\,;b]$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **inégalité triangulaire** : si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 5.5 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue sur I, soit $a \in I$. La fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration.
Ce résultat, qui n'est pas évident, est admis pour l'instant. Il sera démontré ultérieurement. □

Exemple 5.6. La fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable, et sa dérivée est la fonction cos.

Notons que $F(\frac{\pi}{4}) = 0$, donc on a démontré avant que $F : x \longmapsto \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Corollaire 5.7.

Si une fonction est continue sur un intervalle, elle y admet des primitives.

Démonstration.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. Soit $a \in I$. Alors $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. □

Exemple 5.8.

1. Une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t^2} \end{array}$ est $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$.
2. Une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t)^2 \end{array}$ est $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \ln(t)^2\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Il existe des fonctions discontinues admettant des primitives :

Exemple 5.9. Considérons :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \text{et} \qquad F : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2\sin(\frac{1}{x}) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

F est dérivable et $F' = f$.

Il existe aussi des fonctions définies sur une intervalle qui n'admettent pas de primitives (elles sont nécessairement discontinues !) :

Exemple 5.10. Considérons :

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \quad \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

On suppose que f admet une primitive F. $F|_{[0,1[}$ est une primitive de $f|_{[0,1[}$, donc il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $F|_{[0,1[} = c$. Comme $F \in \mathscr{C}^0([0,1])$, $F = c$. Donc $F' = 0$, puis $F'(1) = 0$, *i.e.* $1 = 0$, ce qui est absurde. Finalement, f n'admet pas de primitive.

Théorème 5.11 - Théorème fondamental de l'analyse - autre formulation.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

On note $\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration.
Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$. D'après les Théorèmes 5.3 et 5.5, il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = c + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc,

$$F(b) - F(a) = c + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - c - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemple 5.12. On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = 0.$

Proposition 5.13.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ une fonction continue. Soit $a \in I$. Posons

$$\begin{array}{rccc} F: & I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Si f est continue, F est dérivable et $F' = f$.

Remarque 5.14. Si f n'est pas continue, on peut avoir $F' \neq f$ dans le cas général.

Corollaire 5.15.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $f \in \mathscr{C}^1([a\,;\,b])$.

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Démonstration.
Posons

$$\begin{array}{rccc} g: & [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} h: & [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - f(a) \end{array}$$

h est dérivable et $h' = f'$. Comme f' est continue, g est dérivable et $g' = f'$, puis $(g-h)' = 0$. Comme $g(a) = h(a)$, on obtient $g = h$. En particulier, $g(b) = h(b)$. □

Remarque 5.16. A partir de ce résultat, on retrouve immédiatement le Théorème 5.11 (mais dans un cadre moins général).

5.1.2. Calculs simples

Proposition 5.17 - Primitive et composée.

Soient I et J des intervalles de $\mathbf{R}$, et $u : I \longrightarrow J$, $F : J \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fonctions respectivement dérivables sur I et J. Alors la fonction $F \circ u$ est une primitive de $u' \times (F' \circ u)$ sur I.

Exemple 5.18. Si F est une primitive d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, alors, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{a}F(at + b)$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax + b)$.

Exemple 5.19. Soit $(m, n) \in (\mathbf{R}^\star)^2$. Une primitive de $t \longmapsto \sin(mt) + \cos(nt)$ sur $\mathbf{R}$ est $x \longmapsto \frac{-\cos(mx)}{m} + \frac{\sin(nx)}{n}$.

Exemple 5.20. Soit $\alpha \in \mathbf{K}$. Une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t-\alpha}$ sur $\mathbf{K}\backslash\{\alpha\}$ est $x \longmapsto \ln|x-\alpha|$.

Exemple 5.21. Soit $\gamma \in \mathbf{K}$. Une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{(t-\gamma)^2}$ sur $\mathbf{K}\backslash\{\gamma\}$ est $x \longmapsto -\frac{1}{x-\gamma}$.

Exemple 5.22. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}^2$. On veut déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \frac{1}{(t+A)^2+B^2}$ sur $\mathbf{K}$. On a, pour tout $t \in \mathbf{K}$,

$$f(t) = \frac{1}{B^2} \cdot \frac{1}{(\frac{t+A}{B})^2+1} = \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{(\frac{t+A}{B})^2+1}\right).$$

Donc une primitive de f sur $\mathbf{K}$ est $x \longmapsto \frac{1}{B}\operatorname{Arctan}(\frac{x+A}{B})$.

Proposition 5.23.

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(I, \mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est linéaire, ce qui signifie que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall (f, g) \in (\mathcal{F}(I, \mathbf{K}))^2, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

◇◇

Remarque technique 5.24. Pour calculer la primitive d'une expression polynomiale en sin et cos (resp. en sh et ch), on commence par linéariser l'expression.

Exercice d'application 5.25. Calculer un primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sin^3(t) \end{array}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$. $\sin^3(t) = \dfrac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^3(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^x \sin(3t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{3\cos(x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{12} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Une primitive de $\sin^3$ est : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{3\cos(x)}{4} + \dfrac{\cos(3x)}{12} \end{array}$.

Exercice d'application 5.26. Calculer une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^2(t) \end{array}$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$. $\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}^2(t) = \dfrac{\operatorname{ch}(4t) - 1}{8}$, donc,

$$\int_0^x \operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^x \operatorname{ch}(4t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{8} = \frac{\operatorname{sh}(4x)}{32} - \frac{x}{8}.$$

Donc une primitive de $\operatorname{ch}^2 \cdot \operatorname{sh}^2$ est $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(4x)}{32} - \dfrac{x}{8}$.

◇◇

Proposition 5.27.

Soit f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbf{C}$. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

- $\displaystyle\int_a^b \mathfrak{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t = \mathfrak{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$;
- $\displaystyle\int_a^b \mathfrak{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t = \mathfrak{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

◇◇

Remarque technique 5.28. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On utilise la proposition précédente pour calculer un primitive de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ (resp. $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$), en remarquant que $f : x \longmapsto \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{ax+ibx})$ (resp. $g : x \longmapsto \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{ax+ibx})$).

Exercice d'application 5.29. Trouver une primitive de $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t\cos(t)$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$. $\mathrm{e}^t\cos(t) = \mathrm{e}^t\,\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{it}) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{it+t})$.

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \mathfrak{Re}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{(i+1)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(i+1)x}}{i+1} - \frac{1}{2}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{(1-i)\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{x}}{2}\right) - \frac{1}{2}.$$

Donc une primitive de f est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.

Exercice d'application 5.30. Trouver une primitive de $t \longmapsto \mathrm{sh}(t)\cos^2(t)$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$. $\mathrm{sh}(t)\cos^2(t) = \dfrac{1}{4}\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{(2i+1)t}) - \dfrac{1}{4}\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{(2i-1)t}) + \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{2}$ (on linéarise $\cos^2(t)$ puis on utilise $\cos(2t) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{2it})$).

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{sh}(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{(2i+1)t}\,\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{(2i-1)t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(2i+1)x}}{4(2i+1)}\right) - \mathfrak{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(2i-1)x}}{4(2i-1)}\right) + \frac{\mathrm{ch}(x)}{2} - \frac{3}{5}\\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)\cos(2x)}{10} + \frac{\mathrm{sh}(x)\sin(2x)}{5} + \frac{\mathrm{ch}(x)}{2} - \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Finalement, une primitive de $t \longmapsto \mathrm{sh}(t)\cos^2(t)$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)\cos(2x)}{10} + \dfrac{\mathrm{sh}(x)\sin(2x)}{5} + \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{2}$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 5.31. Soient A et B deux fonctions polynomiales, B étant de degré 1. Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et Q une fonction polynomiale tels que $A = BQ + \lambda$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $B(t) \neq 0$, $\dfrac{A(t)}{B(t)} = Q + \dfrac{\lambda}{B(t)}$. Donc on peut calculer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{A(t)}{B(t)}$.

Exercice d'application 5.32. Calculer une primitive de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^3+t+1}{t+2} \end{array}$.

↪ On pose la division de polynôme suivante :

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} T^3 & + & & & T & + & 1 & T+2 \\ \hline -T^3 & - & 2T^2 & & & & & T^2-2T+5 \\ \hline & & -2T^2 & + & T & + & 1 & \\ & & 2T^2 & + & 4T & & & \\ \hline & & & & 5T & + & 1 & \\ & & & & -5T & - & 10 & \\ \hline & & & & & & -9 & \end{array}$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $t^3 + 2t + 1 = (t+2)(t^2 - 2t + 5) - 9$. Ainsi, pour $x \in \mathbf{R}_+$:

$$\int_0^x \frac{t^3+t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t^2 - 2t + 5 - \frac{9}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t^2 + 5t - 9\ln(|t+2|) + 9\ln(2).$$

Une primitive de f est $\begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 9\ln(x+2) \end{array}$.

◇◇

Théorème 5.33 - Décomposition en éléments simples.

Soit α et β deux éléments de $\mathbf{K}$ distincts. Alors, il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{K}\backslash\{\alpha, \beta\}$,

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

On a par ailleurs $B = -A$.

Démonstration.
On mène une preuve par analyse-synthèse.
Analyse. Supposons qu'il existe $(A, B) \in \mathbf{K}^2$ satisfaisant l'égalité du théorème.

$$\forall x \in \mathbf{K}\backslash\{\alpha,\beta\},\ (x-\alpha)\cdot\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{x-\beta}, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\cdot\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}.$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbf{K}\backslash\{\alpha,\beta\},\ (x-\alpha)\left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}\right) = A + B\frac{x-\alpha}{x-\beta}, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\left(\frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}\right) = A.$$

On en déduit que :

$$A = \frac{1}{\alpha-\beta}.$$

On peut montrer de même que :

$$B = \frac{1}{\beta-\alpha}.$$

Synthèse. Soit $x \in \mathbf{K}\backslash\{\alpha, \beta\}$.

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(x-\beta)} = \frac{(\beta-\alpha)(x-\beta) - (\beta-\alpha)(x-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

□

Remarque 5.34. La preuve précédente est constructive : elle donne une méthode pour déterminer en pratique les valeurs A et B.

◇◇

Remarque technique 5.35. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}^2$. Pour déterminer une primitive de

$$f : t \longmapsto \frac{1}{at^2 + bt + c},$$

il y a trois cas à distinguer :

1. si $aX^2 + bX + c$ admet deux racines distinctes α et β, alors d'après le Théorème 5.33, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$,
$$f(t) = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{t-\alpha} - \frac{A}{t-\beta}\right).$$
Une primitive de f sur $\mathbf{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$ est alors (cf. Exemple 5.20) $x \longmapsto \frac{A}{a}\ln|x-\alpha| + \frac{B}{a}\ln|x-\beta|$.
2. si $aX^2 + bX + c$ admet une unique racine γ, alors, pour tout $t \in \mathbf{R}\backslash\{\gamma\}$,
$$f(t) = \frac{1}{a(t-\gamma)^2},$$
donc (cf. Exemple 5.21) une primitive de f sur $\mathbf{R}\backslash\{\gamma\}$ est $x \longmapsto -\frac{1}{a(x-\gamma)}$.
3. si $aX^2 + bX + c$ n'admet pas de racines réelles, on met le trinôme du dénominateur sous forme canonique. Il existe donc $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$f(t) = \frac{1}{a}\frac{1}{(t+A)^2 + B^2},$$
donc, d'après l'Exemple 5.22, une primitive de f sur $\mathbf{R}$ est $x \longmapsto \frac{1}{Ba}\operatorname{Arctan}(\frac{x+A}{B})$

Exercice d'application 5.36. Déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \frac{1}{3t^2-12t+17}$.

$\hookrightarrow$ Le discriminant de $3X^2 - 12X + 17$ est négatif, donc ce trinôme n'admet pas de racines. Soit $t \in \mathbf{R}$.

$$3t^2 - 12t + 17 = 3\left(t^2 - 4t + \frac{17}{3}\right) = 3\left((t-2)^2 - 4 + \frac{17}{3}\right) = 3\left((t-2)^2 + \frac{5}{3}\right),$$

donc une primitive de f est $x \longmapsto \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{3}(x-2)}{\sqrt{5}})$.

Exercice d'application 5.37. Déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \frac{1}{t^2-1}$.

$\hookrightarrow$ D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 1\}$,

$$f(t) = \frac{A}{t-1} - \frac{A}{t+1}$$

On a $A = \lim_{t\to 1}(t-1)f(x) = \lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 1\}$,

$$f(t) = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}.$$

Ainsi une primitive de f est $x \longmapsto \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)$.

Exercice d'application 5.38. Déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \frac{1}{t^2-10t+25}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in \mathbf{R}\backslash\{5\}$, on a $f(t) = \frac{1}{(t-5)^2}$, donc une primitive de f est $x \longmapsto -\frac{1}{x-5}$.

Exercice d'application 5.39. Soit $m \in \mathbf{R}$. Déterminer une primitive de $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+2mx+2m-1}$.

$\hookrightarrow$ Le discriminant de $X^2 + 2mX + 2m - 1$ est $4(m-1)^2$. On distingue deux cas.

1. Si $m = 1$, alors l'unique racine de $X^2 + 2mX + 2m - 1$ est -1. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{-1\}$,
$$\frac{1}{x^2 + 2mx + 2m - 1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$
donc une primitive de f est $x \longmapsto \frac{-1}{x+1}$.

2. Si $m \neq 1$, les racines de $X^2 + 2mX + 2m - 1$ sont -1 et $-2m+1$. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R} \backslash \{-1, -2m+1\}$,
$$\frac{1}{(x+1)(x+2m-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2m-1}.$$
De plus,
$$A = \lim_{x \to -1} (x+1)f(x) = \frac{1}{2(m-1)}, \quad \text{et } B = \frac{1}{2(1-m)}$$
Finalement, une primitive de f est $x \longmapsto \frac{1}{2(m-1)} \ln|x+1| + \frac{1}{2(1-m)} \ln|x+2m-1|$.

◇◇

5.1.3. Intégration par parties

Définition 5.40.

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I. On notera $\mathscr{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ sur I.

Théorème 5.41 - Théorème d'intégration par parties.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, f et g deux fonctions définies sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :
$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.
On a :
$$f'g + fg' = (fg)'.$$
Donc,
$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t,$$
puis, avec le Théorème 5.11,
$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
□

Exercice d'application 5.42. Déterminer une primitive de $t \longmapsto \ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$. Les fonctions $t \longmapsto \ln(t)$ et $t \longmapsto 1$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités 1 et x. Ainsi, la formule d'intégration par parties fournit :
$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \Big[t\ln(t)\Big]_1^x - \Big[t\Big]_1^x,$$
donc une primitive de ln sur $\mathbf{R}_+^\star$ est $x \longmapsto x\ln(x) - x$.

◇◇

Remarque technique 5.43. Le théorème d'intégration par parties permet, par exemple, de calculer une primitive d'un produit d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle : on dérive la

fonction polynomiale et on intègre la fonction exponentielle. Ainsi le degré du polynôme est abaissé. On recommence jusqu'à ce que le polynôme soit une constante.

Exercice d'application 5.44. Calculer une primitive de $t \longmapsto (t^2+1)\mathrm{e}^{2t}$ sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. Les fonctions $t \longmapsto t^2+1$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\int_0^x (t^2+1)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+1)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x 2t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \longmapsto 2t$ et $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Par intégration par parties, on en déduit :

$$\int_0^x (t^2+1)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+1)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \left(\left[t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t\right) = \left[(t^2+1)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \left[t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x + \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^x.$$

Une primitive de $t \longmapsto (t^2+1)\mathrm{e}^{2t}$ est donc $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+3)}{4}$.

Exercice d'application 5.45. Calculer une primitive de $t \longmapsto t\,\mathrm{ch}^3(t)$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}^3(t) = \dfrac{\mathrm{ch}(3t)+3\,\mathrm{ch}(t)}{4}$.

Les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathscr{C}^1$, une intégration par parties assure que :

$$\int_0^x t\,\mathrm{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{4}\left(\frac{\mathrm{sh}(3t)}{3}+3\,\mathrm{sh}(t)\right)\right]_0^x - \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{\mathrm{sh}(3t)}{3}+3\,\mathrm{sh}(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, une primitive de $t \longmapsto t\,\mathrm{ch}^3(t)$ est $x \longmapsto \dfrac{x}{4}\left(\dfrac{\mathrm{sh}(3x)}{3}+3\,\mathrm{sh}(x)\right) - \dfrac{\mathrm{ch}(3x)}{36} - \dfrac{3\,\mathrm{ch}(x)}{4}$.

Exercice d'application 5.46. Trouver une primitive de $f : t \longmapsto (t^2+2t-1)\cos^2(t)$ sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathscr{C}^1$, une double intégration par parties assure que :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (t^2+2t-1)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (t^2+2t-1)\frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t^2-t\right)\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x (t^2+2t-1)\cos(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{(t^2+2t-1)\sin(2t)}{4}+\frac{(t+1)\cos(2t)}{4}-\frac{\sin(2t)}{8}\right]_0^x
\end{aligned}$$

Finalement, une primitive de f est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{(x^2+2x-1)\sin(2x)}{4}+\dfrac{(x+1)\cos(2x)}{4}-\dfrac{\sin(2x)}{8}$.

Exercice d'application 5.47. Trouver une primitive de $f : t \longmapsto (t^2+t+1)\mathrm{e}^{-t}\sin(t)$ sur $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{-t}\sin(t) = \Im m(\mathrm{e}^{t(i-1)})$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\int_0^x (t^2+t+1)\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Im m\left(\int_0^x (t^2+t-1)\mathrm{e}^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Comme les fonctions manipulées $t \longmapsto t^2+t+1$, $t \longmapsto \mathrm{e}^{(i-1)t}$ et $t \longmapsto 2t+1$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, deux intégrations par parties conduisent à :

$$\int_0^x (t^2+t+1)\mathrm{e}^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(i+1)(t^2+t+1)\mathrm{e}^{(i-1)t}}{2} - \frac{i(2t+1)\mathrm{e}^{(i-1)t}}{2} + \frac{2(1-i)\mathrm{e}^{(i-1)t}}{2}\right]_0^x.$$

Donc,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t}(t^2+t+1)}{2}\left(\sin(t)+\cos(t)\right) - \frac{2t+1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos(t) + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\sin(t) - \cos(t)\right]_0^x.$$

Finalement, une primitive de f est $x \longmapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)(x^2+3x+3)}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\sin(x)(x^2+x)}{2}$.

◇◇

5.1.4. Changement de variable

Théorème 5.48 - Théorème du changement de variables.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in \mathcal{F}(\varphi(I), \mathbf{K})$ une fonction continue. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration.
Soit $(a,b) \in I^2$. On suppose, sans perte de généralité, que $a < b$. On pose

$$g : \begin{array}{ccc} [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \varphi([a\,;\,b]) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\varphi(a)}^x f(u)\,\mathrm{d}u \end{array}$$

Comme $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ est continue, g est dérivable et $g' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Comme f est continue, h est dérivable. Or $\varphi \in \mathscr{C}^1([a\,;\,b])$ et h est définie sur $\varphi([a\,;\,b])$. Donc $h \circ \varphi$ est dérivable.

$$(h \circ \varphi)' = (h' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Donc $(g - h \circ \varphi)' = 0$, d'où $g = h \circ \varphi$. En particulier, $g(b) = h(\varphi(b))$. □

Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir la formule, très prisé des physiciens :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}u & = & \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Exercice d'application 5.49. En posant $u = \operatorname{Arcsin}(t)$, déterminer une primitive de $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $]-1\,;\,1[$.

↪ Soit $x \in]-1\,;\,1[$. La fonction $\varphi : t \longmapsto \operatorname{Arcsin}(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x. En faisant le changement de variable $\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & \operatorname{Arcsin} t \\ \mathrm{d}u & = & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (1-t^2) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^x (1-\sin(\operatorname{Arcsin}(t))^2) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^{\operatorname{Arcsin}(x)} (1-\sin^2(u))\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\operatorname{Arcsin}(x)} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\operatorname{Arcsin}(x)} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donc une primitive de $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$ sur $]-1\,;\,1[$ est $x \longmapsto \dfrac{\sin(2\operatorname{Arcsin}(x))}{4} + \dfrac{\operatorname{Arcsin}(x)}{2}$.

Remarque 5.50. On donne parfois les changements de variable dans l'« autre sens ». Par exemple, dans l'exercice d'application précédent, on aurait pu donner $t = \sin(u)$. En faisant le changement de variable $\left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \sin(u) \\ \mathrm{d}t & = & \cos(u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right.$, on commence par écrire :

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(x)} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

Exemple 5.51. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$. Soit F une primitive de f. Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^\star \times \mathbf{K}$.
Avec le changement de variable $u = at+b$, on peut montrer qu'une primitive de

$$g : \begin{array}{ccc} \{s \in \mathbf{R} \,:\, as+b \in I\} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & f(at+b) \end{array}$$

est

$$G : \begin{array}{ccc} \{s \in \mathbf{R} \,:\, as+b \in I\} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ u & \longmapsto & \dfrac{F(au+b)}{a} \end{array}$$

Remarque technique 5.52.

La mise sous forme canonique d'un polynôme du second degré et le changement de variable de l'Exemple 5.51 permettent de calculer des primitives dans lesquelles apparaissent de tels polynômes.

Exercice d'application 5.53. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide des changements de variable $u = 2t+1$, puis $u = \mathrm{sh}(x)$. On pourra utiliser que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2\,\mathrm{ch}(x)^2 = \mathrm{ch}(2x)+1$.

↪ On a, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,1\right]$, $4t^2+4t+2 = (2t+1)^2+1$. Par ailleurs, $t :\longmapsto 2t+1$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc le changement de variable $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & 2t+1 \\ \mathrm{d}u & = & 2\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ assure que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{(2t+1)^2+1}\cdot 2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et continue, donc elle établit une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathrm{sh}(\mathbf{R}) =]\lim_{-\infty}\mathrm{sh}\,;\,\lim_{+\infty}\mathrm{sh}[= \mathbf{R}$. De plus, sh est dérivable et sa dérivée ch ne s'annule jamais, donc sh^{-1} est dérivable et $(\mathrm{sh}^{-1})' = \frac{1}{\mathrm{ch}\circ\mathrm{sh}^{-1}}$. Les fonctions mises en jeu étant continues, on obtient que sh^{-1} est continue, ce qui signifie que sh^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. En faisant le changement de variable $x = \mathrm{sh}^{-1}(u)$, qu'on écrit plus simplement $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{d}u & = & \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{sh}^{-1}(3)} \sqrt{1+\mathrm{sh}(x)^2}\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(\sqrt{10}+3)} \mathrm{ch}(x)^2\,\mathrm{d}x$$

car $\mathrm{sh}(x) = 3 \iff x = \ln(\sqrt{10}+3)$ et $\mathrm{ch}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0\,;\,\ln(\sqrt{10}+3)\right]$. Ainsi,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^{\ln(\sqrt{10}+3)} = \frac{\mathrm{sh}(2\ln(\sqrt{10}+3))}{8} + \frac{\ln(\sqrt{10}+3)}{4}.$$

Exercice d'application 5.54. Trouver une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t+2}{t^2+2t+4}$.

↪ Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\dfrac{t+2}{t^2+2t+4} = \dfrac{t+2}{(t+1)^2+3}$. On pose $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & t+1 \\ \mathrm{d}u & = & \mathrm{d}t \end{array}\right.$.

$$\int \frac{t+2}{t^2+2t+4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{u+1}{u^2+3}\mathrm{d}u = \int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2+3} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3} = \frac{\ln(u^2+3)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Finalement, une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t+2}{t^2+2t+4}$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(t^2+2t+4)}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice d'application 5.55. Trouver une primitive de $f : \begin{array}{ccc}]-3\,;\,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t-3}{\sqrt{3-2t-t^2}} \end{array}$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in]-3\,;\,1[$, $\dfrac{x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \dfrac{x+3}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$. On pose $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & t+1 \\ \mathrm{d}u & = & \mathrm{d}t \end{array}\right.$.

$$\begin{aligned}
\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \int \frac{u+2}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{4-u^2}} + \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{4-u^2}} \\
&= -\sqrt{4-u^2} + 2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{u}{2}\right) + c \\
&= -\sqrt{3-2t-t^2} + 2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{t+1}{2}\right) + c.
\end{aligned}$$

Donc une primitive de f est $t \longmapsto -\sqrt{3-2t-t^2} + 2\,\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{t+1}{2}\right)$.

Exercice d'application 5.56. Trouver une primitive de $f : \begin{array}{rcl} [5\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^3+t+1}{t^2-4t-1} \end{array}$.

$\hookrightarrow$ Une division euclidienne assure que pour tout $t \in [5,+\infty[$, $\dfrac{t^3+t+1}{t^2-4t-1} = t+4+\dfrac{18t+5}{(t-2)^2-5}$. En posant $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & t-2 \\ \mathrm{d}u & = & \mathrm{d}t \end{array}\right.$, on a :

$$\int \frac{18t+5}{(t-2)^2-5}\,\mathrm{d}t = \int \frac{18u+41}{u^2-5}\,\mathrm{d}u = 9\ln(u^2-5) - \frac{41}{\sqrt{5}}\,\mathrm{argth}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + c$$

Finalement une primitive de f est : $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2} + 4t + 9\ln(t^2-4t-1) - \dfrac{41}{\sqrt{5}}\,\mathrm{argth}\left(\dfrac{t-2}{\sqrt{5}}\right)$.

◇◇

5.2. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

5.2.1. Présentation

Définition 5.57.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \tag{E}$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$.
On appelle **solution** de (E) sur I toute fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E).
L'équation différentielle (E) est dite **homogène** si b est la fonction nulle.
On appelle **équation homogène associée à** (E) (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)y(t) = 0, \tag{H}$$

Dans la pratique, on écrit (E) sous la forme :

$$y' + a(t)y = b(t), \tag{E}$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y.

Pour toute la suite, on se donne a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbf{K}$.

5.2.2. Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 1

Proposition 5.58 - Solutions de l'équation homogène.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \ : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

où A est une primitive de la fonction a sur I.

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ une fonction dérivable.

$$\begin{array}{lll} f \text{ est une solution de (H)} & ssi & f' + af = 0 \\ & ssi & f' + A'f = 0 \\ & ssi & \text{pour tout } t \in I,\ \mathrm{e}^{A(t)}\left(f'(t) + A'(t)f(t)\right) = 0 \\ & ssi & \text{la dérivée de } t \longmapsto \mathrm{e}^{A(t)} f(t) \text{ est nulle} \\ & ssi & \text{il existe } \lambda \in \mathbf{K} \text{ tel que pour tout } t \in I,\ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \\ & ssi & f \in \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{A(t)} \end{array} \ , \ \lambda \in \mathbf{K} \right\} \end{array}$$

□

Remarque 5.59. Dans la Proposition 5.58, on peut remarquer que l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (H) est l'ensemble des fonctions proportionnelles à la fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$. L'ensemble S peut donc être vu comme une droite vectorielle de vecteur directeur f. Il est évident que S est aussi l'ensemble des fonctions proportionnelles à n'importe quelle fonction non nulle de (H). Autrement dit, si l'on connaît une solution d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1, on les connaît toutes.

Exemple 5.60. Soit $k \in \mathbf{K}$. L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + ky = 0$$

est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-kt} \end{array} \ : \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

(en effet, une primitive de $t \longmapsto k$ et $t \longmapsto kt$).

Exercice d'application 5.61. Résoudre sur $]1\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{t-1} y = 0$$

$\hookrightarrow$ Une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t-1}$ est $t \longmapsto \ln(t-1)$. De plus, pour tout $t \in]1\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-\ln(t-1)} = \frac{1}{t-1}$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda}{t-1} \end{array} \ : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Proposition 5.62 - Solutions de l'équation générale.

Notons S_H l'ensemble des solutions homogènes. Si f_p est une solution de (E) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{h + f_p \,:\, h \in S_H\} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + f_p(t) \end{array} \;:\; \lambda \in \mathbf{K} \right\}$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E), on peut obtenir toutes les solutions de (E) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H).

Démonstration.
Notons S_E l'ensemble des solutions de (E). Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ dérivable.

$$\begin{array}{lll} f \in S_E & ssi & f' + af = b \\ & ssi & f' + af = f_p' + af_p \\ & ssi & (f' - f_p') - a(f - f_p) = 0 \\ & ssi & (f - f_p)' - a(f - f_p) = 0 \\ & ssi & f - f_p \in S_H \\ & ssi & \text{il existe } h \in S_H \text{ tel que } f - f_p = h \\ & ssi & \text{il existe } h \in S_H \text{ tel que } f = h + f_p \\ & ssi & f \in \{h + f_p \,:\, h \in S_h\} \end{array}$$

Finalement, $S_E = \{h + f_p \,:\, h \in S_h\}$. □

Remarque 5.63. On peut poursuivre la Remarque 5.59 : l'ensemble des solutions de (E) est une droite affine de vecteur directeur $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ et qui passe par le point f_p.

5.2.3. Détermination d'une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

On vient de voir que pour déterminer toutes les solutions de (E), il suffit de résoudre l'équation homogène (H) puis de déterminer une solution de (E). La résolution d'une équation d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 se mène donc toujours en trois temps :

1. recherche des solutions homogènes (cf. Proposition 5.58) ;
2. recherche d'une solution particulière ;
3. conclusion (écriture de l'ensemble des solutions de l'équation générale).

Pour déterminer une solution particulière, le premier réflexe à avoir est de chercher une solution évidente.

Exemple 5.64. Soit $(k, m) \in \mathbf{K}^2$. Une solution de

$$y' + ky = m$$

est la fonction constante $t \longmapsto \frac{m}{k}$. Ainsi (on a déjà déterminé l'ensemble des solutions homogènes à l'Exemple 5.60), l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-kt} + \frac{m}{k} \end{array} \;:\; \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Exercice d'application 5.65. Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$y' - 2y = t^2 - 2t + 4.$$

↪ *Recherche des solutions homogènes.* L'Exemple 5.60 assure que l'ensemble des solutions homogènes de l'équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{2t} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Le second membre de l'équation étant un polynôme de degré 2, on va chercher un polynôme de degré 2 qui soit solution. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, et $P : t \longmapsto at^2 + bt + c$. Alors

$$\begin{array}{lll} P \text{ est solution de l'équation} & ssi & \forall t \in \mathbf{R},\ P'(t) - 2P(t) = t^2 - 2t + 4 \\ & ssi & \forall t \in \mathbf{R},\ 2at + b - 2at^2 - 2bt - 2c = t^2 - 2t + 4 \\ & ssi & \forall t \in \mathbf{R},\ -2at^2 + (2a - 2b)t + (b - 2c) = t^2 - 2t + 4 \\ & ssi & (a,b,c) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{9}{4}) \end{array}$$

Finalement, une solution particulière est $P : t \longmapsto -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{7}{4}$.
Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation générale est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{7}{4} \end{array} : \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Exercice d'application 5.66. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) + 2xf(x) \leqslant 0$.

Montrer que f admet 0 comme limite en $+\infty$.

↪ La dérivée de $g : x \longmapsto f(x)e^{x^2}$ est, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $(f'(x) + 2xf(x))e^{x^2}$. Ainsi g est décroissante. En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x)e^{x^2} \leqslant f(0)$. Or on sait aussi que f est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, donc, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant f(0)e^{-x^2}$. Le théorème des gendarmes assure finalement que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Si aucune solution évidente n'est visible, on peut appliquer la **méthode de variation de la constante** :

◇◇

Remarque technique 5.67. La méthode consiste à chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$f_p : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & g(t)e^{-A(t)} \end{array},$$

où g est une fonction dérivable sur I et A est une primitive de a. Autrement dit, on a remplacé la constante d'une solution homogène par une fonction dérivable g.

Exercice d'application 5.68. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y' - t^2 y = \frac{te^{\frac{t^3}{3}}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

↪ *Recherche des solutions homogènes.* Une primitive de $t \longmapsto -(-t^2)$ est $t \longmapsto \frac{t^3}{3}$, donc l'ensemble des solutions homogènes est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{\frac{t^3}{3}} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Posons $f : t \longmapsto g(t)e^{\frac{t^3}{3}}$, où $g \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est dérivable. On a

$$\begin{array}{lll} f \text{ est solution de l'équation} & ssi & \forall t \in I, \quad f'(t) - t^2 f(t) = \dfrac{te^{\frac{t^3}{3}}}{\sqrt{1+t^2}} \\ & ssi & g'(t)e^{\frac{t^3}{3}} + t^2 g(t)e^{\frac{t^3}{3}} - t^2 g(t)e^{\frac{t^3}{3}} = \dfrac{te^{\frac{t^3}{3}}}{\sqrt{1+t^2}} \\ & ssi & g'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{array}$$

Une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$, donc $f : t \longmapsto \sqrt{1+t^2}e^{\frac{t^3}{3}}$ est une solution particulière.
Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\sqrt{1+t^2}+\lambda)e^{-\frac{t^3}{3}} \end{array} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

◇◇

La méthode de variation de la constante assure que :

Proposition 5.69.

L'équation (E) possède au moins une solution.

Démonstration.
Soit $g \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ dérivable. On pose $f_p : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & g(t)e^{-A(t)} \end{array}$. f_p est dérivable.

$$\begin{array}{lll} f_p \text{ est solution de } S_E & ssi & f_p' + af_p = b \\ & ssi & \text{pour tout } t \in I,\ g'(t)e^{-A(t)} - a(t)e^{-A(t)}g(t) + a(t)g(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ & ssi & \text{pour tout } t \in I,\ g'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{array}$$

Or $t \longmapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue, donc cette fonction admet une primitive F. Ainsi :

$$\begin{array}{lll} f_p \in S_E & ssi & g' = F' \\ & ssi & \text{il existe } \lambda \in \mathbf{K} \text{ tel que } g = F + \lambda \end{array}$$

En particulier, $t \longmapsto F(t)e^{-A(t)}$ est solution de (E). □

Remarque 5.70. Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite : il faut pour cela être capable de déterminer deux primitives à l'aide des fonctions usuelles (une primitive A de a et une primitive de $t \longmapsto b(t)e^{A(t)}$).

5.2.4. Principe de superposition des solutions

Proposition 5.71 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et b_1, b_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On pose $\begin{array}{llll} (E_1) : & y' + ay & = & b_1 \\ (E_2) : & y' + ay & = & b_2 \end{array}$.
Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2), alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2.$$

Démonstration.
Comme φ_1 et φ_2 sont dérivables, $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est dérivable.

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)' + a(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1(\varphi_1' + a\varphi_1) + \lambda_2(\varphi_2' + a\varphi_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2,$$

d'où le résultat. □

5.2.5. Problème de Cauchy

Définition 5.72.

On appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I.

Théorème 5.73 - Problème de Cauchy.

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Démonstration.
On sait qu'il existe une solution f_p de (E). Soit f une solution de (E). On sait qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & f_p(t) + \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$, où A est une primitive de a.

$$f(t_0) = y_0 \iff f_p(t_0) + \lambda \mathrm{e}^{-A(t_0)} = y_0 \iff \lambda = (y_0 - f_p(t_0))\mathrm{e}^{A(t_0)},$$

donc sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation différentielle (E) admet une solution unique sur I. □

Exercice d'application 5.74. Déterminer la solution réelle f définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ de $(E) : \left\{ \begin{array}{rcl} y' - \frac{y}{t} & = & \ln(t) \\ y(1) & = & 3 \end{array} \right.$.

↪ *Recherche des solutions homogènes.* Une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est ln, donc l'ensemble des solutions homogènes est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda t \end{array} \ : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbf{R}_+^\star, \mathbf{R})$ dérivable. On pose $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(t)t \end{array}$.
f_p est dérivable.

$$\begin{array}{lll} f_p \text{ est une solution de l'équation différentielle} & ssi & \text{pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star,\ f_p'(t) - \dfrac{f_p(t)}{t} = \ln(t) \\ & ssi & \text{pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star,\ g(t) + tg'(t) - g(t) = \ln(t) \\ & ssi & \text{pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star,\ g'(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}. \end{array}$$

Or une primitive de $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est $t \longmapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$. Donc

$$f_p \text{ est une solution de l'équation } \quad ssi \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que pour tout } t \in \mathbf{R}_+^\star,\ g(t) = \frac{\ln^2(t)}{2} + \lambda.$$

Donc une solution particulière de (E) est $t \longmapsto \frac{t\ln^2(t)}{2}$. Donc

Conclusion. Finalement l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{\ln^2(t)}{2} + \lambda\right) t \end{array} \ : \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Recherche de l'unique solution demandée On cherche l'unique solution demandée f. Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f : t \longmapsto \left(\frac{\ln^2(t)}{2} + \lambda\right) t$. Or

$$f(1) = 3 \iff \left(\frac{\ln^2(1)}{2} + \lambda\right) 1 \iff \lambda = 3.$$

Finalement, $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{\ln^2(t)}{2} + 3\right) t \end{array}$.

5.2.6. Méthode numérique de résolution

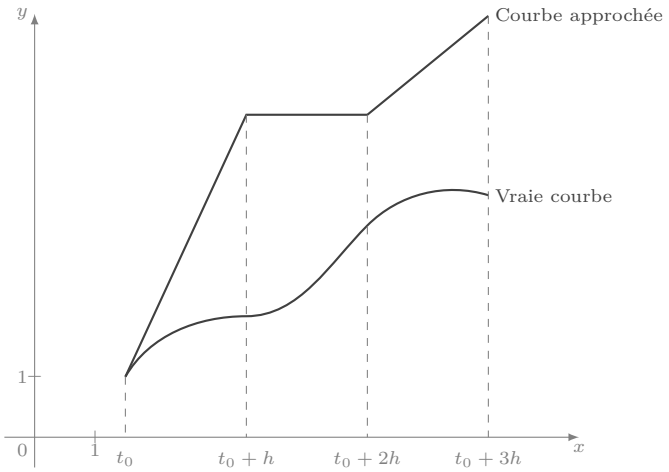
Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues réelles définies sur I, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}$. On cherche un graphe approché de la solution de $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & ay + b \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$.

Méthode d'Euler. Soit $h \in \mathbf{R}_+^\star$ (le pas de discrétisation).

- $y_0 = y(t_0)$;
- $y_1 = y_0 + h\,(a(t_0)y_0 + b(t_0)) \approx y(t_0 + h)$;
- $y_2 = y_1 + h(a(t_0 + h)y_1 + b(t_0 + h)) \approx y(t_0 + 2h)$;
- etc.

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a la relation de récurrence suivante :

$$y_n = y_{n-1} + h(at_0 + (n-1)h)y_{n-1} + b(t_0 + (n-1)h)$$



Sources d'erreurs :

- confusion entre la courbe et la tangente ;
- erreurs de calcul ;
- ne fonctionne pas pour des équations chaotiques (exemple : $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ autour de 0).

5.3. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

5.3.1. Présentation

Définition 5.75.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t), \tag{E}$$

où a et b sont deux éléments (« constantes ») de $\mathbf{K}$, c est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$.
On appelle **solution** de (E) sur I toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ deux fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \qquad f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E).
L'équation différentielle (E) est dite **homogène** si c est la fonction nulle.
On appelle **équation homogène associée à** (E) (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \tag{H}$$

Dans la pratique, on écrit (E) sous la forme :

$$y'' + ay' + by = c(t), \tag{E}$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y.

Pour toute la suite, on se fixe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, $c \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ (on ne travaillera qu'avec des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ entier) une fonction continue.

5.3.2. Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Définition 5.76.

L'**équation caractéristique** de (H) est l'équation d'inconnue $r \in \mathbf{K}$,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Proposition 5.77 - Solutions de l'équation homogène - cas complexe.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H).

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \ : \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution complexe r_0. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{r_0 t} \end{array} \ : \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Démonstration.
On vérifie facilement que les fonctions données dans les deux cas sont bien solutions de (H).
Réciproquement, soit f une solution de (H). Notons r l'une des solutions de l'équation caractéristique, et considérons la fonction $g : t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-rt}$. La fonction g est deux fois dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f'(t) = g'(t)\mathrm{e}^{rt} + rg(t)\mathrm{e}^{rt} \qquad \text{et} \qquad f''(t) = g''(t)\mathrm{e}^{rt} + 2g'(t)r\mathrm{e}^{rt} + g(t)r^2\mathrm{e}^{rt}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$0 = f''(t) + af'(t) + bf(t) = (g''(t) + (2r+a)g'(t) + (r^2 + ar + b)g(t))\mathrm{e}^{rt} = (g''(t) + (2r+a)g'(t))\mathrm{e}^{rt},$$

et donc, puisque pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$, on obtient que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g''(t) + (2r+a)\, g'(t) = 0.$$

Cela revient à dire que g' vérifie l'équation différentielle du premier ordre $z' + (2r+a)z = 0$, et donc il existe une constante $C_1 \in \mathbf{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad g'(t) = C_1 \mathrm{e}^{-(2r+a)t}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors $r = r_0 = -\frac{a}{2}$, et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g'(t) = C_1$. Ainsi, il existe $C_2 \in \mathbf{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$g(t) = C_1 t + C_2,$$
ce qui donne, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$f(t) = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{-rt}.$$

- Si $\Delta \neq 0$, on a par exemple $r = r_1$. Or $-a = r_1 + r_2$ (relations coefficients/racines), d'où, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g'(t) = C_1 \mathrm{e}^{-(2r_1 - r_1 - r_2)t} = C_1 \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t}$. Ainsi, puisque g est une primitive de g', il existe $C_2 \in \mathbf{C}$ tel que
$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad g(t) = -\frac{C_1}{r_1 - r_2}\mathrm{e}^{-r_1 t}\mathrm{e}^{r_2 t} + C_2$$
puis
$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad f(t) = -\frac{C_1}{r_1 - r_2}\mathrm{e}^{r_2 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_1 t}.$$
On a de nouveau le résultat annoncé (avec $\lambda = C_2$ et $\mu = \frac{C}{r_2 - r_1}$). □

Exercice d'application 5.78. Déterminer les solutions à valeurs complexes de

$$y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 0.$$

↪ L'équation caractéristique est $r^2 + (1+2i)r + (i-1) = 0$ d'inconnue r. Son discriminant est 1, elle a donc deux racines qui sont $-1-i$ et $-i$. L'ensemble des solutions est finalement

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-(1+i)t} + \mu \mathrm{e}^{-it} \end{array} \ : \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Proposition 5.79 - Solutions de l'équation homogène - cas réel.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H).

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 réelles. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \ : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution réelle r_0. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{r_0 t} \end{array} \ : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions, qui sont des nombres complexes conjugués de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \end{array} \ : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Démonstration.
Les deux premiers cas découlent directement du résultat avec les solutions complexes.
Supposons que $\Delta < 0$. On sait que les solutions à valeurs complexes de (H) sont telles qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbf{C}^2$ tel que

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \gamma \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} + \delta \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t} \end{array} \quad \textit{i.e.} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma \mathrm{e}^{i\beta t} + \delta \mathrm{e}^{-i\beta t}) \end{array}$$

Pour qu'une telle solution h ne prenne que des valeurs réelles, il faut et il suffit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait $\mathfrak{Im}(h(t)) = 0$, *i.e.*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad (\mathfrak{Re}(\gamma) - \mathfrak{Re}(\delta)) \sin(\beta t) + (\mathfrak{Im}(\gamma) + \mathfrak{Im}(\delta)) \cos(\beta t) = 0. \qquad (\star)$$

Pour $t = 0$, on trouve $\mathfrak{Im}(\gamma) = -\mathfrak{Im}(\delta)$ et pour $t = \frac{\pi}{2\beta}$, on obtient $\mathfrak{Re}(\gamma) = \mathfrak{Re}(\delta)$. Ainsi $\delta = \bar{\gamma}$. Réciproquement, si $\delta = \bar{\gamma}$, la condition $(\star)$ est vérifiée, et ainsi pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma \mathrm{e}^{i\beta t} + \bar{\gamma} \mathrm{e}^{-i\beta t}) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma \mathrm{e}^{i\beta t} + \overline{\gamma \mathrm{e}^{i\beta t}}) = 2\mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathfrak{Re}(\gamma \mathrm{e}^{i\beta t}).$$

Il s'ensuit que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(2\, \mathfrak{Re}(\gamma) \cos(\beta t) - 2\, \mathfrak{Im}(\gamma) \sin(\beta t)),$$

ce qui donne le résultat attendu (en posant $\lambda = 2\, \mathfrak{Re}(\gamma)$ et $\mu = -2\, \mathfrak{Im}(\gamma)$). □

Exercice d'application 5.80. Déterminer les solutions à valeurs réelles de

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

↪ L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 5 = 0$, d'inconnue r. Son discriminant est -16, elle a donc deux racines complexes conjuguées qui sont $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$. L'ensemble des solutions de l'équation est ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t}(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) \end{array} \ : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Remarque 5.81. Toute expression de la forme $\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$ peut s'écrire sous la forme $R\cos(x+\varphi)$ ou $R\sin(x+\psi)$. Par conséquent, lorsque $\Delta<0$, on peut aussi affirmer que l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle homogène (H) est

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & Re^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)\end{array} : (R,\varphi)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\right\}.$$

C'est cette forme qui est couramment utilisée en physique.

Proposition 5.82 - Solutions de l'équation générale.

Notons S_H l'ensemble des solutions homogènes. Si f_p est une solution de (E) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{h+f_p \ : \ h\in S_H\}.$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E), on peut obtenir toutes les solutions de (E) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H).

Démonstration.
La démonstration est similaire à celle de la Proposition 5.62. □

5.3.3. Recherche de solutions dans quelques cas particuliers

Comme pour les équations d'ordre 1, on commence par chercher des solutions évidentes. Sinon, on se trouvera dans l'un des trois cas suivants.

Remarque technique 5.83. Si c est une fonction polynomiale de degré d, on recherche une solution particulière sous la forme $f_p : t\longmapsto R(t)$, où R est une fonction polynomiale de degré :

$$\begin{cases} d & \text{si} \quad b\neq 0\\ d+1 & \text{si} \quad a\neq 0 \text{ et } b=0\\ d+2 & \text{si} \quad a=0 \text{ et } b=0\end{cases}$$

Exercice d'application 5.84. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation $y''-2y'+2y=2t^2$.

↪ *Recherche des solutions homogènes.* L'équation caractéristique est r^2-2r+2, ses racines sont $1+2i$ et $1-2i$. On en déduit que l'ensemble des solutions homogènes est

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & e^t(\lambda\cos(2t)+\mu\sin(2t))\end{array} : (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2\right\}.$$

Recherche d'une solution particulière. Soit $(a,b,c)\in\mathbf{R}^2$. On pose $f_p : t\longmapsto at^2+bt+c$. On a f_p deux fois dérivable, avec

$$f_p' : t\longmapsto 2at+b \qquad f_p'' : t\longmapsto 2a$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll} f_p \text{ solution de l'équation différentielle} & \textit{ssi} & \text{pour tout } t\in\mathbf{R},\ f_p''(t)-2f_p'(t)+2f_p(t)=2t^2\\ & \textit{ssi} & \text{pour tout } t\in\mathbf{R},\ 2at^2+(-4a+2b)t+(2a-2b+2c)=2t^2\\ & \textit{ssi} & \begin{cases} 2a &= 2\\ -4a+2b &= 0\\ 2a-2b+2c &= 0\end{cases}\\ & \textit{ssi} & (a,b,c)=(1,2,1)\end{array}$$

Donc $f_p : t\longmapsto t^2+2t+1$ est une solution générale.
Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & e^t(\lambda\cos(2t)+\mu\sin(2t))+t^2+2t+1\end{array} : (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2\right\}.$$

◇◇

◇◇

Remarque technique 5.85. Soit $(B, k) \in \mathbf{K}^2$. On suppose ici que $c : t \longmapsto Be^{kt}$. On cherche alors une solution particulière f_p sous la forme

- $f_p : t \longmapsto \alpha e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $f_p : t \longmapsto \alpha t e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'une des deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (on dit que k est une racine simple de l'équation).
- $f_p : t \longmapsto \alpha t^2 e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'unique racine (double) de l'équation caractéristique.

Exercice d'application 5.86. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10e^{3t}$.

$\hookrightarrow$ *Recherche des solutions homogènes* : fait à l'Exercice d'Application 5.84.
Recherche d'une solution particulière. Puisque 3 n'est pas une racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \longmapsto \alpha e^{3t}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. f_p est deux fois dérivable avec

$$f_p' : t \longmapsto 3\alpha e^{3t} \qquad f_p'' : t \longmapsto 9\alpha e^{3t}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll} f_p \text{ solution de l'équation différentielle} & \textit{ssi} & \text{pour tout } t \in \mathbf{R},\ f_p''(t) - 2f_p'(t) + 2f_p(t) = 10e^{3t} \\ & \textit{ssi} & \text{pour tout } t \in \mathbf{R},\ e^{3t}(9\alpha - 6\alpha + 2\alpha) = 10e^{3t} \\ & \textit{ssi} & 5\alpha = 10 \\ & \textit{ssi} & \alpha = 2 \end{array}$$

Donc $f_p : t \longmapsto 2e^{3t}$ est une solution générale.
Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) + 2e^{3t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

◇◇

Proposition 5.87.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ une fonction deux fois dérivable qui vérifie (E). Alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\Re e(f))'' + a \cdot (\Re e(f))' + b \cdot (\Re e(f)) & = & \Re e(c(t)) \\ (\Im m(f))'' + a \cdot (\Im m(f))' + b \cdot (\Im m(f)) & = & \Im m(c(t)) \end{array} \right.$$

Démonstration.
On compose par $\Re e$ (resp. $\Im m$), et on utilise que $\Re e(f^{(i)}) = \Re e(f)^{(i)}$ (resp. $\Im m(f^{(i)}) = Im(f)^{(i)}$) pour $i \in [\![1, 2]\!]$. □

◇◇

Remarque technique 5.88. On suppose que $c : t \longmapsto B\cos(\omega t)$ (resp. $c : t \longmapsto B\sin(\omega t)$), où $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$, et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
On commence par chercher une solution particulière g_p de l'équation différentielle sur $\mathbf{C}$:

$$z'' + az' + bz = Be^{i\omega t}.$$

en utilisant la remarque technique précédente. La fonction $\Re e(g_p)$ (resp. $\Im m(g_p)$) est alors solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = B\cos(\omega t)$ (resp. $y'' + ay' + by = B\sin(\omega t)$).

Exercice d'application 5.89. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10\cos(2t)$.

$\hookrightarrow$ *Recherche des solutions homogènes* : fait à l'Exercice d'Application 5.84.
Recherche d'une solution particulière. On commence par chercher une solution particulière sur $\mathbf{C}$ de

$$z'' - 2z' + 2z = 10e^{2it} \qquad (E_{\mathbf{C}})$$

Puisque $2i$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière de $(\mathrm{E}_\mathbf{C})$ sous la forme $g_p : t \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{2it}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. g_p est deux fois dérivable avec

$$g_p' : t \longmapsto 2i\alpha \mathrm{e}^{2it} \qquad f_p'' : t \longmapsto -4\alpha \mathrm{e}^{2it}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll} g_p \text{ solution de } (\mathrm{E}_\mathbf{C}) & ssi & \text{pour tout } t \in \mathbf{R},\ g_p''(t) - 2g_p'(t) + 2g_p(t) = 10\mathrm{e}^{2it} \\ & ssi & \text{pour tout } t \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^{2it}(-4\alpha - 4i\alpha + 2\alpha) = 10\mathrm{e}^{3t} \\ & ssi & (-2-4i)\alpha = 10 \\ & ssi & \alpha = 2i - 1 \end{array}$$

Donc $g_p : t \longmapsto (2i-1)\mathrm{e}^{2it}$ est une solution générale de $(\mathrm{E}_\mathbf{C})$. On en déduit qu'une solution de l'équation de départ est définie par $f_p(t) = \mathfrak{Re}(g_p(t)) = -\cos(2t) - 2\sin(2t)$.
Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^t(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)) - \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

◇◇

Remarque 5.90. La même astuce peut servir pour d'autres types de second membre. Si $c : t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}\cos(\omega t + \varphi)$ (resp. $c : t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}\sin(\omega t + \varphi)$), où $(B, k, \omega, \varphi) \in \mathbf{R}^4$, on utilise la même astuce qui est de « passer aux complexes » et on commence par trouver une solution particulière g_p de l'équation

$$z'' + az' + bz = B\mathrm{e}^{k + i(\omega t + \varphi)}.$$

◇◇

Remarque technique 5.91. Si c est de la forme $t \longmapsto Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, où Q est une fonction polynomiale et $\gamma \in \mathbf{K}$, on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto R(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, où R est une fonction polynomiale vérifiant :

- $\deg(R) = \deg(Q)$ lorsque γ n'est pas racine de P ;
- $\deg(R) = \deg(Q) + 1$ et le terme constant de R est nul lorsque γ est racine de P simple ;
- $\deg(R) = \deg(Q) + 2$ et les termes constants et du premier degré sont nuls lorsque γ est racine double de P.

Exercice d'application 5.92. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^x$.

↪

- On appelle S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E). Le polynôme caractéristique de (E) est $X^2 - 3X + 2$; ses racines sont 1 et 2.

$$S_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x} \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (ax^2 + bx)\mathrm{e}^x \end{array}$. $f \in D^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (ax^2 + (2a+b)x + b)\mathrm{e}^x \end{array} \qquad f'' : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b)\mathrm{e}^x \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll} f \text{ est solution de } (E) & ssi & \text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = x\mathrm{e}^x \\ & ssi & \text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ (-2ax + 2a - b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \\ & ssi & \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -1/2 \\ b & = & -1 \end{array} \right. \end{array}$$

Finalement, $x \longmapsto \left(-\dfrac{x^2}{2} - x\right)\mathrm{e}^x$ est solution de (E).

- L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(A - x - \dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x} \end{array} \ : (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Exercice d'application 5.93. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $y'' - 4y' + 4y = x^2\,\mathrm{ch}^2(x)$.

$\hookrightarrow$ On trouve comme ensemble S_H des solutions homogènes :

$$S_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (Ax+B)\mathrm{e}^{2x} \end{array} \ : (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2\,\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{4} + \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-2x}}{4} + \dfrac{x^2}{2}$. On pose :

$$\begin{array}{rrcl} (E_1): & y'' - 4y' + 4y & = & x^2\mathrm{e}^{2x} \\ (E_2): & y'' - 4y' + 4y & = & x^2\mathrm{e}^{-2x} \\ (E_3): & y'' - 4y' + 4y & = & x^2 \end{array}$$

- *Recherche d'une solution de* (E_1). Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (ax^4+bx^3+cx)\mathrm{e}^{2x} \end{array}$.
  Après dérivations de f, on obtient que f est solution de (E_1) ssi $(b,c) = (0,0)$. Ainsi une solution particulière de (E_1) est $x \longmapsto \dfrac{x^4\mathrm{e}^{2x}}{12}$.
- On cherche de même les solutions de (E_2) et (E_3).
- Le principe de superposition des solutions permet d'écrire l'ensemble des solutions de (E), à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{x^4}{48} + Ax + B\right)\mathrm{e}^{2x} + \left(\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{x}{64} + \dfrac{3}{512}\right)\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{46} \end{array} \ , \ (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Exercice d'application 5.94. Résoudre $y'' - y' = \sin(x)\,\mathrm{ch}(x)$ dans $\mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ L'ensemble S_H des solutions homogènes est :

$$S_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x} \end{array} \ : (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x)\,\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{2}\,\Im m(\mathrm{e}^{(i+1)x}) + \dfrac{1}{2}\,\Im m(\mathrm{e}^{(i-1)x})$. On pose :

$$\begin{array}{rrcl} (E_1): & y'' - y' & = & \mathrm{e}^{(i+1)x} \\ (E_2): & y'' - y' & = & \mathrm{e}^{(i-1)x} \end{array}$$

- *Recherche d'une solution de* (E_1). Soit $a \in \mathbf{C}$. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & a\mathrm{e}^{(i+1)x} \end{array}$. On trouve $a = -\dfrac{2i+1}{5}$. Donc une solution particulière de (E_1) est : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{2i+1}{5}\mathrm{e}^{(i+1)x} \end{array}$.
- *Recherche d'une solution de* (E_2). On procède comme avant.
- L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-2\ \mathrm{sh}(x)\cos(x)}{5} - \dfrac{\mathrm{ch}(x)\sin(x)}{5} + A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x} \end{array} \ : (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

5.3.4. Principe de superposition des solutions

Proposition 5.95 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et c_1, c_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On pose $(E_1) : \quad y'' + ay' + by = c_1$.
$(E_2) : \quad y'' + ay' + by = c_2$
Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2), alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est solution de :

$$y'' + ay' + b' = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2.$$

Démonstration.
Similaire à celle de la Proposition 5.71. □

Exercice d'application 5.96. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2t^2 + 10\mathrm{e}^{3t} + 10\cos(2t)$.

↪ On a résolu précédemment (cf. Exercices d'application 5.84, 5.86 et 5.89) :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2t^2 \\ y'' - 2y' + 2y = 10\mathrm{e}^{3t} \\ y'' - 2y' + 2y = 10\cos(2t) \end{cases}$$

Le principe de superposition des solutions permet d'en déduire immédiatement l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^t(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t))t^2 + 2t + 1 + 2\mathrm{e}^{3t} - \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{array} \; : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

5.3.5. Problème de Cauchy

Théorème 5.97 - Problème de Cauchy.

Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$.

Démonstration.
Admis. □

Chapitre 6

Ensembles, applications, relations d'équivalence

6.1. Ensembles : rappels et compléments

6.1.1. Vocabulaire général

Définition 6.1.

On appelle **ensemble** toute collection d'objets.
On appelle **élément** d'un ensemble E tout objet appartenant à la collection d'objets définissant E. Pour écrire que x est un élément de E, on note $x \in E$.

Définition 6.2.

On appelle **partie** (ou **sous-ensemble**) de E tout ensemble F d'éléments de E.

Un ensemble peut s'écrire :

- en **extension**. On donne la liste des éléments entre accolades. Par exemple : $\{1; 2; 4\}$.
- en **compréhension**. L'ensemble est décrit comme collection d'objets vérifiant une propriété. Deux formes sont utilisées :
  - $\{\, x \in B \mid \text{ Propriété } \}$ où B est un ensemble.
  - $\{F(x) \,:\, x \in A\}$ où A est une partie d'un ensemble E et F une expression définie pour tout $x \in A$.

On a

$$a \in \{\, x \in B \mid \text{ Propriété } \} \iff a \text{ vérifie Propriété.}$$

et

$$a \in \{F(x) \,:\, x \in A\} \iff \exists x \in A,\ a = F(x).$$

Exemple 6.3. L'ensemble ne contenant que l'élément a est appelé **singleton** a et est noté $\{a\}$.

Exemple 6.4. L'ensemble des multiples de 3 s'écrit $\{\, x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv\ 0[3]\} = \{3k \,:\, k \in \mathbf{Z}\}$. En particulier x est un multiple de 3 ssi $x \equiv\ 0[3]$ ssi il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 3k$.

Exercice d'application 6.5. Ecrire de trois façons différentes l'ensemble E des entiers positifs pairs.

$\hookrightarrow$ En extension, on a $E = \{0; 2; 4; ...\}$.
En compréhension on a $E = \{2n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$ ou $E = \{\, n \in \mathbf{N} \,|\, \exists k \in \mathbf{N},\ n = 2k\}$.

Exercice d'application 6.6. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Décrire de trois manières différentes l'ensemble $\mathbf{U}_n$.

$\hookrightarrow$ Par définition, on a :

$$\mathbf{U}_n = \{\, z \in \mathbf{C} \,|\, z^n = 1\}$$

De plus, un théorème du cours assure que :

$$\mathbf{U}_n = \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{n}}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \,:\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

Soit A et B deux ensembles, tel que pour tout $x \in A$, $F(x) \in B$. Il est possible d'une écriture en compréhension à l'autre :

$$\{F(x) \,:\, x \in A\} = \{\, y \in B \,|\, \exists x \in A,\ y = F(x)\}.$$

Définition 6.7.

On appelle **ensemble vide** l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\varnothing$.

Notation 8. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Ainsi $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.

Exemple 6.9. Soit E un ensemble. On a toujours $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice d'application 6.10. Ecrire l'ensemble $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ en extension.

$\hookrightarrow$ On a $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\varnothing; \{0\}; \{1\}; \{0, 1\}\}$

Remarque 6.11. La partie vide n'est pas facile à manipuler, principalement parce qu'elle se note de la même manière pour tous les ensembles. Ainsi, si E est un ensemble, $\varnothing$ désigne la partie vide de E, qui est un *élément* de $\mathcal{P}(E)$, mais aussi la partie de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ ne contenant aucun élément de $\mathcal{P}(E)$, qui est une *partie* de $\mathcal{P}(E)$. Hors de tout contexte, le sens du symbole $\varnothing$ n'est pas clair.

6.1.2. Inclusion et égalité

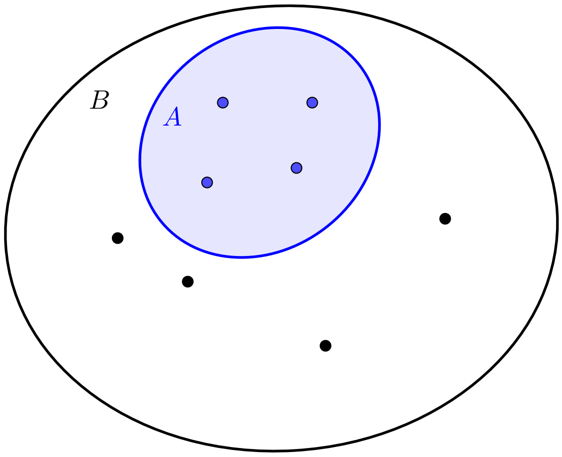
Définition 6.12.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A appartient à B, c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Dans ce cas, on note $A \subset B$.

On peut représentere schématiquement les ensembles à l'aide d'un **diagramme de Venn**. L'inclusion $A \subset B$ peut être schématisée ainsi :



Remarque 6.13. Il faut bien distinguer les symboles $\in$ et $\subset$. Par exemple, la notation $A \subset E$ a la même signification que $A \in \mathcal{P}(E)$.

◇◇

Remarque technique 6.14. Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on prend un élément générique de A et on montre qu'il appartient à B. Le schéma de preuve est donc le suivant :

Soit $x \in A$.

[raisonnement]

On en déduit que $x \in B$.
On vient d'établir que $A \subset B$.

Exercice d'application 6.15. Démontrer que les multiples de 6 sont des nombres pairs.

↪ Soit E l'ensemble des multiples de 6 et F l'ensemble des nombres pairs. On a

$$E = \{6n \,:\, n \in \mathbf{Z}\} \quad \text{et} \quad F = \{2n \,:\, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Soit $x \in E$. Il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 6n$. En particulier, $x = 2 \cdot (3n)$. Puisque $3n \in \mathbf{Z}$, on obtient que $x \in F$. Ainsi on vient de montrer que $E \subset F$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 6.16. Pour montrer que deux parties A et B de E sont égales, il y a deux façons de procéder :

1. Par double-inclusion : on montre que $A \subset B$ et que $B \subset A$.
2. En raisonnant par équivalences à partir d'un élément générique : on prend x quelconque dans E et on montre que $x \in A \iff x \in B$ (c'est un peu plus délicat car il faut traiter des équivalences).

Exercice d'application 6.17. Soit $E = \mathbf{R}^2$ et les deux parties de E suivantes :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = 1 \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(t+1, 2t+1) \,:\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Montrer que $A = B$.

↪ On procède par double inclusion.

Soit $(x, y) \in A$. Alors $2x - y = 1$. On pose $t = x - 1$. Alors $x = t + 1$ et $y = -1 + 2x = -1 + 2(t+1) = 2t + 1$. Donc $(x, y) = (t+1, 2t+1)$, et ainsi $(x, y) \in B$. On vient de montrer que $A \subset B$.

Soit $(x, y) \in B$. Alors il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 2t + 1$. On a $2x - y = 2(t+1) - (2t+1) = 1$, donc $(x, y) \in A$. On vient de montrer que $B \subset A$.

Par double inclusion, on a montré que $A = B$.

On aurait aussi pu travailler directement par équivalences. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in A &\iff 2x - y = 1 \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x &= t+1 \\ 2x - y &= 1 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t+1 \end{cases} \\ &\iff (x,y) \in F. \end{aligned}$$

Finalement, $E = F$.

Remarque : A et B représentent la même droite du plan. A est la **représentation cartésienne** de cette droite, tandis que B est une **représentation paramétrique**.

◇◇

6.1.3. Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 6.18.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

- Le **complémentaire** de A dans E, noté $\complement_E(A)$, (ou $E\backslash A$ ou $\overline{A}$) est

$$\{x \in E \mid \neg(x \in A)\} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est

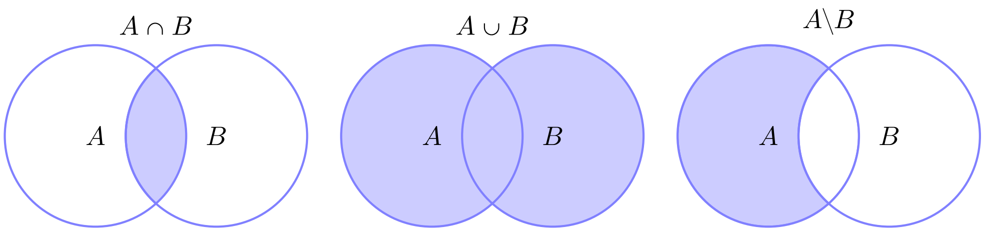
$$\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- L'**union** de A et B, notée $A \cup B$, est

$$\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- L'ensemble A **privé de** B, noté $A\backslash B$ est

$$\left\{x \in A \mid x \in \overline{B}\right\} = A \cap \overline{B}.$$



Avec les définitions, et puisque « et » et « ou » sont commutatifs, on a $\cap$ et $\cup$ commutatifs également :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \qquad A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

Proposition 6.19.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors

$$A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A.$$

Démonstration.
Remarquons que $\varnothing$ est inclus dans n'importe quel ensemble.
Supposons $A \neq \varnothing$. Soit $x \in A$. Alors l'assertion « $x \in A$ ou $x \in B$ » est vraie, donc $x \in A \cup B$. On vient donc de montrer que $A \subset A \cup B$.

Supposons $A \cap B \neq \varnothing$. Soit $x \in A \cap B$. Alors on a en particulier $x \in A$. On vient de montrer que $A \cap B \subset A$. □

Remarque 6.20. Dans les démonstrations de ce chapitre, on évitera d'utiliser la notation $x \notin A$ (x n'appartient pas à A), car cette écriture conduit trop souvent à des raccourcis « intuitifs ». On préférera écrire $x \in \overline{A}$ (ce qui revient exactement à dire que $x \notin A$...), et utiliser les propriétés écrites dans le cours (et rien d'autre sans le démontrer !).

Proposition 6.21 - Lois de Morgan.

Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E. Alors :
1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{rcll} x \in \overline{A \cup B} & \iff & x \notin \{a \in E \mid a \in A \text{ ou } a \in B\} & \\ & \iff & \neg(x \in A \text{ ou } x \in B) & \\ & \iff & \neg(x \in A) \text{ et } \neg(x \in B) & \text{(loi de Morgan « logique »)} \\ & \iff & x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} & \\ & \iff & x \in \overline{A} \cap \overline{B}. & \end{array}$$

On a montré $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

L'autre démonstration est laissée au lecteur. □

Proposition 6.22.

Soit A une partie d'un ensemble E.
1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{E} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = E$.
3. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.
4. $A \cap E = A$ et $A \cup \varnothing = A$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$.

$$x \in \overline{\overline{A}} \iff \neg(x \in \overline{A}) \iff \neg(\neg(x \in A)) \iff x \in A.$$

On vient de montrer que $\overline{\overline{A}}$.

2. Supposons qu'il existe $x \in \overline{E}$. C'est absurde puisque $x \in \overline{E}$ signifie que « $x \in E$ » est faux. Ainsi $\overline{E} = \varnothing$.
En utilisant 1. on obtient $\overline{\overline{E}} = \overline{\varnothing}$, *i.e.* $E = \overline{\varnothing}$.
3. On a $A \cap \overline{A} = \{x \in E \mid x \in A \wedge \neg(x \in A)\} = \varnothing$.
A partir de l'expression précédente on obtient, avec une loi de Morgan, $E = \overline{\varnothing} = \overline{A \cap \overline{A}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{A}} = \overline{A} \cup A = A \cup \overline{A}$.
4. Soit $x \in E$.
$$x \in A \cap E \iff x \in A \wedge x \in E \iff x \in A$$

Ainsi $A \cap E = A$. De cette relation appliquée à $\overline{A}$ on déduit, avec une loi de Morgan,

$$A = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A} \cap E} = A \cup \overline{E} = A \cup \varnothing.$$

□

Remarque 6.23. Le point 4. de la proposition précédente signifie que E est l'**élément neutre** pour l'intersection, et que $\varnothing$ est l'élément neutre pour la réunion.

Proposition 6.24.

Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E. Alors :

1. **Distributivité de $\cup$ sur $\cap$.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. **Distributivité de $\cap$ sur $\cup$.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. 1. Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
- Si $x \in B \cap C$, alors $x \in B$ et $x \in C$. Donc $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.

Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Supposons $x \in \overline{A}$. Si $x \in \overline{B}$, on a $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, d'où d'après 1., $x \in \overline{A \cup B}$, ce qui est contradictoire. Ainsi $x \in B$. De même, on montre que $x \in C$. Ainsi $x \in B \cap C$, ce qui entraîne que $x \in A \cup (B \cap C)$.

Dans tous les cas, $x \in A \cup (B \cap C)$. Donc $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.
D'où l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

L'autre démonstration est laissée au lecteur (on peut aussi le faire par double inclusion). □

Dans cette démonstration, on a utilisé la méthode suivante :

◇◇

Remarque technique 6.25. On rappelle que si P, Q et R sont des assertions, on a

$$(P \text{ ou } Q \Longrightarrow R) \equiv (P \Longrightarrow R \text{ et } Q \Longrightarrow R).$$

En conséquence, si A, B et C sont trois parties de E, que l'on veut montrer que $A \cup B \subset C$, on procède ainsi : on fixe $x \in A \cup B$ quelconque. On distingue deux cas :

- Si $x \in A$. [*Raisonnement*] donc $x \in C$.
- Si $x \in B$. [*Raisonnement*] donc $x \in C$.

On vient de montrer que si $x \in A \cup B$, alors $x \in C$. Ainsi $A \cup B \subset C$.

Exercice d'application 6.26. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Montrer que

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

↪ *Méthode 1.* On raisonne par double inclusion.

- Soit $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Alors $x \in A \backslash B$ ou $x \in B \backslash A$.
  - Si $x \in A \backslash B$, *i.e.* $x \in A \cap \overline{B}$. Alors $x \in A$ donc $x \in A \cup B$. Or $x \in \overline{B}$ donc en particulier $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, puis $x \in \overline{A \cap B}$. On a alors $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
  - Si $x \in B \backslash A$. Alors en échangeant les rôles de A et B, on montre de même que $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Donc $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \subset (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

- Soit $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$.
  - Supposons $x \in A$. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$, ce qui contredit $x \in \overline{A \cap B}$. Ainsi $x \in \overline{B}$, puis $x \in A \backslash B$ et ainsi $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
  - Si $x \in B$, on montre de même que $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

  Dans tous les cas, $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ donc $(A \cup B) \backslash (A \cap B) \subset (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Par double inclusion, on a bien montré l'égalité des deux ensembles.

Méthode 2. On peut raisonner directement en utilisant les propriétés précédentes.

$$\begin{array}{rcll} (A \backslash B) \cup (B \backslash A) & = & (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) & \\ & = & (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B}) & \text{(distributivité)} \\ & = & E \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap E & \\ & = & (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) & \text{(loi de Morgan)} \\ & = & (A \cup B) \backslash (A \cap B). & \end{array}$$

◇◇

Définition 6.27.

Soit E un ensemble. Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit A_i une partie de E. Alors :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Exercice d'application 6.28. Montrer que :

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}^\star} \left[\frac{-1}{n} ; \frac{1}{n}\right] = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n \in \mathbf{N}^\star} \left[\frac{-1}{n} ; \frac{1}{n}\right] = [-1 ; 1] .$$

↪ Notons $A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^\star} \left[\frac{-1}{n} ; \frac{1}{n}\right]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a $0 \in \left[-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}\right]$, donc $0 \in A$, puis $\{0\} \subset A$.
Réciproquement, soit $x \in A$. Supposons $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$. Notons n un entier strictement supérieur à $\frac{1}{|x|}$: $n > \frac{1}{|x|} > 0$. Alors $|x| > \frac{1}{n}$, ce qui contredit que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $|x| \leqslant \frac{1}{n}$. Finalement, $x = 0$ et $A \subset \{0\}$.
Finalement, $A = \{0\}$.

Notons $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^\star} \left[\frac{-1}{n} ; \frac{1}{n}\right]$. Soit $x \in [-1 ; 1]$. On a, pour $n = 1$, $x \in \left[-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}\right]$, d'où $x \in B$, puis $[-1 ; 1] \subset B$.
Réciproquement, soit $x \in B$. Alors il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $x \in \left[-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}\right]$, donc en particulier, puisque $-1 \leqslant -\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$, $x \in [-1 ; 1]$, et ainsi $B \subset [-1 ; 1]$.

Définition 6.29.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. A et B sont dites **disjointes** si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 6.30.

Soit E un ensemble, I un ensemble et pour tout $i \in I$, A_i, une partie de E.
On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une **partition** de E si

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$;
- $\forall (i,j) \in I^2, (i \neq j) \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (on dit que les A_i sont deux à deux disjoints) ;
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Exercice d'application 6.31. Montrer que $\left(\left\{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi)}\right\}\right)_{\theta\in[0\,;\,\pi[}$ est une partition de $\mathbf{U}$.

↪ Pour tout $\theta \in [0\,;\,\pi[$, on note $A_\theta = \left\{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi)}\right\}$. Pour tout $\theta \in [0\,;\,\pi[$, A_θ contient deux éléments, donc en particulier est non vide.
Soit $(\theta,\theta') \in [0\,;\,\pi[^2$. Supposons que $A_\theta = A_{\theta'}$. Alors on a en particulier $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ou $e^{i\theta} = e^{i(\theta'+\pi)}$ ou $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\theta'}$ ou $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i(\theta'+\pi)}$. Traitons ces cas dans l'ordre où ils apparaissent :

- Si $e^{i\theta} = e^{i\theta}$, alors $\theta \equiv\ \theta'\ [2\pi]$. Or $\theta - \theta' \in\ ]-\pi\,;\,\pi[$, d'où $\theta = \theta'$ (la seule valeur de k pour laquelle on ait $\theta - \theta' = 2k\pi$ est 0 (et on n'a jamais $\theta - \theta' = \pi + 2k\pi$ puisque $\theta - \theta' - \pi \in\ ]-2\pi\,;\,0[$).
- Les autres cas sont similaires.

On a clairement $\bigcup_{\theta\in[0\,;\,\pi[} A_\theta \subset \mathbf{U}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbf{U}$. Par définition, il existe $t \in [-\pi\,;\,\pi[$ tel que $z = e^{it}$. Si $t \in [0\,;\,\pi[$, on pose $\theta = t$ et on a $z = e^{i\theta}$. Sinon, on pose $\theta = t + \pi$ de sorte que $\theta \in [0\,;\,\pi[$ et $e^{i\theta+\pi} = e^{i(t+\pi)+\pi} = e^{it+2i\pi} = e^{it} = z$. Finalement $z \in \bigcup_{\theta\in[0\,;\,\pi[} A_\theta$.

6.1.4. Produit cartésien

Définition 6.32.

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F est

$$E \times F = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

On peut généraliser le produit cartésien à n ensembles (où $n \in \mathbf{N}^\star$) E_1, E_2,... E_n :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose

$$E^n = E \times E \times \cdots \times E = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \in E\}.$$

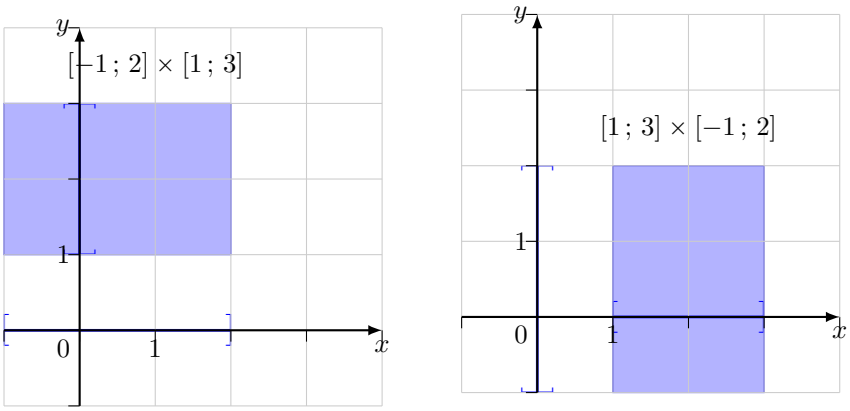
Les éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont appelés des **n-uplets**, avec les terminologies particulières suivantes pour les petites valeurs de n :

- les 2-uplets sont aussi appelés **couples** (et pas des produits !) ;
- les 3-uplets sont aussi appelés **triplets** ;
- les 4-uplets sont aussi appelés **quadruplets**.

Exemple 6.33.
1. Si le plan est muni d'un repère, l'ensemble des coordonnées des points du plan est $\mathbf{R}^2$.
2. Si l'espace est muni d'un repère, l'ensemble des coordonnées des points de l'espace est $\mathbf{R}^3$.

Exercice d'application 6.34. Dessiner $[-1\,;\,2] \times [1\,;\,3]$, puis $[1\,;\,3] \times [-1\,;\,2]$

↪



Remarque 6.35. L'ordre est important ! $E \times F$ et $F \times E$ sont deux ensembles différents en général.

Il faut aussi faire très attention aux notations !

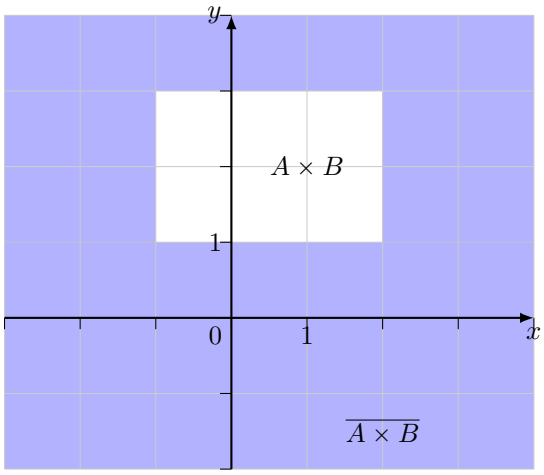
- $\{1, 2, 3\}$ désigne un ensemble : en particulier $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ (l'ordre n'a pas d'importance) et $\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ (les répétitions « ne comptent pas »).
- $(1, 2, 3)$ est un triplet, c'est-à-dire un élément d'un produit cartésien de trois ensembles ($\mathbf{R}^3$ par exemple). Le triplet $(3, 1, 2)$ est différent (l'ordre compte) et $(1, 1, 2, 3)$ est aussi différent (ça n'est même pas un triplet, mais plutôt un quadruplet).

Exercice d'application 6.36. Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Déterminer $\overline{A \times B}$ le complémentaire de $A \times B$ dans E^2 en fonction de $\overline{A}$, $\overline{B}$ et E.

↪

$$\begin{aligned}
\overline{A \times B} &= \big\{(x, y) \in E^2 \mid \neg(x \in A \text{ et } x \in B)\big\} \\
&= \big\{(x, y) \in E^2 \mid x \notin A \text{ ou } y \notin B\big\} \\
&= \big\{(x, y) \in E^2 \mid x \notin A\big\} \cup \big\{(x, y) \in E^2 \mid y \notin B\big\} \\
&= \overline{A} \times E \cup E \times \overline{B}
\end{aligned}$$



6.2. Applications

Dans toute la suite, E et F désigneront des ensembles.

6.2.1. Définition, restriction, prolongement

Définition 6.37.

Une **application** f de E dans F associe à chaque élément x de E un et un seul élément de F, appelé **image**, et noté $f(x)$.
Si $y \in F$, un **antécédent** de y par f est un élément x de E tel que $y = f(x)$.
E est appelé **ensemble de départ** et F **ensemble d'arrivée**.
On notera $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F, et, pour $f \in \mathcal{F}(E,F)$,

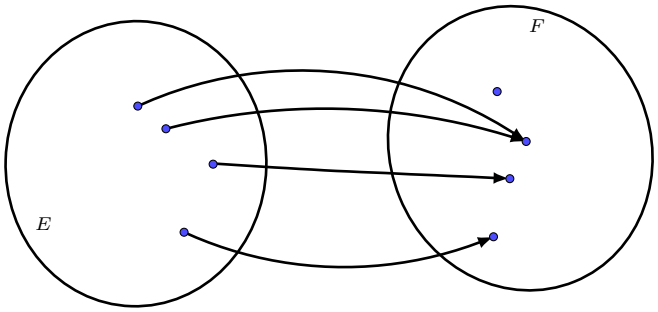
$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} .$$

Remarque 6.38. Un élément de E a une et une seule image dans F.

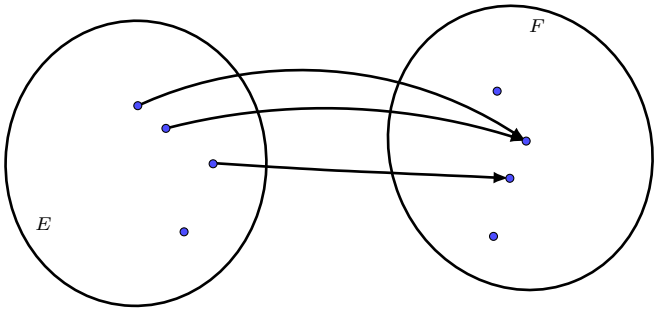
Un élément de F peut avoir zéro, un seul ou plusieurs antécédents dans E

On peut aussi les représenter par des **diagrammes sagittaux**.

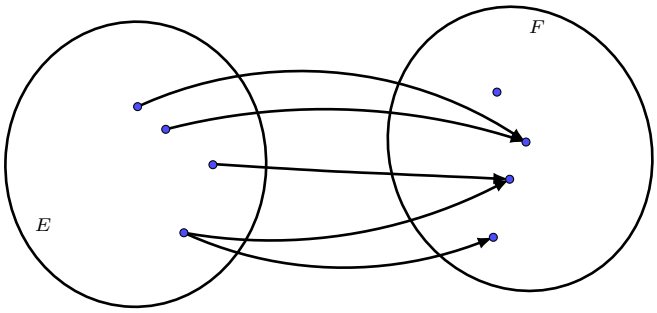
Le diagramme suivant correspond à une application.



Le diagramme suivant ne correspond pas à une application, car un élément de E n'a pas d'image.



Le diagramme suivant ne correspond pas à une application, car un élément de E possède deux images.



Définition 6.39 - Exemples de fonctions classiques.

1. On appelle **identité** de E, notée Id_E, l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}.$$
2. Si $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A, notée $\mathbf{1}_A$ l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathbf{1}_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}.$$
3. Soit I un ensemble fini (généralement $I = [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbf{N}^\star$). On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i\in I}$ une telle famille.

Proposition 6.40.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On a
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A.$$

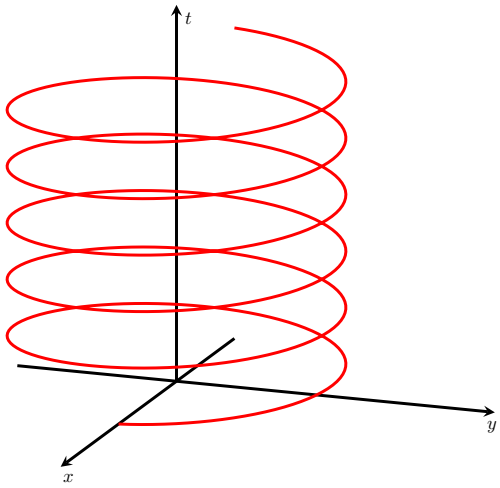
Démonstration.
Il suffit de vérifier les formules pour $x \in E$, en distinguant quatre cas $x \in A \cap B$, $x \in \overline{A} \cap B$, $x \in A \cap \overline{B}$ et $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. □

Définition 6.41.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Le **graphe** de f est $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$. C'est une partie de $E \times F$.

Exemple 6.42.

1. Le graphe de $\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & 3x^2 - 2 \end{array}$ est représenté géométriquement par une parabole du plan.
2. Le graphe de l'application $\begin{array}{rccc} & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$ est représenté géométriquement par une spirale de l'espace.



Il est parfois de utile de changer le domaine de définition d'une application, cela correspond aux notions de prolongement et de restriction.

Définition 6.43.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- Soit $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application $f|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
- Soit B un ensemble tel que $E \subset B$. Un **prolongement** de f à B est une application $g : B \longrightarrow F$ telle que $g|_E = f$.

Exemple 6.44. On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{array}$.

Alors $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est un prolongement (continu) de g.

6.2.2. Image directe et image réciproque d'une partie par une application

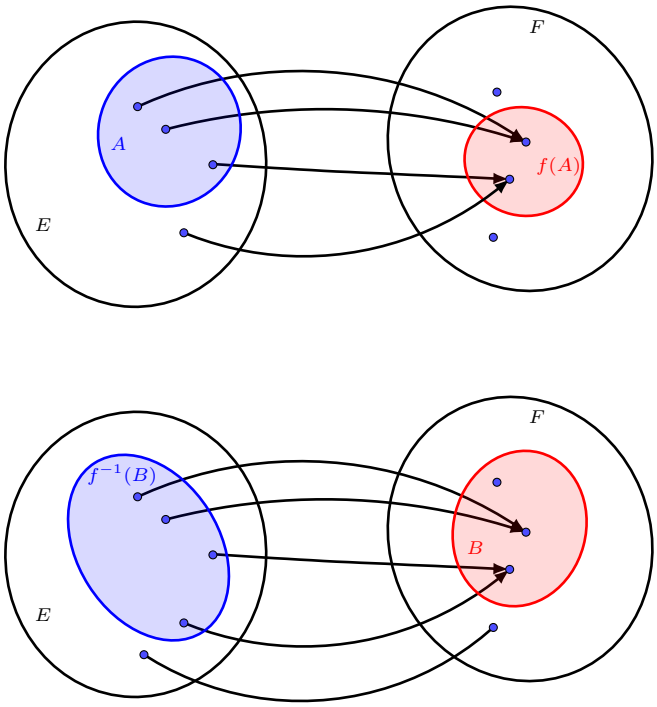
Définition 6.45.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.
L'**image directe** de A par f est l'ensemble des images des éléments de A par f :

$$f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$



Remarque 6.46. On voit avec l'illustration précédente que la partie $f^{-1}(f(A))$ n'est pas toujours incluse dans A (dans la première illustration, $f^{-1}(f(A)) = E$). De même, $f(f^{-1}(B))$ n'est pas toujours incluse dans B (dans la deuxième illustration, B contient trois éléments, alors que $f(f^{-1}(B))$ n'en contient que deux).

Exercice d'application 6.47. On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer $f([3\,;\,4])$, $f^{-1}([3\,;\,4])$, $f(]-1\,;\,2])$ et $f^{-1}(]-1\,;\,2])$.

↪

- Soit $y \in \mathbf{R}$.

$$y \in f([3\,;\,4]) \iff \exists x \in [3\,;\,4]\,,\ y = x^2 \iff y \in [9\,;\,16]\,,$$

car

$$3 \leqslant x \leqslant 4 \iff 9 \leqslant x^2 \leqslant 16$$

Finalement, $f([3\,;\,4]) = [9\,;\,16]$.

- Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x \in f^{-1}([3\,;\,4]) \iff f(x) \in [3\,;\,4] \iff x^2 = y \iff 3 \leqslant x^2 \leqslant 4 \iff x \in \left[-2\,;\,-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,;\,2\right],$$

donc $f^{-1}([3\,;\,4]) = \left[-2\,;\,-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,;\,2\right]$.

- De même, on montre que $f(]-1\,;\,2]) = [0\,;\,4]$ et $f^{-1}(]-1\,;\,2]) = \left[-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right]$.

Exercice d'application 6.48. Soit $f : \begin{array}{ccc} [\![0;7]\!] & \longrightarrow & \{0;1\} \\ n & \longmapsto & \text{le reste de la division de } n \text{ par } 2 \end{array}$ et $A = \{0;2;4\}$. Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(\{1\})$.

↪ $f(A) = \{0\}$ car tous les éléments de A sont pairs. De plus, $f^{-1}(\{1\})$ est l'ensemble des entiers impairs de $[\![0,7]\!]$, à savoir $\{1;3;5;7\}$.

Exemple 6.49. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$ et $\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}) = \overline{A}$.

Remarque 6.50. L'utilisation de la notation $f^{-1}(A)$ lorsque A est un ensemble NE SIGNIFIE PAS que f est une bijection.

$f^{-1}(A)$ n'est PAS l'image de A par la bijection réciproque de f, car f n'a aucune raison d'être bijective.

Proposition 6.51.

Soit f une application de E dans F.

- Soient A et A' des parties de E telles que $A \subset A'$. Alors $f(A) \subset f(A')$.
- Soient B et B' des parties de F telles que $B \subset B'$. Alors, $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Démonstration.

- Soit $y \in u(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. $A \subset A'$ donc $x \in A'$. On en déduit que $y = f(x) \in u(A')$.

  Cela étant vrai pour tout $y \in f(A)$, on en déduit que $f(A) \subset f(A')$.

- Soit $x \in f^{-1}(B)$. Comme $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$, on a $f(x) \in B$.

  Comme $B \subset B'$, on a aussi $f(x) \in B'$.

  On en déduit que $x \in f^{-1}(B')$.

  Cela étant vrai pour tout x dans $f^{-1}(B)$, on a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

□

Définition 6.52.

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on appelle **ensemble image** de f, noté $f(E)$ ou $\mathrm{Im}(u)$, l'ensemble des valeurs prises par f.

$$f(E) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}\,.$$

Exercice d'application 6.53. On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$, où $\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

↪ Soit $v \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Puisque v est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure qu'il existe $u \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ dérivable telle que $u' = v$ (u est une primitive de v). Or v est dérivable, donc $u' = v$ est également dérivable, et ainsi $u \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Ainsi la relation $f(u) = v$ entraîne $v \in f(\mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}))$. On vient de montrer que $\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \subset \mathrm{Im}(f)$.

L'inclusion réciproque est trivialement vraie car $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de f par définition.

Exercice d'application 6.54. Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{array}$.

↪ Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$z \in f(\mathbf{R}) \iff \exists \theta \in \mathbf{R},\ z = \mathrm{e}^{i\theta}$$

Or l'équation $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ d'inconnue θ admet une solution si et seulement si $|z| = 1$. Ainsi $f(\mathbf{R}) = \mathbf{U}$.

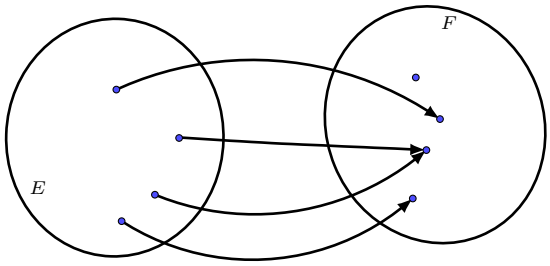
6.2.3. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 6.55.

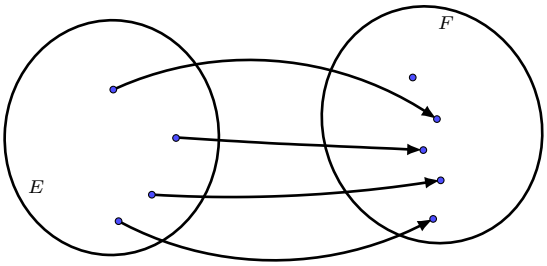
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est **injective** si tout élément de F a au plus un antécédent par f. Autrement dit,
$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$
- f est **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f. Autrement dit,
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$
- f est **bijective** si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes elle est à la fois injective et surjective, *i.e.* si tout élément de F a un et un seul antécédent par f. Autrement dit,
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

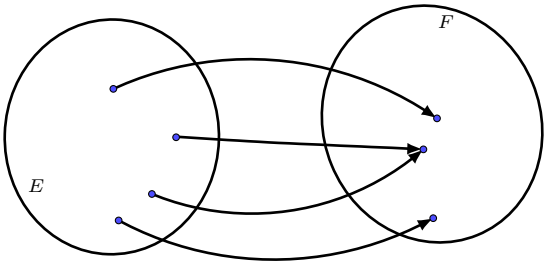
Application non injective, non surjective



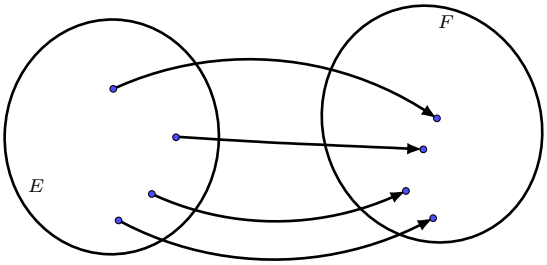
Application injective, non surjective



Application non injective, surjective



Application bijective



Remarque technique 6.56.

1. Pour démontrer l'injectivité, on peut suivre le schéma de preuve suivant :

   On veut montrer que f est injective. Soient x et x' éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
   [raisonnement]
   On en déduit que $x = x'$.
   On vient de montrer que tout élément de F admet au plus un antécédent par f, donc f est une application injective.
2. Pour montrer la surjectivité, on peut suivre le schéma de preuve suivant :

   Première méthode. On veut montrer que f est surjective. Soit $y \in F$.
   [raisonnement]

On en déduit qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
On vient de montrer que tout élément de F admet au moins un antécédent par f, donc f est une application surjective.

3. Pour montrer la bijectivité, on peut montrer l'injectivité et la surjectivité en utilisant ce qui précède.

Exercice d'application 6.57. On considère :

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;3] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} [-2\,;2] & \longrightarrow & [0\,;4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} [0\,;2] & \longrightarrow & [0\,;4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Déterminer si ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives.

$\hookrightarrow$

1. • Injectivité. Soit $(a, b) \in [0\,;1]$ tel que $f(a) = f(b)$. On a
$$a^2 = b^2 \iff |a| = |b| \iff a = b,$$
car les deux nombres sont de même signe. Ainsi f est injective.
   • Surjectivité. Pour $y = 3$, on a $\{\sqrt{y}\} \cap [0\,;1] = \varnothing$, donc l'équation n'admet pas de solution : f n'est pas surjective (3 n'a pas d'antécédent par f). En particulier, f n'est pas bijective.
2. • On a $g(-1) = g(1)$, donc g n'est pas injective. En particulier, g n'est pas bijective.
   • Surjectivité. Soit $y \in [0\,;4]$. On a $\sqrt{y} \in [0\,;2]$ et $g(\sqrt{y}) = y$, donc g est surjective.
3. On fait comme avant, et on montre séparément injectivité et surjectivité.

◇◇◇

Les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sont définies à partir du nombre d'antécédents des éléments de l'ensemble d'arrivée : cela revient à compter les solutions d'équations :

◇◇◇

Remarque technique 6.58. Pour déterminer si une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, bijective ou surjective, on peut compter le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in E$:

- si l'équation admet au plus une solution pour tout $y \in F$, alors f est injective ;
- si l'équation admet au moins une solution pour tout $y \in F$, alors f est surjective ;
- si l'équation admet exactement une solution pour tout $y \in F$, alors f est bijective.

Exercice d'application 6.59. On considère :

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;3] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} [-2\,;2] & \longrightarrow & [0\,;4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} [0\,;2] & \longrightarrow & [0\,;4] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Déterminer si ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives.

$\hookrightarrow$

1. Soit $y \in [0\,;2]$. On considère l'équation
$$x^2 = y \tag{E}$$
d'inconnue $x \in [0\,;1]$.
Soit $x \in [0\,;1]$. On a :
$$x^2 = y \iff x = \sqrt{y}.$$
   • Puisque $\sqrt{y} \in \left[0\,;\sqrt{2}\right]$ (vérification importante !), donc l'équation (E) admet une solution. Ainsi f est injective.
   • Pour $y = 3$, l'équation (E) n'a pas de solution puisque $\sqrt{3} \notin [0\,;1]$. Donc f n'est pas surjective.
2. Soit $y \in [0\,;4]$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in [-2\,;2]$.

- Pour $y = 1$, l'équation (E) possède deux solutions (1 et -1), donc (E) n'est pas injective.
- Puisque $f(x) = y \iff x \in \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$, avec $-2 \leqslant -\sqrt{y} \leqslant \sqrt{y} \leqslant 2$, l'équation (E) possède au moins une solution. Ainsi g est surjective.

3. Soit $y \in [0\,;\,4]$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in [0\,;\,2]$. On a

$$f(x) = y \iff x \in \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\} \iff x = \sqrt{y},$$

puisque $x \geqslant 0$. Donc l'équation (E) admet exactement une solution pour tout $y \in [0\,;\,4]$. Ainsi h est bijective.

◇◇

Exercice d'application 6.60. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité si f est surjective.
2. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$, avec égalité si f est injective.

$\hookrightarrow$

1. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. De plus, par définition de l'image réciproque, $f(x) \in A$. Il s'ensuit $y \in A$. On vient de montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Supposons f surjective. Soit $y \in B$. Alors, par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Puisque $y \in B$, $f(x) \in B$, puis $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, en utilisant à nouveau $y = f(x)$, on obtient $y \in f(f^{-1}(B))$. On vient de montrer que $B \subset f(f^{-1}(B))$, d'où $B = f(f^{-1}(B))$.
2. Soit $x \in A$. On a $f(x) \in f(A)$, puis $x \in f^{-1}(f(A))$. On vient de montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Supposons f injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a $f(x) \in f(A)$, puis il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, on en déduit $x = x'$. Puisque $x' \in A$, on obtient $x \in A$. On vient de montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Finalement $A = f^{-1}f(A))$.

Proposition 6.61.

Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, alors $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une surjection.

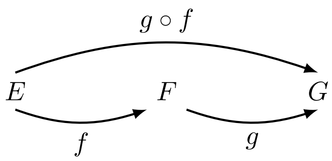
Démonstration.
Soit $y \in f(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $\tilde{f}(x) = f(x) = y$. Donc, tout élément de $f(E)$ a au moins un antécédent par $\tilde{f}$. □

6.2.4. Composition d'applications

Définition 6.62.

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle **application composée** de f par g l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Proposition 6.63.

Soient E, F, G et H des ensembles.

1. Pour tout $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.
2. Pour tous $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Démonstration. 1. Immédiat.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$. Soit $x \in E$.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

□

Remarque 6.64. Le point 2. de la proposition traduit l'associativité de $\circ$.

Proposition 6.65.

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
   Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
   Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
   Inversement, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Démonstration. 1. Supposons f et g injectives. Soit $(x,x') \in E^2$ tel que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque g est injective, on a $f(x) = f(x')$. Puisque f est injective, on a $x = x'$. Ainsi $g \circ f$ est injective.
Réciproquement, supposons $g \circ f$ injective. Soit $(x,x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En composant par g, on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, puis par injectivité de $g \circ f$, $x = x'$. Ainsi f est injective.

2. Supposons f et g surjective. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Par surjectivité de f, il existe $x \in F$ tel que $f(x) = y$. Ainsi $f(g(x)) = f(y) = z$, et la surjectivité de $g \circ f$ est acquise.
   Réciproquement, supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. Par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Ainsi $f(x)$ est un antécédent de z par g, donc g est surjective.

3. Immédiat avec les points précédents. □

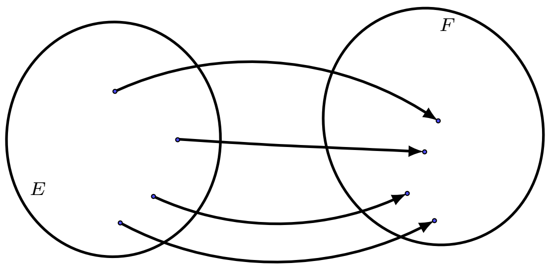
Définition 6.66.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, on peut définir l'application f^{-1}, appelée **bijection réciproque** de f et définie de F dans E par :

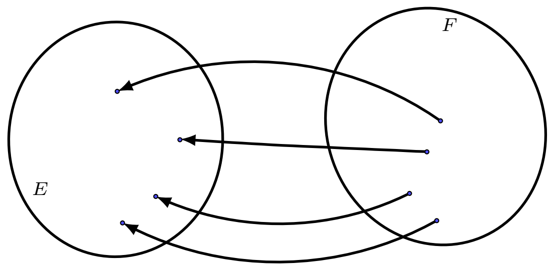
$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

Autrement dit,

$$\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

On obtient avec la définition que

$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad x = f^{-1}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad y = f(f^{-1}(y)).$$

Ces relations permettent de caractériser les bijections :

Proposition 6.67.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

L'application g est alors unique et c'est la bijection réciproque de f.

Démonstration.
Si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ convient.
Réciproquement, supposons qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On déduit de la première égalité que f est injective, et de la seconde que f est surjective. Ainsi f est bijective.
Enfin, en composant $f \circ g = Id_E$ par f^{-1}, on obtient que $g = f^{-1}$. ☐

◇◇

Remarque technique 6.68. Cette proposition fournit une troisième méthode pour déterminer si un application est bijective : si on arrive à déterminer directement une application que l'on pense être la réciproque de f, on introduit celle-ci, que l'on note g par exemple (ne surtout pas la noter f^{-1} tant qu'on n'a pas prouvé que f est bijective) et on vérifie que $f \circ g = \mathrm{Id}_f$ et que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice d'application 6.69. Justifier que $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

↪ Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$. On vérifie que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+,\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x.$$

◇◇

Proposition 6.70.

- Si f est une bijection de E dans F et si g est une bijection de F dans G, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$
- Si f est une bijection de E dans F, alors sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective et :
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration.

- On a vu que $g \circ f$ est bijective (cf. Proposition 6.65). Par ailleurs,
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_G \qquad \text{et} \qquad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_F.$$
Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Cela résulte directement des identités $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. □

6.3. Relation d'équivalence

Définition 6.71.

Soit E un ensemble. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E la donnée d'une partie Γ de $E \times E$.
On dit qu'un élément $x \in E$ est en relation avec un autre élément $y \in E$, et on note $x\mathcal{R}y$, si $(x, y) \in \Gamma$.

Exemple 6.72. Notons $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par $\Gamma = \{(x, x) : x \in E\}$. Alors $x\mathcal{R}x$ si et seulement si $x = y$.

Définition 6.73.

Une **relation d'équivalence** sur un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E qui est :

1. **réflexive** : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;
2. **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
3. **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

On appelle alors **classe d'équivalence modulo** $\mathcal{R}$ d'un élément $x \in E$, note $\overline{x}$ (ou $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$) la partie de E donnée par :
$$\overline{x} = \{\, y \in E \mid y\mathcal{R}x \}$$
Ainsi $\overline{x} \in \mathcal{P}(E)$.
Les éléments de $\overline{x}$ sont appelés les **représentants** de la classe de x.

Exemple 6.74. On note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On rappelle que deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{e_2} = k\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_1} = k\overrightarrow{e_2}$. La relation de colinéarité n'est pas une relation d'équivalence sur $\overrightarrow{P}$ (elle est réflexive, transitive mais pas symétrique).
La relation de colinéarité est toutefois une relation d'équivalence si l'on se restreint à l'ensemble $\overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ des vecteurs non nuls du plan. Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(1; 1)$, la classe d'équivalence de $\overrightarrow{u}$ est constituées de tous les vecteurs portés par la première bissectrice.

Exercice d'application 6.75.

1. Démontrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \ [2\pi],$$
est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Décrire $\overline{x}$ à l'aide d'un ensemble écrit en compréhension.

↪

1. La preuve a déjà été faite au chapitre 3. Rappelons-la rapidement.
   - *Réflexivité.* Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $x = x + 0 \times 2\pi$, donc $x \equiv x \ [2\pi]$, *i.e.* $x\mathcal{R}x$.
   - *Symétrie.* Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x \equiv y \ [2\pi]$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$. Ainsi $y = x + (-k)2\pi$, où $-k \in \mathbf{Z}$. Ainsi $y \equiv x \ [2\pi]$, *i.e.* $y\mathcal{R}x$.
   - *Transitivité.* Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x \equiv y \ [2\pi]$ et $y \equiv z \ [2\pi]$. Alors il existe $(k,k') \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x = y + 2k\pi$ et $y = z + 2k'\pi$. Ainsi $x = z + 2(k+k')\pi$, puis $x\mathcal{R}z$.

   Finalement, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On a
$$\overline{x} = \{ y \in \mathbf{R} \mid \exists k \in \mathbf{Z},\ y = x + 2k\pi \} = \{ x + 2k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z} \}$$
(qu'on note parfois $x + 2\pi\mathbf{Z}$).

Proposition 6.76.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

1. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\overline{x} = \overline{y}$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.
2. L'ensemble des classes d'équivalences constitue une partition de E.

Démonstration. 1. Soit $(x,y) \in E^2$. Supposons que $\overline{x} = \overline{y}$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $x \in \overline{x}$, puis $x \in \overline{y}$, donc $x\mathcal{R}y$ par définition.
Réciproquement, on suppose que $x\mathcal{R}y$. Montrer que $\overline{x} = \overline{y}$. On procède par double inclusion. Soit $z \in \overline{x}$. On a $z\mathcal{R}x$. Or $x\mathcal{R}y$ donc, par transitivité, $z\mathcal{R}y$, ce qui signifie que $z \in \overline{y}$. On a montré que $\overline{x} \subset \overline{y}$. L'autre inclusion se montre de la même manière.

2. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $x \in \overline{x}$ pour tout $x \in E$. En particulier $\overline{x} \neq \varnothing$.
On a également, pour tout $x \in E$, $x \in \bigcup_{x \in E} \overline{x}$. Ainsi $E \subset \bigcup_{x \in E} \overline{x}$. L'autre inclusion étant triviale, on a $\bigcup_{x \in E} = E$.
Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$. Soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. Alors $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Avec le point (1), on obtient donc $\overline{z} = \overline{x}$ et $\overline{z} = \overline{y}$, d'où $\overline{x} = \overline{y}$. Ainsi, on vient de montrer par contraposition que les classes d'équivalences sont disjointes deux à deux. □

Chapitre 7

Nombres entiers, ensembles finis et dénombrement

Je n'ai jamais fait quoi que ce soit d'« utile ».

G. H. Hardy [1]

Un jour en classe...

– *Quel est le plus grand de tous les nombres ?*
– *7823 Monsieur.*
– *Et 7824 alors ?*
– *Oh Monsieur, j'y étais presque !*

7.1. Rudiments d'arithmétique dans N

Proposition 7.1.

1. Toute partie non vide de **N** possède un plus petit élément (on dit que **N** est **bien ordonné**).
2. Toute partie non vide et majorée de **N** possède un plus grand élément.

1. Godfrey Harold HARDY - mathématicien britannique (1877-1947). La citation provient de son ouvrage *Apologie d'un Mathématicien*, dans lequel Hardy évoque son aversion pour les mathématiques appliquées et sa passion pour les mathématiques pures, « inutiles » et belles. Cette citation est d'autant plus savoureuse qu'un domaine de recherche de Hardy était l'arithmétique et que cette branche des mathématiques est l'une des plus appliquée aujourd'hui (dans le sens où tous les systèmes de chiffrement actuel, qui sont omniprésents de votre carte bancaire jusqu'à votre téléphone portable, sont basés sur les nombres premiers). La recherche mathématique n'a pas toujours vocation à être utile dans l'instant, mais qui sait ce qu'il en adviendra plus tard...

Démonstration. 1. Soit A une partie non vide de $\mathbf{N}$. Supposons que A ne possède pas de plus petit élément.
Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « pour tout $x \in A$, $x \geqslant n$ ».
H_0 est vraie puisque $A \subset \mathbf{N}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie, c'est-à-dire que n minore A. Or A ne possède pas de plus petit élément, donc pour tout $x \in A$, $x > n$. Ainsi pour tout $x \in A$, $x \geqslant n+1$, ce qui signifie que H_{n+1} est vraie.
Le principe de récurrence permet de conclure.
Ce résultat appliqué à $x \in A$ fixé et $n = x + 1$ est contradictoire, et on conclut que A possède un plus petit élément.

2. On cherche à démontrer que toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ possède un plus grand élément. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$. Notons B l'ensemble des majorants de A.

   - Montrons que B possède un plus petit élément, que nous noterons m.
     A est majorée, donc B est non vide. Comme $\mathbf{N}$ est bien ordonné, B possède un plus petit élément.

   - Supposons $m = 0$. Pour tout $x \in A$, $x \leqslant m$, donc $A = \{0\}$, et $m = 0$ est le plus grand élément de A.

   - Supposons $m > 0$. Alors $m - 1$ n'appartient pas à B (puisque m est le plus petit élément de B), donc $m - 1$ ne majore pas A. Il existe donc $a \in A$ tel que $m - 1 < a \leqslant m$, d'où $a = m$ (l'inégalité ne concernant que des entiers). Comme m majore A, m est bien le plus grand élément de A. □

7.1.1. Diviseurs et multiples

Définition 7.2.

Soit a et b deux entiers naturels, on dit que a est un **diviseur** de b, ou que a **divise** b ou encore que b est un **multiple** de a, s'il existe un entier naturel k tel que $b = ka$.
Le cas échéant, on note $a \mid b$.
L'ensemble des multiples entiers naturels de a est l'ensemble

$$a\mathbf{N} = \{a \cdot n \,:\, n \in \mathbf{N}\}.$$

Exemple 7.3.
- 1 divise tous les entiers naturels mais n'est divisible que par 1.
- 0 est un multiple de tout entier naturel mais n'est le diviseur que de lui-même.
- L'ensemble des diviseurs entiers naturels de 6 est $\{1, 2, 3, 6\}$.

Exercice d'application 7.4. Montrer que pour tout entier positif impair n, $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}$ impair. Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 - 1 = 4q(q + 1)$ qui est un multiple de 8 car, comme les entiers q et $q + 1$ sont consécutifs, l'un deux est pair, et l'on a $n^2 - 1 = 8\frac{q(q+1)}{2}$, avec $\frac{q(q+1)}{2} \in \mathbf{N}$.

Proposition 7.5 - Quelques critères de divisibilité.

Soit n un entier naturel dont l'écriture décimale est $n = \overline{a_p \ldots a_1 a_0}$, ce qui signifie que

$$n = a_p 10^p + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0,$$

avec $a_i \in [\![0, 9]\!]$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$.

(a) n est un multiple de 2 si et seulement si a_0 est un multiple de 2, *i.e.* $a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

(b) n est un multiple de 3 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est un multiple de 3.

(c) n est un multiple de 5 si et seulement si a_0 est un multiple de 5, *i.e.* $a_0 \in \{0; 5\}$.

(d) n est un multiple de 9 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est un multiple de 9.

(e) n est un multiple de 10 si et seulement si a_0 est un multiple de 10, *i.e.* $a_0 = 0$.

(f) n est un multiple de 11 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est un multiple de 11.

Démonstration. (a) On a

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 2 \cdot 5 \cdot \sum_{k=0}^{p} a_k 10^{k-1} + a_0,$$

donc n est divisible par 2 si et seulement si a_0 est divisible par 2.

(b) Le binôme de Newton assure que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $10^k = (9+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 9^j$. Ainsi

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 9^k \right) = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(1 + 9 \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 9^{j-1} \right) = \sum_{k=0}^{p} a_k + 3 \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 3 \cdot 9^{j-1} \right)$$

L'entier n est donc multiple de 3 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.

(c) Même preuve que (a), en factorisant la première somme par 5.

(d) Même preuve que (b), en factorisant la second somme par 9.

(e) Même preuve que (a), en factorisant la première somme par 10.

(f) Le binôme de Newton assure que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $10^k = (11-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^j$. Ainsi,

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j 11^j \right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k + 11 \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} 11^{j-1} \right)$$

L'entier n est donc multiple de 11 si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11. □

La relation « $\mid$ divise » est réflexive car pour tout entier naturel a, on a $a \mid a$. Elle est également transitive car si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.

La relation « $\mid$ divise » n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique : si $a \mid b$ alors on a pas nécessairement $b \mid a$ (exemple $a = 3$ et $b = 6$). Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 7.6.

Soit $(a, b) \in \mathbf{N}^2$. On a

$$(a \mid b \text{ et } b \mid a) \iff a = b.$$

Démonstration.
Sens direct. On suppose que $a \mid b$ et $b \mid a$. Il existe deux entiers naturels k et k' tels que $b = ka$ et $a = k'b$ ce qui donne $a = kk'a$. Si $a \neq 0$, alors $kk' = 1$. Comme k et k' sont des entiers naturels, on a nécessairement $k = k' = 1$ ce qui montre que $a = b$. Si $a = 0$, alors $b = k \times 0 = 0$ donc $a = b = 0$.
Sens réciproque. Si $a = b$ alors le résultat est évident. □

Remarque 7.7. La proposition précédente traduit l'antisymétrie de la relation $|$. Ainsi $|$ est une relation d'ordre.

Proposition 7.8.

Soit $a, b, u, v \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$(d \mid a \text{ et } d \mid b) \implies d \mid (au + bv)$$

et

$$a \mid b \iff ax \mid bx.$$

Démonstration.
- Supposons que $d \mid a$ et $d \mid b$. Alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que $a = dk$ et $b = dk'$. Avec deux tels entiers naturels k et k', on a donc $au + bv = dku + dk'v = d(ku + k'v)$. Puisque $ku + k'v$ est un entier naturel, on obtient que $d \mid (au + bv)$
- Supposons que $a \mid b$. Alors, il existe un entier naturel k tel que $b = ak$. Pour un tel k, on a donc $bx = akx = axk$ donc $ax \mid bx$.
  Réciproquement, supposons que $ax \mid bx$. Il existe donc un entier naturel k tel que $bx = axk$. Considérons un tel entier k. Comme $x \neq 0$, $b = ak$ donc $a|b$.

□

Proposition 7.9.

Soit a, b deux entiers naturels non nuls. Si b divise a alors $b \leqslant a$.

Démonstration.
Si b divise a, alors $a = bk$ où k est un entier naturel. Puisque $a \neq 0$, $k \neq 0$, donc $k \geqslant 1$ donc $bk \geqslant b$ donc $b \leqslant a$. □

7.1.2. Division euclidienne dans les entiers naturels

Théorème 7.10 - Division euclidienne.

Soit $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^\star$. Il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est appelé **quotient** de la division euclidienne de a par b.
r est appelé **reste** de la division euclidienne de a par b.

Démonstration.
• Unicité de (q,r). Soit (q,r) et (q',r') deux couples d'entiers naturels vérifiant

$$a = qb + r, \quad 0 \leqslant r < b \qquad \text{et} \qquad a = q'b + r', \quad 0 \leqslant r' < b.$$

Montrons que $q = q'$ et que $r = r'$.

Comme $-b < -r' \leqslant 0$, on a $-b < r - r' < b$ c'est-à-dire $\mid r - r' \mid < b$. Or par définition de r et r', on a

$$\mid r - r' \mid = \mid (a - bq) - (a - bq') \mid = b \mid q' - q \mid .$$

On a donc $b \mid q' - q \mid < b$ donc $\mid q' - q \mid < 1$ ce qui implique que $\mid q' - q \mid = 0$ et donc que $q = q'$. Mais alors $\mid r - r' \mid = b \mid q' - q \mid = 0$ c'est-à-dire $r = r'$.

• Existence du couple (q,r). L'ensemble $A = \{n \in \mathbf{N} : nb \leqslant a\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$ puisque $0 \in A$. De plus A est majoré par a car si $n \in A$ alors $nb \leqslant a$ et donc $n \leqslant a$ car $b \geqslant 1$. L'ensemble A possède donc un plus grand élément que l'on note q et qui vérifie

$$qb \leqslant a \ \ (\text{car } q \in A) \qquad \text{et} \qquad (q+1)b > a \ \ (\text{car } q+1 \notin A).$$

En posant $r = a - qb$, on a $a = qb + r$ et $0 \leqslant r < (q+1)b - qb = b$. □

Exemple 7.11. Division euclidienne de 27 par 7. On a $27 = 3 \times 7 + 6$ et $0 \leqslant 6 < 7$. Le nombre 27 est appelé le **dividende** de cette division euclidienne, 7 le **diviseur**, 3 est le quotient et 6 le reste.

Remarque 7.12. Si q est le quotient de la division euclidienne de a par b, alors $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $\{n \in \mathbf{N},\ nb \leqslant a\} = [\![0, q]\!]$.

Proposition 7.13.

Soit $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^\star$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. On a

$$b \mid a \iff r = 0.$$

Démonstration.
Notons q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Si $r = 0$ alors on a $a = bq$ donc $b|a$.
Réciproquement, supposons que $b|a$. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $a = bk + 0$. Considérons un tel k. Comme $0 \in [0\,;\, b[$, par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de a par b, $k = q$ et $r = 0$. □

7.1.3. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple

Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls. Supposons que $a \neq 0$. Si un entier naturel n divise a alors $n \leqslant a$. Ainsi, l'ensemble des nombres entiers naturels qui divisent à la fois a et b est un ensemble fini de nombres (car il est inclus dans $[\![1, a]\!]$) et cet ensemble est non vide (car il contient 1). Cet ensemble possède donc un plus grand élément.

Définition 7.14.

Soit a et b deux entiers naturels. Si $(a,b) \neq (0,0)$, on appelle **plus grand commun diviseur** de a et b, et on note $\mathrm{PGCD}(a,b)$ (ou $a \wedge b$) le plus grand entier naturel qui divise a et b.
Par convention, $\mathrm{PGCD}(0,0) = 0$.

Remarque 7.15. Si a et b sont non nuls, $1 \leqslant \text{PGCD}(a,b) \leqslant \min(a,b)$. Pour tout entier naturel $a > 0$, $\text{PGCD}(a,0) = a$.

Exemple 7.16. Les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5, 15 et ceux de 12 sont 1, 3, 4, 6, 12 donc $\text{PGCD}(15,12) = 3$.

Proposition 7.17.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On note r le reste de division euclidienne de a par b. On a
$$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r).$$

Démonstration.
Notons q le quotient de cette division euclidienne.

- Par définition, $\text{PGCD}(a,b)$ divise a et b et comme $r = a - bq$, $\text{PGCD}(a,b)$ divise r. Ainsi $\text{PGCD}(a,b)$ divise b et r donc par définition de $\text{PGCD}(b,r)$, on a $\text{PGCD}(a,b) \leqslant \text{PGCD}(b,r)$.
- Par définition, $\text{PGCD}(b,r)$ divise b et r et comme $a = bq + r$, $\text{PGCD}(b,r)$ divise a. Ainsi $\text{PGCD}(b,r)$ divise a et b donc par définition de $\text{PGCD}(a,b)$, on a $\text{PGCD}(b,r) \leqslant \text{PGCD}(a,b)$.

N Finalement $\text{PGCD}(b,r) = \text{PGCD}(a,b)$. □

◇◇

Remarque technique 7.18. Cette proposition permet de construire un algorithme, appelé **algorithme d'Euclide**, pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers a et b. L'algorithme ci-dessous prend en entrée deux entiers a et b. En sortie de l'algorithme, la variable a contient $\text{PGCD}(a,b)$.

```
tant que b > 0
    r ← reste de la division euclidienne de a par b
    a ← b
    b ← r
fin tant que
```

Autrement dit, $\text{PGCD}(a,b)$ est le dernier reste non nul quand on effectue des divisions euclidiennes successives.

Une implémentation possible en Python est la suivante :

```python
def euclide(a, b):
    while (b > 0):
        r = a % b
        a = b
        b = r
    return a
```

Exercice d'application 7.19. Calculer $\text{PGCD}(306, 758)$.

↪ On a, avec l'algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{rrcl} & 758 & = & 306 \times 2 + \mathbf{146} \\ \text{puis} & 306 & = & \mathbf{146} \times 2 + 14 \\ \text{puis} & \mathbf{146} & = & 14 \times 10 + 6 \\ \text{puis} & 14 & = & 6 \times 2 + 2 \\ \text{puis} & 6 & = & 2 \times 3 + 0 \end{array}$$

Finalement, $\text{PGCD}(a,b)$ est le dernier reste non nul, à savoir 2.

◇◇

Définition 7.20.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque $\text{PGCD}(a,b) = 1$.

Exemple 7.21. $\text{PGCD}(3,4) = 1$ donc 3 et 4 sont premiers entre eux.

Définition 7.22.

On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$ de deux entiers est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des entiers naturels non nuls qui sont à la fois multiples de a et de b est un sous-ensemble non vide (car il contient ab) de $\mathbf{N}$ donc il possède un plus petit élément.

Définition 7.23.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle **plus petit commun multiple** de a et b, et on note $\text{PPCM}(a,b)$ (ou $a \vee b$) le plus petit entier naturel non nul qui soit un multiple de a et de b.
On convient que, pour tout $a \in \mathbf{N}$, $\text{PPCM}(a,b) = 0$. En particulier, $\text{PPCM}(0,0) = 0$.

Remarque 7.24. $\max(a,b) \leqslant \text{PPCM}(a,b) \leqslant ab$

Exemple 7.25. Les multiples strictement positifs de 6 sont 6, 12, 18, 24, 30… et ceux de 8 sont 8, 16, 24, 32… donc $\text{PPCM}(6,8) = 24$.

Proposition 7.26.

Soit $(a,b) \in (\mathbf{N}^\star)^2$. Si $b \mid a$ alors $\text{PGCD}(a,b) = b$ et $\text{PPCM}(a,b) = a$.

Démonstration.
On suppose que $b|a$. Alors $b \leqslant a$ donc $\max(a,b) = a$ et $\min(a,b) = b$. On sait donc que $\text{PGCD}(a,b) \leqslant b$. Or b est un diviseur de a et de b donc $\text{PGCD}(a,b) = b$. De même, on sait que $a \leqslant \text{PPCM}(a,b)$ or a est multiple de a et de b donc $\text{PPCM}(a,b) = a$. □

Proposition 7.27.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier naturel. Si $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $\text{PPCM}(a,b) \mid n$.

Démonstration.
On suppose que $a \mid n$ et $b \mid n$. On écrit la division euclidienne de n par $\text{PPCM}(a,b)$: on considère l'unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que

$$n = \text{PPCM}(a,b) \times q + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < \text{PPCM}(a,b).$$

Comme $r = n - \text{PPCM}(a,b) \times q$, on peut affirmer que r est un multiple de a et de b. Or $r < \text{PPCM}(a,b)$ donc $r = 0$. Ceci démontre que $\text{PPCM}(a,b) \mid n$. □

Proposition 7.28.

Pour tout $(a,b) \in \mathbf{N}^2$, $\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = a \times b$.

Démonstration.
Supposons que $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. Posons $\delta = \text{PGCD}(a,b)$ et $\mu = \text{PPCM}(a,b)$. Puisque δ divise a et b, il existe $(a',b') \in \mathbf{N}^2$, avec $\text{PGCD}(a',b') = 1$, tel que $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \delta a' \\ b & = & \delta b' \end{array}\right.$.
En particulier, $\delta a'b'$ est un multiple commun à a et b, donc à μ. Ainsi il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\delta a'b' = k\mu$.
Comme μ est un multiple commun à a et b, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^2$ tel que $\left\{\begin{array}{lcl} \mu & = & \alpha a \\ \mu & = & \beta b \end{array}\right.$. Ainsi $\left\{\begin{array}{lcl} b' & = & k\alpha \\ a' & = & k\beta \end{array}\right.$.
Or, $\text{PGCD}(a',b)' = 1$, donc $k = 1$. Ainsi $\delta a'b' = \mu$, et on conclut en multipliant par δ. □

Remarque technique 7.29. Puisqu'on connaît un algorithme pour calculer le PGCD de deux nombres, la proposition donne immédiatement une méthode pour calculer le PPCM.

Exercice d'application 7.30. Déterminer $\text{PPCM}(132,72)$.

$\hookrightarrow$ Commençons par déterminer $\text{PGCD}(132,72)$. On a

$$\begin{array}{rrcl} & 132 & = & 72 \times 1 + 60 \\ \text{puis} & 72 & = & 60 \times 1 + 12 \\ \text{puis} & 60 & = & 12 \times 5 + 0 \end{array}$$

donc $\text{PGCD}(132,72) = 12$. On en déduit

$$\text{PPCM}(132,72) = \frac{132 \times 72}{12} = 132 \times 6 = 792.$$

Corollaire 7.31.

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PPCM}(a,b) = ab$.

Démonstration.
Immédiat, puisque a et b premiers entre eux signifie que $\text{PGCD}(a,b) = 1$. □

Corollaire 7.32.

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls premiers entre eux et n un entier naturel. Si $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $ab \mid n$.

Démonstration.
Immédiat avec $\text{PGCD}(a,b) = 1$ et la Proposition 7.27. □

7.1.4. Nombres premiers

Définition 7.33.

On appelle **nombre premier** tout entier naturel non nul admettant exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même.

Exemple 7.34. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11...

Remarque 7.35. Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Proposition 7.36.

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}\backslash\{0,1\}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{« pour tout } k \in [\![2;n]\!],\ k \text{ admet un diviseur premier ».}$$

La propriété $\mathcal{P}_2$ est vraie car 2 admet un diviseur premier : lui-même.

Soit $n \in \mathbf{N}\backslash\{0,1\}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Si $n+1$ est premier, alors il a un diviseur premier : lui-même. Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe $k \in [\![2,n]\!]$ tel que $k \mid (n+1)$. Par hypothèse de récurrence, k possède un diviseur premier qui est *a fortiori* un diviseur premier de $n+1$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. □

Théorème 7.37.

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration.
Montrons ce résultat par l'absurde.
Supposons qu'il existe un nombre fini $n \geqslant 2$ de nombres premiers. Notons les $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et supposons que $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Considérons le nombre $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Alors $N \geqslant 2$.
D'après la proposition précédente, N admet un diviseur premier. Or aucun des nombres premiers p_1,... , p_n ne divise N puisque le reste de la division euclidienne de N par l'un des ces nombres vaut 1 (en effet N s'écrit $p_i.q+1$ avec $q \in \mathbf{N}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$). Contradiction ! □

◇◇

Remarque technique 7.38. Pour déterminer les nombres premiers inférieurs à une entier n fixé, on peut réaliser un **crible d'Ératosthène**. Le principe est le suivant :

- on écrit tous les nombres de 2 à n ;
- on conserve le nombre premier 2 et on rayon tous les multiples de 2 (qui ne sont donc pas premiers) ;
- pour chaque nombre suivant p non rayé, on conserve p et on raye les multiples de p ;
- lorsque l'algorithme s'arrête (on est arrivé à $\sqrt{n}$), tous les nombres non rayés sont les nombres premiers inférieurs à n.

Exercice d'application 7.39. Déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 100.

↪ On détermine les 25 nombres premiers inférieurs à 100 :

- on colorie en rose les multiples de 2 strictement supérieurs à 2 ;
- on colorie en bleu les multiples de 3 strictement supérieurs à 3 (parmi les nombres qui restent) ;
- on colorie en jaune les multiples de 5 (on ne considère pas les multiples de 4, car 4 est déjà colorié, donc tous ses multiples sont aussi coloriés) ;
- on colorie en orange les multiples de 7 ;
- on s'arrête ici, car il ne reste plus de nombre non colorié inférieur à $\sqrt{100} = 10$.

Finalement, les 25 nombres premiers inférieurs à 100 apparaissent dans les cases blanches de la grille ci-après.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Théorème 7.40 - Décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers.

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en facteurs premiers de la forme $n = q_1 q_2 \dots q_k$ où $q_1, \dots, q_k$ sont des nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.
On peut également écrire cette décomposition sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

où $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls.

Démonstration.
Admis. □

Exemple 7.41. 1848 est divisible par 8 (car 848 est un multiple de 8), et $1848 = 8 \times 231$. De plus, 231 est divisible par 3 (car $2 + 3 + 1 = 6$ qui est divisible par 3), et $231 = 3 \times 77$. Finalement, $1848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$.

Exercice d'application 7.42. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de $n = 277\ 200$.

↪ On a $n = 100 \times 2\ 772 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 396$. De plus, 2 772 est pair, d'où $n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 1\ 386$, puis comme 1 386 est pair, $n = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 693$. Or 693 est divisible par 11, d'où $n = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 63$. Finalement,

$$n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Proposition 7.43.

Soit $(a,b) \in (\mathbf{N}\backslash\{0,1\})^2$, dont on écrit $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ les décompositions en facteurs premiers (quitte à choisir $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0$ pour que les mêmes nombres premiers apparaissent dans les deux décompositions). On a :

$$\mathrm{PGCD}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PPCM}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}.$$

Démonstration.
Admis. □

◇◇

Remarque technique 7.44.

La Proposition 7.43 fournit une nouvelle méthode pour déterminer le PGCD ou le PPCM de deux entiers.

Exercice d'application 7.45. Déterminer $\mathrm{PGCD}(360, 336)$ et $\mathrm{PPCM}(360, 336)$.

↪ On a $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ et $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Donc

$$\mathrm{PGCD}(360, 336) = 2^3 \times 3 = 24 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PPCM}(360, 336) = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 5\ 040.$$

◇◇

◇◇

Remarque technique 7.46.

Soit m, n, a, b quatre nombres entiers naturels non nuls. On veut mettre au même dénominateur les deux fractions $\frac{m}{a}$ et $\frac{n}{b}$. Le dénominateur commun « optimal » n'est pas nécessairement ab : c'est $\mathrm{PPCM}(a,b)$.

« Optimal » signifie ici que lorsqu'on additionne ou qu'on soustrait les deux fractions, la fraction obtenue avec pour dénominateur ab est simplifiable et que cette simplification peut être évitée en prenant pour dénominateur commun $\mathrm{PPCM}(a,b)$. (cela n'empêche pas que la fraction obtenue peut ne pas être irréductible.)

Exercice d'application 7.47. Calculer $A = \dfrac{11}{360} - \dfrac{5}{336}$.

↪ Puisque $\mathrm{PPCM}(360, 336) = 5\ 040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, on calcule :

$$A = \frac{11}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{5}{2^4 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11 \cdot 2 \cdot 7}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{5^2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{154 - 75}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{79}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}.$$

◇◇

7.2. Ensembles finis

Dans toute la suite, n désignera un entier naturel non nul.

7.2.1. Cardinal d'un ensemble fini

Intuitivement, un **ensemble fini de cardinal** n est un ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ comportant n éléments. Plus formellement, on a :

Définition 7.48.

On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

(a) E est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul ;

(b) E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$, auquel cas on dit que son **cardinal** est n.

Le cardinal d'un ensemble fini E est noté $\text{Card}(E)$, $|E|$ ou encore $\#E$.

Exemple 7.49. Card({🕯, 😎, 🍲, ☃, 🪑}) = 5.

Exemple 7.50. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. L'application $\begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & \mathbf{U}_n \\ k & \longmapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$ est bijective, donc $\mathbf{U}_n$ est fini et $\text{Card}(\mathbf{U}_n) = n$.

Exercice d'application 7.51. Soit $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ avec $p \leqslant q$. Déterminer $\text{Card}([\![p, q]\!])$.

$\hookrightarrow$ On a $\begin{array}{ccc} [\![1, q-p+1]\!] & \longrightarrow & [\![p, q]\!] \\ i & \longmapsto & p-1+i \end{array}$ bijective, donc le cardinal de $[\![p, q]\!]$ est $q - p + 1$.

Théorème 7.52.

Soit E un ensemble fini et F une partie de E.

1. F est un ensemble fini et $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.
2. $F = E \iff \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$.

Remarque technique 7.53. Pour montrer que deux ensembles finis A et B sont égaux, on peut se contenter de montrer que $A \subset B$ et $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$, au lieu de montrer $A \subset B$ et $B \subset A$.

Proposition 7.54.

Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

1. $f(E)$ est un ensemble fini, $\text{Card}(f(E)) \leqslant \text{Card}(F)$ et $\text{Card}(f(E)) \leqslant \text{Card}(E)$.
2. L'application f est injective, si et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et dans ce cas $\text{Card}(F) \geqslant \text{Card}(E)$.
3. L'application f est surjective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ et dans ce cas $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.
4. L'application f est bijective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Démonstration.
Notons n le cardinal de E.

1. La finitude de $f(E)$ est évidente car $f(E)$ est une partie de F qui est un ensemble fini. Même chose pour la majoration par $\text{Card}(F)$. On a $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ donc puisque E possède n éléments, $f(E)$ a au plus n éléments distincts donc $\text{Card}(f(E)) \leqslant \text{Card}(E)$.
2. $\text{Card}(f(E))$=$\text{Card}(E)$ si, et seulement si, tous les éléments de E ont des images distinctes par f, autrement dit si, et seulement si, f est injective. Comme $\text{Card}(f(E))\leqslant\text{Card}(F)$ et que $\text{Card}(f(E))$=$\text{Card}(E)$ on a le résultat.
3. Si f est surjective, alors $f(E) = F$ donc $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$.
   Réciproquement, si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$, alors $f(E) = F$ car $f(E)$ est un sous-ensemble de F et donc f est surjective.

4. C'est une conséquence de 3 et 4.

□

Théorème 7.55 - Principe des tiroirs de Dirichlet.

Quand on doit ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

Démonstration.
Ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, c'est choisir une application d'un ensemble de cardinal $n+1$ dans un ensemble de cardinal n. Comme $n+1 > n$, une telle application n'est jamais injective, d'où le résultat. □

Exemple 7.56. Etant donnés trois entiers, il y a au moins deux de même parité (trois entiers à ranger dans deux tiroirs : celui des entiers pairs, et celui des entiers impairs).

Exercice d'application 7.57. Soit n un entier naturel non nul. On considère un ensemble de $n+1$ entiers choisis parmi 1, 2, 3,..., $2n$. Montrer qu'il existe deux entiers de cet ensemble dont la somme vaut $2n+1$ (exemple avec $n=5$: choisissez 6 entiers distincts entre 1 et 10 ; il y en a deux dont la somme vaut 11).

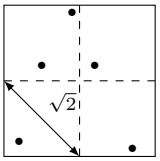
↪ Avec les entiers compris entre 1 et $2n$, on peut former n tiroirs : ce sont les paires d'entiers dont la somme vaut $2n+1$, *i.e.* les paires $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$,..., $\{n, n+1\}$. Si on range nos $n+1$ entiers dans ces tiroirs, il y a un tiroir qui en contient deux (et comme ils sont distincts...).

Exercice d'application 7.58. Montrer que, parmi les Lorrains chevelus, il en existe au moins deux avec exactement le même nombre de cheveux. On considérera qu'un individu possède au plus 300 000 cheveux, et qu'il y a environ 2 300 000 d'habitants en Lorraine.

↪ On considère 300 000 tiroirs, qui correspondent respectivement à 1 cheveux, 2 cheveux, etc. On place chaque Lorrain dans le tiroir correspondant à son nombre de cheveux sur la tête. Le principe des tiroirs assure lors qu'il y a au moins deux personnes ayant exactement le même nombre de cheveux sur la tête en Lorraine !

Exercice d'application 7.59. Etant donné cinq points dans un carré d'arête 2, montrer qu'on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.

↪ Coupons simplement notre carré en quatre carrés comme indiqué ci-contre, et prenons les quatre sous-carrés ainsi formés pour « tiroirs ». On doit ranger cinq points quelconques dans quatre tiroirs, nous sommes donc forcés d'en ranger deux dans le même tiroirs. Au pire, ces points sont alors distant de $\sqrt{2}$, qui est la longueur de la diagonale de chaque sous-carré.



7.2.2. Réunion et différence

On rappelle que deux ensembles sont dits disjoints lorsque leur intersection est vide.

Proposition 7.60.

Soit A et B deux ensembles finis disjoints. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Démonstration.
Notons $n = \text{Card}(A)$ et $m = \text{Card}(B)$. Si $A = \{x_1, ..., x_n\}$ et $B = \{y_1, ..., y_m\}$, alors $A \cup B = \{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$ et puisque $A \cap B = \varnothing$, tous les éléments sont distincts. □

Corollaire 7.61.

Soit A une partie finie d'un ensemble fini E. Le complémentaire de A dans E est une partie finie et

$$\text{Card}(\complement_E A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

Démonstration.
Les ensembles A et $\complement_E A$ sont disjoints et $A \cup \complement_E A = E$ donc

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\complement_E A).$$

□

Par récurrence on peut généraliser la proposition précédente :

Proposition 7.62.

Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de p ensembles finis deux à deux disjoints. L'ensemble $\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}(\bigcup_{k=1}^{p} A_k) = \sum_{k=1}^{p} \text{Card}(A_k).$$

Démonstration.
Ce résultat s'obtient par récurrence en utilisant la Proposition 7.60. □

Exercice d'application 7.63. Déterminer le nombre d'entiers compris entre 1 et 1000 dont la somme des chiffres vaut 3.

↪ On va représenter un entier entre 1 et 999 par un triplet (a, b, c), où a est le chiffre des centaines, b celui des dizaines et c celui des unités. On cherche donc le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers de $[\![0, 9]\!]$ tels que $a + b + c = 3$.
Notons $E = \left\{ (a, b, c) \in [\![0, 9]\!]^3 \;\middle|\; a + b + c = 3 \right\}$. Distinguons suivant la valeur prise par a : a peut valoir au maximum 3, ainsi $E = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$, où

$$A_0 = \{ (0, b, c) \mid b + c = 3 \}, \quad A_1 = \{ (1, b, c) \mid b + c = 2 \},$$
$$A_2 = \{ (2, b, c) \mid b + c = 1 \}, \quad A_3 = \{ (3, b, c) \mid b + c = 0 \},$$

et les A_i sont clairement deux à deux disjoints. On a donc

$$\text{Card}(E) = \sum_{k=0}^{3} \text{Card}(A_i) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

Il y a dix entiers compris entre 1 et 1000 dont la somme des chiffres vaut 3.

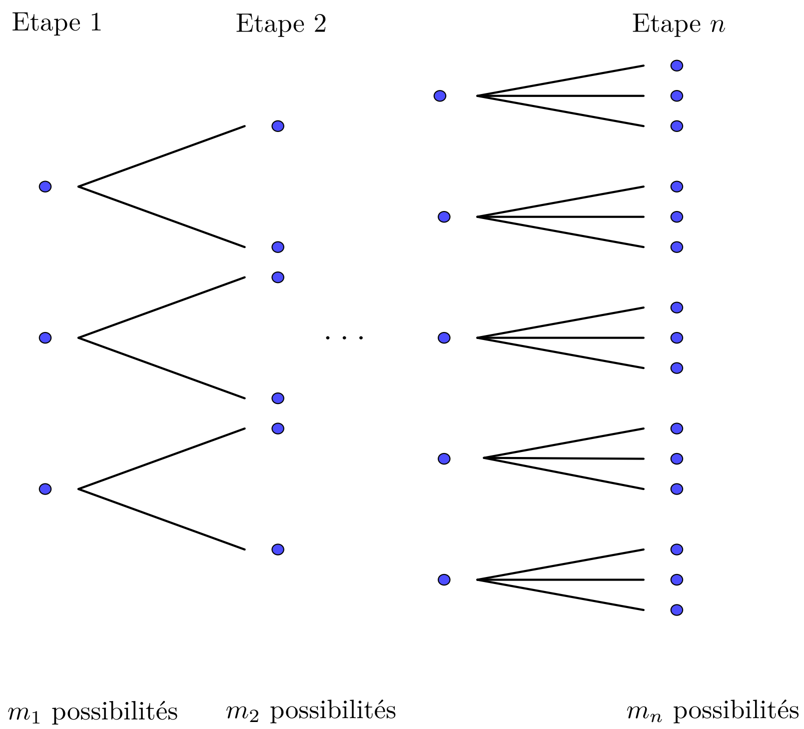
Lorsque les ensembles $A_1, ..., A_n$ de la proposition précédente sont disjoints et de même cardinal, la formule porte le joli nom de **principe du berger** (car un berger qui possède n moutons possède aussi $4n$ pattes de moutons !) :

Corollaire 7.64 - Principe du berger ou principe multiplicatif.

Toute réunion disjointe de n ensembles de même cardinal p est un ensemble de cardinal np.

Remarque technique 7.65. On utilisera ce principe quand un problème de dénombrement a été décomposé en deux sous-problèmes « étape 1 » et « étape 2 », avec n choix possibles pour l'étape 1 et p choix possibles *pour chacun de ces choix* dans l'étape 2. Le problème complet offre ainsi un total de np choix.

Bien entendu, on peut généraliser la méthode pour un nombre quelconque d'étapes.



S'il y a n étapes, et qu'à l'étape k, il y a m_k possibilités (m_k branches si on représente la situation avec un arbre), alors le nombre total d'objets est $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

Exercice d'application 7.66. Combien y a-t-il de couples (x, y) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $x \neq y$?

$\hookrightarrow$ Pour construire un tel couple, on peut par exemple choisir x, puis choisir y. Il y a n valeurs possibles pour x et, pour chacune de ces n valeurs, il reste $n - 1$ valeurs restantes pour y. Ainsi, il y a en tout $n(n - 1)$ couples possibles.

Exercice d'application 7.67. En utilisant l'alphabet français (qui contient 26 lettres ☺), combien existe-t-il de mots de 3 lettres (successions de 3 lettres : le mot n'a pas forcément de sens) ne se terminant pas par la lettre e ?

$\hookrightarrow$

1. On choisit la première lettre : 26 possibilités ;
2. on choisit la deuxième lettre : 26 possibilités ;
3. on choisit la troisième lettre : 25 possibilités.

En tout, il y a $26 \times 26 \times 25 = 16\ 900$ possibilités.

Exercice d'application 7.68. En utilisant l'alphabet français, donner le nombre de mots de trois lettres que l'on peut former en obéissant aux règles suivantes :

- la première lettre du mot est l'une des voyelles A,E,I,O,U mais pas Y ;
- la deuxième lettre du mot est l'une des 3 lettres suivant, dans l'alphabet, la voyelle précédente ;
- la dernière lettre du mot est l'une des 6 voyelles A,E,I,O,U,Y, mais pas celle qui est la première lettre.

$\hookrightarrow$

1. On choisit la première lettre : 5 possibilités ;
2. on choisit la deuxième lettre : 3 possibilités (qui dépendent de la voyelle choisie à la première étape) ;
3. on choisit la dernière lettre : 5 possibilités (qui dépendent de la voyelle choisie à la première étape).

En tout, il y a $5 \times 3 \times 5 = 75$ possibilités.

Exercice d'application 7.69. A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

↪ Pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet : il y a p possibilités. Pour les lettres suivantes, on n'a plus que $p-1$ choix possibles si on veut éviter que deux lettres consécutives soient identiques. Au total, il y a donc $p(p-1)^{n-1}$ mots.

◇◇◇

◇◇◇

Remarque technique 7.70. On peut utiliser la Proposition 7.62 lorsqu'on est dans une situation ou l'on fait **soit** quelque chose, **soit** autre chose.

Exercice d'application 7.71. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire successivement sans remise. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

↪ Il y a seulement deux types de tirages : ceux qui commencent par un numéro pair, et ceux qui commencent par un numéro impair. Nous allons dénombrer séparément ces deux ensembles de tirages et nous additionnerons à la fin les deux cardinaux obtenus.

Combien sont-ils à commencer par un numéro pair ? Faire un tel tirage, c'est tirer une boule paire (n possibilités), puis une boule impaire (n possibilités), puis de nouveau une boule paire ($n-1$ possibilités), puis une boule impaire ($n-1$ possibilités), etc. D'où un total de $n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 2^2 \times 1^2 = n!^2$ tirages.

Un raisonnement analogue montre que $n!^2$ tirages exactement commencent par un numéro impair.

Finalement, le nombre total de tirages est $n!^2 + n!^2 = 2 \times n!^2$.

◇◇◇

Exercice d'application 7.72. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Dans une salle ayant n places, de combien de manières peut-on placer n élèves ?

↪ Imaginons (artificiellement) que les élèves arrivent l'un après l'autre (ce qui revient à les numéroter). Le placement peut être décrit par les étapes suivantes :

- choix de la place pour le premier élève : n possibilités ;
- choix de la place pour le deuxième élève : $n-1$ possibilités (il n'y a plus que $n-1$ places libres) ;
- choix de la place pour le troisième élève : $n-2$ possibilités ;
- $\vdots$
- choix de la place pour l'avant-dernier élève : 2 possibilités ;
- choix de la place pour le dernier élève : 1 possibilité.

Au total, il y a donc $n!$ placements possibles.
On a utilisé le principe multiplicatif en numérotant artificiellement les élèves ; on aurait pu également raisonner sur les tables et non sur les élèves :

- choix de l'élève pour la première table : n possibilités ;
- choix de l'élève pour la deuxième table : $n-1$ possibilités ;
- $\vdots$
- choix de l'élève pour l'avant-dernière table : 2 possibilités ;
- choix de l'élève pour la dernière table : 1 possibilité.

Exercice d'application 7.73. Dans une classe de 47 places, de combien de manières peut-on placer 41 élèves ?

↪ Raisonnons sur les élèves que l'on numérote artificiellement :

- choix de la table pour le premier élève : 47 possibilités ;
- choix de la table pour le deuxième élève : 46 possibilités ;
- $\vdots$
- choix de la table pour l'avant-dernier élève : 8 possibilités ;
- choix de la table pour le dernier élève : 7 possibilités.

Il y a donc $47 \times 46 \times \cdots \times 8 \times 7 = \dfrac{47!}{6!}$ façons de placer les élèves.

Aurait-on pu ici raisonner sur les tables ?
C'est possible, mais il faut commencer par choisir les 6 tables qui resteront inoccupées : appelons x le nombre de façons de choisir 6 tables parmi 47.
Le nombre de manières de placer les 41 élèves dans la salle est décrit par les étapes :

- choix des 6 places inoccupées : x possibilités ;
- choix de l'élève pour la première table non vide : 41 possibilités ;
- choix de l'élève pour la deuxième table non vide : 40 possibilités ;
- $\vdots$
- choix de l'élève pour l'avant-dernière table non vide : 2 possibilités ;
- choix de l'élève pour la dernière table non vide : 1 possibilité.

Au total, on obtient donc $x \times 41!$ façons de placer les élèves.

Puisqu'on a dénombré de deux manières le même ensemble, on en déduit que $x = \dfrac{47!}{6!41!}$. Il y a donc $\binom{47}{6}$ façons de choisir un ensemble de 6 tables dans une salle en contenant 47.

Pour l'instant nous avons vu le cardinal de la réunion d'ensembles disjoints. La proposition suivante traite le cas général :

Proposition 7.74.

Soit A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Démonstration.

• L'ensemble $A\backslash B$ est un sous-ensemble de A donc $A\backslash B$ est un ensemble fini. Comme $A \cup B = (A\backslash B) \cup B$, et que $A\backslash B$ et B sont disjoints, d'après la proposition 2, $A \cup B$ est fini.

• On a les égalités suivantes :

$$A \cup B = (A\backslash B) \cup B \qquad \text{et} \qquad A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$$

où chacune des réunions est une réunion d'ensembles disjoints. Ainsi

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A\backslash B) + \mathrm{Card}(B) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A\backslash B) + \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Le résultat en découle aisément. □

7.2.3. Produit cartésien et listes

Proposition 7.75.

Soit A et B deux ensembles finis non vides. L'ensemble $A \times B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

Démonstration.
On note n et m les cardinaux respectifs de A et B.

On peut écrire $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{n} \{a_k\} \times B$$

qui est une réunion d'ensembles deux à deux disjoints. $\mathrm{Card}(\{a_k\} \times B) = \mathrm{Card}(B) = m$ donc $A \times B$ est la réunion disjointe de n ensembles de cardinal m d'où le résultat. □

Corollaire 7.76.

Soit $p \in \mathbf{N}^\star$ et A_1, A_2, ..., A_p p ensembles finis. Alors

$$\mathrm{Card}(A_1 \times A_2 \times \cdots A_p) = \mathrm{Card}(A_1) \times \mathrm{Card}(A_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}(A_p).$$

Démonstration.
On peut le démontrer par récurrence, en utilisant la proposition précédente. □

Corollaire 7.77.

Soit $p \in \mathbf{N}^\star$ et A un ensemble fini. L'ensemble A^p est fini et

$$\mathrm{Card}(A^p) = \big(\mathrm{Card}(A)\big)^p.$$

Démonstration.
Immédiat en choisissant tous les ensembles égaux à A dans le corollaire précédent. □

Définition 7.78.

Soie E un ensemble et $p \geqslant 1$ un entier. On appelle $p-$**liste** d'éléments de E ou $p-$**uplet** d'éléments de E un élément de E^p.

Corollaire 7.79.

Soit E un ensemble à n éléments et $p \geqslant 1$ un entier. Le nombre de $p-$listes ou $p-$uplets d'éléments de E est égal à n^p.

Démonstration.
Conséquence directe du dernier corollaire. □

Remarque 7.80. Dans une liste, l'ordre des éléments compte. Un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.

Exemple 7.81. Dans $E = \{$🕯, 😎, 🍲, ⛄, 🪑$\}$, le triplet (🍲, 🍲, 😎) est une 3-liste.

Remarque technique 7.82. Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages **successifs** (car l'ordre compte) et **avec remise** (car les répétitions sont autorisées).

Exercice d'application 7.83. De combien de façons peut-on tirer cinq cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

$\hookrightarrow$ D'après le Corollaire 7.79, la réponse est $52^5 = 380\ 204\ 032$.

Exercice d'application 7.84. Combien y a-t-il de mots de sept lettres contenant le mot « PCSI » (par exemple, « APCSIBC », « CDPCSIE ») ?

$\hookrightarrow$ Quand le mot « PCSI » apparaît dans un mot de sept lettres, il n'y apparaît qu'une seule fois. Pour construire un mot quelconque de sept lettres contenant le mot « PCSI », on peut donc procéder en deux étapes :

1. On choisit d'abord la position de la première lettre du mot « PCSI ». Il y a quatre possibilités (les positions 1, 2, 3 et 4).
2. On choisit ensuite les autres lettres, ce qui revient à choisir une 3-liste de l'alphabet : il y a 26^3 possibilités.

Finalement, il y a un total de $4 \times 26^3 = 70\ 304$ mots.

7.2.4. Arrangements

On cherche à dénombrer le nombre de $p-$listes (ou $p-$uplets) d'éléments **distincts** dans un ensemble à n éléments.

Définition 7.85.

Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul. On appelle $p-$**arrangement** de E une $p-$liste d'éléments distincts de E.

Exemple 7.86. Dans $E = \{$🕯, 😎, 🍲, ⛄, 🪑$\}$, les triplets (🕯, 😎, 🍲) et (🍲, 🕯, 😎) sont deux 3-arrangements de E différents (l'ordre compte).

Proposition 7.87.

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel inférieur ou égal à n et strictement positif. Le nombre de $p-$arrangements de E vaut

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration.
Pour créer un tel $p-$arrangement, on procède de la façon suivante :

- choix du premier élément de l'arrangement (n possibilités) ;
- choix du deuxième élément ($n-1$ possibilités) ;
- $\vdots$

- choix du p−ième élément ($n - p + 1$ possibilités).

En utilisant le principe du berger, on obtient le résultat voulu. □

Exemple 7.88. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Il existe $n!$ façons exactement d'ordonner les n éléments de $[\![1, n]\!]$.

Corollaire 7.89.

Soit E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal $n \geqslant p$.
Il y a en tout $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.

Démonstration.
Appelons $x_1, x_2, \dots, x_p$ les éléments de E. Dénombrer les injections de E dans F revient à dénombrer le nombre de p−uplets $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p))$ d'éléments distincts (*i.e.* le nombre de p−arrangements) de F. □

◇◇

Remarque technique 7.90. Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages **successifs et sans remise**.

Exercice d'application 7.91. De combien de façon peut-on tirer cinq cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

↪ La Proposition 7.87 donne directement la réponse : $\dfrac{52!}{(52-5)!} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311\ 875\ 200.$

Exercice d'application 7.92. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. De combien de façons peut-on asseoir n personnes

(a) sur un banc rectiligne ?

(b) autour d'une table ronde ?

↪

(a) On peut considérer que les personnes à asseoir sont numérotées de 1 à n. Les asseoir sur un banc rectiligne revient à la énumérer toutes dans un ordre quelconques, *i.e.* à se donner un arrangement quelconque de $[\![1, n]\!]$, d'où un total de $n!$ configurations possibles (cf. Exemple 7.88).

(b) La différence entre un banc rectiligne et une table ronde, c'est qu'il n'y a pas de premier place autour d'une table ronde : par exemple, on ne change pas la configuration des places assises quand on demande à chaque convive de se déplacer d'une place sur sa droite. pour asseoir n personnes autour d'une table rond, on peut procéder en deux étapes :

1. on choisit arbitrairement la place de la personne numérotée 1 (on peut considérer qu'il n'y a qu'un seul choix, car la position de cette personne ne changera pas la configuration finale) ;
2. on lui donne des voisins de proche en proche par la droite, ce qui revient à se donner un $(n-1)$-arrangement quelconque de $[\![2, n]\!]$ (il y a donc $(n-1)!$ possibilités).

Au total, il y a $(n-1)!$ configurations possibles.

◇◇

7.2.5. Combinaisons

On rappelle que pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $\dbinom{n}{p}$ vaut 0 si $p > n$ et $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$.

Définition 7.93.

Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose $n = \mathrm{Card}(E)$.
On appelle p−**combinaison** de E toute partie de E de cardinal p.

Exemple 7.94. Dans $E = \{$🕯, 😎, 🎂, ☃, 🪑$\}$, les ensembles $\{$🕯, 😎, 🎂$\}$, $\{$🎂, 🕯, 😎$\}$ et $\{$🎂, 🎂, 🕯, 😎$\}$ désignent les mêmes 3−combinaisons (l'ordre ne compte pas).

Théorème 7.95.

Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose $n = \mathrm{Card}(E)$.
Il existe $\binom{n}{p}$ $p-$combinaisons de E.

Démonstration.
Pour $p \leqslant n$, notons C_n^p le nombre de $p-$combinaisons de E. Nous voulons montrer que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, *i.e.* que $\frac{n!}{(n-p)!} = C_n^p \times p!$. A gauche de cette égalité, nous reconnaissons le nombre de $p-$arrangements de E. Il nous suffit dès lors de compter d'une autre manière les $p-$arrangements de E :

1. on commence par choisir une $p-$combinaisons X quelconque de E, *i.e.* une partie de E de cardinal p. Il y a C_n^p possibilités ;
2. on choisit ensuite une façon d'ordonner les p éléments de X. Il y a $p!$ possibilités.

Au total, il y a donc $C_n^p \times p!$ $p-$arrangements de E. □

Dans une combinaison, qui est un ensemble et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre. Ainsi :

Remarque technique 7.96. Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages **simultanés**.

Exercice d'application 7.97. De combien de façons peut-on tirer cinq cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

↪ La réponse est $\binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$.

Exercice d'application 7.98. On appelle **anagramme** d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres mais dans un ordre quelconque. Par exemple, une anagramme de « GALILEE » est « EGAILLE ». Une autre anagramme est aussi « AEEIGLL ».

Combien d'anagrammes du mot « BOROROS » (peuple amérindien du Brésil) existe-t-il ?

↪ Pour construire une anagramme de « BOROROS », on peut choisir d'abord la position des « O » (il y a $\binom{7}{3} = 35$ possibilités), puis celles des « R » (il y a $\binom{7-3}{2} = 6$ possibilités), puis celle du « B » ($\binom{2}{1} = 2$ possibilités) et enfin celle du « S » ($\binom{1}{1} = 1$ possibilité ; il ne reste plus qu'une place). D'où un total de $35 \times 6 \times 2 = 420$ anagrammes possibles.

Exercice d'application 7.99. Un jeu de tarot contient 78 cartes : 21 atouts, la carte que l'on appelle l'« excuse » et 14 cartes de chacune des 4 couleurs cœur, pique, trèfle et carreau. Combien de tirages simultanés de six cartes contiennent :

(a) 2 atouts et 4 trèfles ?

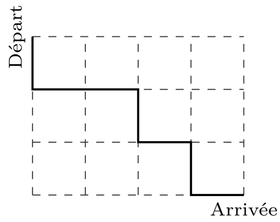
(b) exactement un atout et au moins 3 as ?

↪

(a) On choisit 2 atouts ($\binom{21}{2}$ possibilités) puis 4 trèfles ($\binom{14}{4}$ possibilités), d'où un total de $\binom{21}{2} \times \binom{14}{4} = 210\ 210$ tirages possibles.

(b) On peut construire $\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{78-21-4}{2} = 115\ 752$ tirages contenant exactement un atout et exactement trois as. De plus, on peut construire $\binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{78-21-4}{1} = 1\ 113$ tirages contenant exactement un atout et les 4 as. Les deux alternatives étant disjointes, on obtient un total de $115\ 752 + 1\ 113 = 116\ 865$ tirages possibles.

Exercice d'application 7.100. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^{\star})^2$. Une fourmi se déplace sur une grille contenant n lignes et p colonnes (une représentation pour $n = 3$ et $p = 4$ est donnée ci-contre). Le départ est au coin supérieur gauche, et l'arrivée au coin inférieur droit. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?



$\hookrightarrow$ Un chemin de longueur minimale est ici entièrement déterminé par la donnée de n déplacements élémentaires vers le bas et p vers la droite. Tout chemin peut donc être identifié à un mot quelconque de $n + p$ lettres, donc n « B » (bas) et p « D » (droite). Le problème revient donc à déterminer le nombre de tels mots.

Il existe autant de tels mots que de façons de placer les « B », *i.e.* $\binom{n+p}{p}$.

Exercice d'application 7.101. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^{\star})^2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, dont chacune peut accueillir autant de boules qu'on le souhaite. De combien de manières peut-on y ranger p boules indiscernables ? Une représentation du problème pour $n = 4$ et $p = 10$ est donnée ci-après.

$\hookrightarrow$ Les rangements étudiés peuvent être vus sans ambiguïté comme des mots. On traduira par l'exemple la représentation ci-avant par le mot « $\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ\circ\circ||\circ$ », dans lequel le symbole « $\circ$ » désigne une boule et le symbole « $|$ » la séparation de deux urnes successives. Les mots ainsi formés contiennent tous exactement p symboles « $\circ$ » et $n - 1$ symboles « $|$ » (attention : il y a n urnes, mais seulement $n - 1$ séparations entre elles). On s'est ainsi ramené à un simple problème de dénombrement d'anagrammes. Inversement, il est possible d'associer à tout anagramme de cette forme un unique rangement de boules.

En conclusion, le problème posé autorise exactement $\binom{n+p-1}{p}$ rangements ou anagrammes.

◇◇

7.2.6. Bilan pratique pour les exercices de dénombrement

En pratique, un problème de dénombrement peut être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener :

Propriétés de l'objet à dénombrer		Modélisé par	Exemple fondamental	Écriture
Ordre	Éléments tous distincts			
Non	Oui	Parties d'un ensemble E : on utilise des combinaisons	Tirages simultanés	$\{...;... ;... \}$
Oui	Non	$p-$uplets d'éléments d'un même ensemble E : on utilise des listes	Tirages successifs avec remise	$(...;... ;...)$
Oui	Oui	$p-$uplets d'éléments d'un même ensemble E, sans répétition : on utilise des arrangements	Tirages successifs sans remise	$(...;... ;...)$
Non	Non	On modifie la modélisation pour se ramener à l'un des trois cas précédents		

Exercice d'application 7.102. Combien y a-t-il de codes de 3 symboles commençant par 2 chiffres et se terminant par une lettre ?

↪ Un tel code est construit par étapes :

- choix d'un premier chiffre : 10 possibilités (c'est le nombre de chiffres entre 0 et 9) ;
- choix d'un deuxième chiffre : 10 possibilités ;
- choix d'une lettre : 26 possibilités.

Il y a donc $10 \times 10 \times 26$ codes possibles.

Exercice d'application 7.103. Combien y a-t-il de codes de trois chiffres deux à deux distincts ?

↪ Un tel code est construit par étapes :

- choix d'un premier chiffre : 10 possibilités ;
- choix d'un deuxième chiffre : 9 possibilités (car distinct du premier) ;
- choix d'un troisième chiffre : 8 possibilités (car distinct des deux premiers).

Il y a donc $10 \times 9 \times 8$ codes possibles.

Exercice d'application 7.104. Combien y a-t-il de codes de trois chiffres comportant au moins deux chiffres pairs ?

↪ Ces codes sont de deux types : ceux contenant exactement deux chiffres pairs (type 1), et ceux contenant exactement trois chiffres pairs (type 2).
Les codes du type 1 sont décrits par étapes :

- choix de la place du chiffre impair : 3 possibilités ;
- choix du chiffre impair : 5 possibilités ;
- choix du premier chiffre pair : 5 possibilités ;
- choix du deuxième chiffre pair : 5 possibilités.

Il y a donc 3×5^3 codes du type 1.

Les codes du type 2 sont eux aussi décrits par étape, chacune consistant à choisir un chiffre pair et comportant 5 possibilités ; il y a donc 5^3 codes du type 2.

Finalement, puisqu'il ne peut y avoir des codes de type 1 et 2 à la fois, il y a $3 \times 5^3 + 5^3$ codes de trois chiffres comportant au moins deux chiffres pairs.

Remarque technique 7.105. Il est parfois plus simple de dénombrer le complémentaire d'un ensemble plutôt que l'ensemble lui-même : on utilise alors la formule $\text{Card}(E \backslash A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$ valable si $A \subset E$.

Exercice d'application 7.106. Dénombrer les codes de trois chiffres comportant au moins un chiffre pair.

$\hookrightarrow$ Le complémentaire est formé par les codes ne comportant aucun chiffre pair, c'est-à-dire les codes de trois chiffres impairs. Un tel code est construit par étapes :

- choix d'un premier chiffre impair : 5 possibilités ;
- choix d'un deuxième chiffre impair : 5 possibilités ;
- choix d'un troisième chiffre impair : 5 possibilités.

Il y a donc 5^3 codes ne comportant aucun chiffre pair. De même, on dénombre 10^3 codes de trois chiffres. Ainsi, il y a $10^3 - 5^3$ codes de trois chiffres comportant au moins un chiffre pair.

7.2.7. Démonstrations combinatoires de quelques formules déjà établies

Proposition 7.107 - Formule du capitaine.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, soit $p \in [\![1, n]\!]$.

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration.
Pour établir cette formule, nous allons résoudre de deux manières le problème suivant : « de combien de manières peut-on former, à partir de n personnes, une équipe de p d'entre elles dont un capitaine ? ». On notera A la réponse.

- Méthode 1 : on commence par choisir les p membres de l'équipe ($\binom{n}{p}$ possibilités) puis on désigne le capitaine (p possibilités). On a donc $A = p \times \binom{n}{p}$.
- Méthode 2 : on choisit d'abord le capitaine (n possibilités) puis on complète son équipe en choisissant les $p-1$ autres membres de l'équipe ($\binom{n-1}{p-1}$ possibilités). Ainsi $A = n \times \binom{n}{p}$.

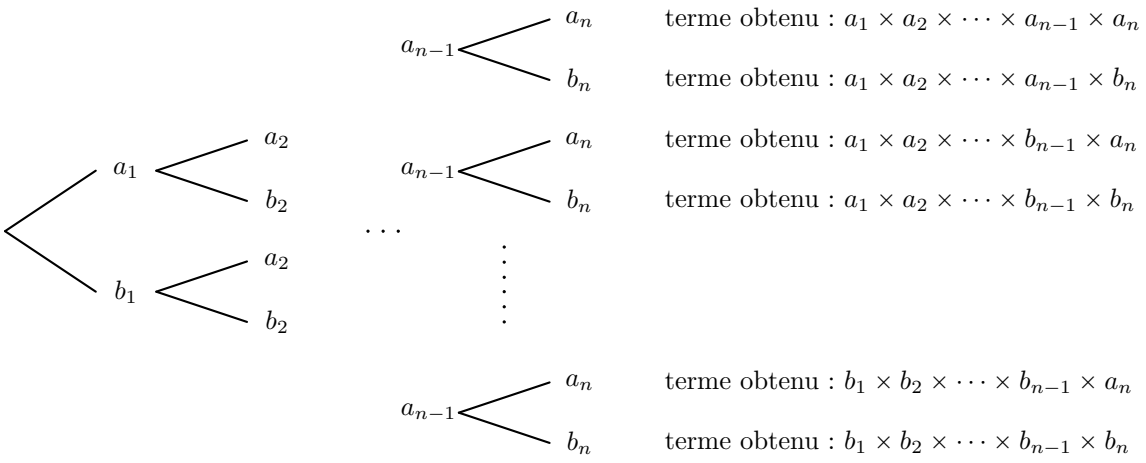
Finalement, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$. $\square$

Proposition 7.108 - Formule du binôme de Newton.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(a, b) \in \mathbf{C}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration.
Soit $a, b \in \mathbf{C}$, soit $n \in \mathbf{N}^\star$ (la formule est clairement vraie pour $n = 0$). Posons pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = a$ et $b_i = b$.
Alors $(a+b)^n = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\dots(a_n + b_n)$ et développer ce produit, c'est faire la somme de tous les termes obtenus en faisant les produits des éléments de chaque branche de l'arbre suivant :



Puisque tous les b_i sont égaux à b et tous les a_i sont égaux à a, les termes sont tous des produits de n facteurs égaux à a ou b, ils sont donc du type $a^k b^{n-k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de termes du type $a^k b^{n-k}$? autant que de façons de choisir les k indices des facteurs a_i apparaissant dans ces produits (les indices des b_i sont alors les indices restants) : il y en a donc $\binom{n}{k}$ (il s'agit de choisir k indices parmi les n possibles).
Finalement, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. □

Proposition 7.109 - Formule de Pascal.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

Démonstration.
L'idée de la preuve consiste à remarquer qu'il y a deux types (distincts) de $p-$combinaisons de $[\![1, n+1]\!]$: celles qui contiennent $n+1$ et celles qui ne contiennent pas $n+1$.

Plus formellement, notons :

- A l'ensemble des parties de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal p (les $p-$combinaisons de $[\![1, n+1]\!]$) ;
- B l'ensemble des parties de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal p contenant $n+1$ (les $p-$combinaisons de $[\![1, n+1]\!]$ qui contiennent $n+1$) ;
- C l'ensemble des parties de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal p ne contenant pas $n+1$ (les $p-$combinaisons de $[\![1, n+1]\!]$ qui ne contiennent pas $n+1$).

On a immédiatement $\text{Card}(A) = \binom{n+1}{p}$ (nombre $p-$arrangements d'un ensemble contenant $n+1$ éléments). De plus, les éléments de C sont les parties de $[\![1, n]\!]$ de cardinal p, d'où $\text{Card}(C) = \binom{n}{p}$ (nombre de $p-$arrangements d'un ensemble contenant n éléments).

Les éléments de B sont les parties de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal p contenant $n+1$. Il y en a autant que de façons de choisir les $p-1$ autres éléments de la partie. Ainsi $\text{Card}(B) = \binom{n}{p-1}$ (nombre de $(p-1)-$arrangements d'un ensemble contenant n éléments).

Puisque $B \cap C = \varnothing$, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C)$, et on reconnaît la formule de Pascal. □

7.2.8. Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Lemme 7.110.

Soit E un ensemble fini. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$ est une bijection.

Démonstration.
- *Injectivité.* Soit A et B deux parties de E. Supposons que $\varphi(A) = \varphi(B)$ c'est-à-dire $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$. Alors pour tout $x \in E$, si $x \in A$ alors $\mathbf{1}_A(x) = 1$ donc $\mathbf{1}_B(x) = 1$ donc $x \in B$ et de même si $x \in B$, alors $x \in A$. Donc $A = B$.
- *Surjectivité.* Soit $f \in \mathcal{F}(E,\{0,1\})$. Posons $A = f^{-1}(\{1\})$ Alors pour tout $x \in E$, si $x \in A$ alors $\mathbf{1}_A(x) = 1 = f(x)$ et si $x \notin A$, $\mathbf{1}_A(x) = 0 = f(x)$ donc $f = \mathbf{1}_A$ donc $f = \varphi(A)$. □

Théorème 7.111 - Nombre de parties d'un ensemble.

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser le lemme : puisque φ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ et puisque $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ est un ensemble fini de cardinal 2^n, on peut affirmer que $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n. □

Théorème 7.112.

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal et f une application de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'application f est injective ;

(ii) l'application f est surjective ;

(iii) l'application f est bijective.

Démonstration.
Si f est injective, alors $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$ donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)$ et donc f est aussi surjective donc bijective.

Si f est surjective, alors $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)$ donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$ et donc f est aussi injective donc bijective.

□

Remarque 7.113. On peut montrer que si E et F sont deux ensembles tels que F soit un ensemble fini, et s'il existe une injection de E vers F, alors E est fini et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$. En particulier, si un ensemble fini A est en bijection avec un autre ensemble B, alors B est fini et de même cardinal que A.

Proposition 7.114 - Nombre d'applications.

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors le nombre d'applications de E dans F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

Démonstration.
Notons $p = \text{Card}\,(E)$ et $n = \text{Card}(F)$. On veut montrer que $\text{Card}(\mathcal{F}(E,F)) = n^p$.

On note $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. On dénombre les applications de E dans F :

- étape 1 : on choisit l'image de a_1 (il y a n possibilités) ;
- étape 2 : on choisit l'image de a_2 (il y a n possibilités) ;
- $\vdots$
- étape p : on choisit l'image de a_p (il y a n possibilités).

Finalement, pour définir une application de E dans F, on a fait p étapes avec pour chacune n possibilités, donc il y a en tout $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$ applications de E dans F. □

Proposition 7.115 - Nombre d'applications injectives.

Soit E et F deux ensembles finis, dont on note n et p les cardinaux respectifs. On suppose $p \leqslant n$. L'ensemble des applications injectives de E dans F est de cardinal $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration.
Notons $E = \{a_1, ..., a_p\}$. On dénombre les applications injectives de E dans F :

- étape 1 : on choisit l'image de a_1 (il y a n possibilités) ;
- étape 2 : on choisit l'image de a_2 parmi les images non encore sélectionnées (il y a $n-1$ possibilités) ;
- étape 3 : on choisit l'image de a_3 parmi les images non encore sélectionnées (il y a $n-2$ possibilités) ;
- $\vdots$
- étape p : on choisit l'image de a_p parmi les images non encore sélectionnées (il y a $n-p+1$ possibilités).

Finalement, il y a $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ façons de construire une application injective. □

Remarque 7.116. Dans la proposition précédente, si $n > p$, il n'y a pas d'application injective de E dans F.

Définition 7.117.

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E.

Exemple 7.118. Soit $E = \{🧍, 😎, 🙈, 🐻, 🦊\}$. L'application $\sigma : E \longrightarrow E$ définie par $\sigma(🧍) = 🙈$, $\sigma(😎) = 🧍$, $\sigma(🙈) = 😎$, $\sigma(🐻) = 🐻$ et $\sigma(🦊) = 🦊$ est une permutation de E.

Proposition 7.119 - Nombre de bijections.

Si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n > 0$, alors le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Démonstration.
Notons n le cardinal commun de E et F. On note $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. On dénombre les bijections de E dans E :

- étape 1 : on choisit l'image de a_1 (il y a n possibilités) ;
- étape 2 : on choisit l'image de a_2 (il y a $n-1$ possibilités, car l'application doit être injective) ;
- $\vdots$
- étape n : on choisit l'image de a_n (il y a $n-n+1=1$ possibilités).

Finalement, il y a $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-n+1)=n!$ façons de construire une application bijective. □

Exercice d'application 7.120. On considère le digicode d'une porte d'entrée contenant les touches A, B, C et D. Sachant que le code de la porte est constitué des quatre lettres qui doivent être tapées exactement une fois, combien y-a-t-il de combinaisons possibles ?

↪ Le nombre de combinaisons correspond au nombre de permutation d'un ensemble à quatre éléments, à savoir $4!=24$ possibilités.

Exercice d'application 7.121. Soit $n\geqslant 3$. Combien y a-t-il de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3 ?

↪ Pour construire une telle permutation, on peut choisir l'image de 3 ($n-2$ possibilités), puis celle de 4 ($n-3$ possibilités), ... et enfin celle de n (1 possibilité). Ainsi, il y a $(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times 1=(n-2)!$ permutations qui répondent à la question.

7.2.9. Cardinaux infinis (hors-programme)

Compter les éléments d'un ensemble fini non vide (de cardinal n) consiste à établir une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans cet ensemble, ce qui revient à numéroter de 1 à n les éléments de cet ensemble. C'est avec cette idée qu'on peut prolonger la notion de cardinal aux ensembles infinis (bijection avec $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$) :

Définition 7.122.

Soit E un ensemble.
On dit que E est infini **dénombrable** si il existe une bijection entre $\mathbf{N}$ et E.
On dit que E est **indénombrable** si il n'est ni fini ni dénombrable.

Intuitivement, un ensemble dénombrable est donc un ensemble dont on peut numéroter les éléments.

Remarque 7.123. Pour montrer qu'un ensemble E est dénombrable, on peut montrer qu'il est en bijection avec un autre ensemble F dénombrable.

En effet, si F est dénombrable, il existe une bijection $f:F\to\mathbf{N}$. S'il existe une bijection $g:E\to F$, alors $f\circ g:E\to\mathbf{N}$ est une bijection.

Le résultat suivant est fondamental dans la théorie des cardinaux infinis, mais difficile à démontrer.

Théorème 7.124 - Théorème de Cantor-Bernstein.

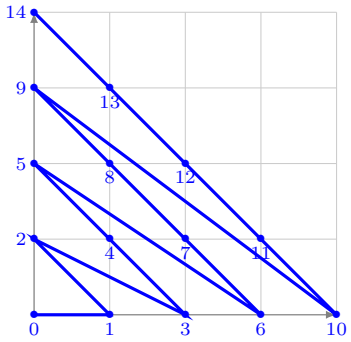
Soient E et F des ensembles. S'il existe une injection $E\to F$ et une injection $F\to E$, alors il existe une bijection entre E et F.

Proposition 7.125.

$\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables. Pour tout $k\geqslant 2$, $\mathbf{N}^k,\mathbf{Z}^k,\mathbf{Q}^k$ sont dénombrables.

Démonstration (idées de preuve). 1. Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (a,b) = (0,0) \\ \left(\sum_{k=0}^{a+b} k\right) + b & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

On peut montrer que ψ est une bijection.



2. Pour tout $k \geqslant 3$, on pose $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^k & \longrightarrow & \mathbf{N}^{k-1} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (\psi(x_1, x_2), x_3, \ldots, x_n) \end{array}$. f_k est bijective car ψ l'est :

   (a) soient $(a, x_3, x_4, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}^{k-1}$. ψ est surjective donc il existe $(x_1, x_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que $\psi(x_1, x_2) = a$. Donc $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a, x_3, \ldots, x_n)$.
   Tout élément de $\mathbf{N}^{k-1}$ a un antécédent par f_k donc f_k est surjective.

   (b) soient $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbf{N}^k$ tels que $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(y_1, \ldots, y_n)$. On a alors $\psi(x_1, x_2) = \psi(y_1, y_2)$ et pour tout $k \geqslant 3$, $x_k = y_k$.
   Comme ψ est injective, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.
   Donc f_k est injective.

   Donc, par récurrence, tous les $\mathbf{N}^k$ sont en bijection avec $\mathbf{N}^2$, donc sont dénombrables.

3. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ n & \longmapsto & (-1)^n \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor \end{array}$.

   $\forall y \in \mathbf{Z}$, si $y < 0$, alors $\varphi(-2y-1) = (-1)^{-2y-1} \left\lfloor \dfrac{(-2y-1)+1}{2} \right\rfloor = -\lfloor -y \rfloor = y$.

   Si $y > 0$, alors $\varphi(2y) = (-1)^{2y} \left\lfloor \dfrac{2y+1}{2} \right\rfloor = y$. Dans tous les cas, $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, donc φ est surjective.

   $\varphi(0) = 0$. $n \mapsto \varphi(2n)$ est strictement croissante (et donc positive), donc injective. $n \mapsto \varphi(2n+1)$ est strictement décroissante (donc négative), donc injective.
   Donc φ est injective. $\mathbf{Z}$ est bien en bijection avec $\mathbf{N}$.

4. Pour tout $k \geqslant 2$, $\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^k & \longrightarrow & \mathbf{N}^k \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \end{array}$ est bijective. Donc $\mathbf{Z}^k$ est dénombrable.

5. Montrer que $\mathbf{Q}$ est dénombrable est un peu plus technique. On peut facilement construire une injection φ_1 de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}^2$. A tout élément $x \in \mathbf{Q}$, on associe $\varphi_1(x) = (a, b)$ tel que a et b soient premiers entre eux et $x = a/b$.
   Il est encore plus simple de construire une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}$: il suffit de prendre $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$. On conclut par le théorème de Cantor-Bernstein.

6. Pour tout $k \geqslant 2$, $\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^k & \longrightarrow & \mathbf{N}^k \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (\varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_2(x_n)) \end{array}$ est bijective. Donc $\mathbf{Q}^k$ est dénombrable.

□

Proposition 7.126.

$\mathbf{R}$ est indénombrable.

Démonstration.
Cette preuve s'appelle l'**argument diagonal de Cantor**.

Supposons que $\mathbf{R}$ soit dénombrable. Cela signifie que l'on peut numéroter tous les réels : $x_0, x_1, x_2, \dots$. Autrement dit, $\mathbf{R} = \{x_k \mid k \in \mathbf{N}\}$.

On note a_i la partie entière de x_i et $b_1^i, b_2^i, b_3^i, \dots$ les chiffres successifs apparaissant après la virgule dans l'écriture décimale de a_i.

Soit alors le nombre réel y défini de la manière suivante : sa partie entière est $a_0 + 1$, puis le i-ème chiffre après la virgule de son écriture décimale est 1 si $b_i^i = 0$ et 0 si $b_i^i \geqslant 1$.

Ainsi, y est différent de x_0, car sa partie entière n'est pas celle de x_0. Il est aussi différent de x_i pour tout $i > 1$, car au moins une des décimales de leur écriture décimale est différente (et y ne se termine pas par une succession infinie de 9). Donc $y \notin \mathbf{R}$, ce qui est absurde. □

Illustration de l'argument diagonal sur un exemple :

$$\begin{array}{lcccccc}
a_0 = & \boxed{11}, & 7 & 6 & 4 & 0 & \cdots \\
a_1 = & 2, & \boxed{2} & 4 & 4 & 9 & \cdots \\
a_2 = & 1, & 6 & \boxed{0} & 3 & 1 & \cdots \\
a_3 = & 0, & 5 & 3 & \boxed{8} & 7 & \cdots \\
a_4 = & 12, & 8 & 1 & 0 & \boxed{6} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y = & 15, & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

Théorème 7.127 - Théorème de Cantor.

Pour tout ensemble E, E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas en bijection.

Démonstration.
Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On pose

$$D = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = D$.

Si $x \in D$, alors $x \notin f(x) = D$. Donc $x \notin D$. Absurde.

Si $x \notin D$, alors $x \in f(x) = D$. Donc $x \in D$. Absurde.

Donc D n'a pas d'antécédent par f. Il n'existe donc aucune surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. □

Conséquence : il n'existe pas de « plus grand cardinal », vu que tout ensemble est « plus petit » que l'ensemble de ses parties.

Terminons cette partie culturelle avec un énoncé dit indécidable : il a été prouvé qu'il est cohérent avec le reste des mathématiques, mais aussi que sa négation le serait tout autant. Il est donc impossible de prouver qu'il est vrai ou qu'il est faux.

Hypothèse 7.128 - Hypothèse du continu.

Tout sous-ensemble de $\mathbf{R}$ est fini, dénombrable, ou en bijection avec $\mathbf{R}$.

Chapitre 8

Les nombres réels

Pour moi, la mathématique, c'est la conquête du continu par le discret.

René Thom [1]

Il se peut qu'il n'y ait aucune utilité à savoir que π est irrationnel, mais si nous pouvons le savoir, il serait certainement intolérable de ne pas le savoir.

Edward Charles Titchmarsh [2]

8.1. Autres ensembles de nombres

Définition 8.1.

- On appelle **ensemble des entiers naturels** l'ensemble $\mathbf{N} = \{0; 1; 2...\}$.
- On appelle **ensemble des entiers relatifs** l'ensemble $\mathbf{Z}$ constitué des nombres naturels et de leurs opposés. Autrement dit,
$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{-n \ : \ n \in \mathbf{N}\}.$$
- On appelle **ensemble des nombres décimaux** l'ensemble
$$\mathbf{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} \ : \ (p, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}.$$
- On appelle **ensemble des nombres rationnels** l'ensemble $\mathbf{Q}$ des quotients d'entiers relatifs. Autrement dit,
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^\star \right\}.$$

1. René THOM - mathématicien français (1923-2002)
2. Edward Charles TITCHMARSH, mathématicien britannique (1899-1963)

⚠ **Attention** ⚠. L'écriture décimale n'est pas unique. Par exemple, posons $x = 0,999\ldots$. Alors $10x - 9 = x$, puis $x = 1$.

Notons qu'on peut voir $0,999\ldots$ comme la limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1 - 10^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Proposition 8.2.

On a les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q}.$$

Démonstration.
Les inclusions sont claires d'après la définition.
On a $-1 \in \mathbf{Z}$ et $-1 \notin \mathbf{N}$, donc l'inclusion $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ est stricte.
On a $1,2 \in \mathbf{D}$ et $1,2 \notin \mathbf{Z}$, donc l'inclusion $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$ est stricte.
On a $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$. Supposons de plus que $\frac{1}{3} \in \mathbf{D}$. Alors il existe $(p, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{p}{10^n}$. Il s'ensuit $3p = 10^n$, ce qui entraîne que 10^n est divisible par 3, ce qui est absurde. Ainsi $\frac{1}{3} \notin \mathbf{D}$ et l'inclusion $\mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$ est stricte. □

8.2. Les nombres réels

Depuis l'antiquité, on sait qu'il existe des longueurs constructibles simplement à l'aide de longueurs entières et pourtant non rationnelles. C'est le cas de $\sqrt{2}$ qui est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont chacun des côtés de l'angle droit mesure 1 unité de longueur.

Cette insuffisance de $\mathbf{Q}$ en entraîne d'autres.

- On montrera plus tard que les deux suites u et v de nombres rationnels définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ ont une limite qui est $\sqrt{2}$. Leur limite n'est donc pas un nombre rationnel.
- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2 \end{array}$ prend des valeurs positives et négatives, et pourtant, elle ne s'annule pas. Autrement dit, le théorème des valeurs intermédiaires n'existe pas avec les fonctions de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$!

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbf{R}$, contenant $\mathbf{Q}$, permettant par exemple de repérer par leur abscisse tous les points d'une droite munie d'un repère $(O, \vec{\imath})$ (appelée droite réelle).

8.2.1. Borne supérieure, borne inférieure

Dans toute la suite, on notera, pour toute partie A de $\mathbf{R}$, $\max(A)$ (resp. $\min(A)$) le maximum (resp. minimum de A (s'il existe). Il est interdit d'utiliser cette notation si le maximum (resp. minimum) n'existe pas. Il faut donc démontrer que A admet un maximum (resp. minimum) avant d'écrire $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Définition 8.3.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide.

- On appelle **borne supérieure** de A, et on note $\sup(A)$, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A, s'il existe.
- On appelle **borne inférieure** de A, et on note $\inf(A)$, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A, s'il existe.

Démonstration.
Unicité de la borne supérieure. La borne supérieure étant définie comme le minimum de l'ensemble des majorants, l'unicité de la borne supérieure provient de l'unicité du minium.
Unicité de la borne inférieure. Même idée. □

Exemple 8.4. Un ensemble non majoré (resp. non minoré) n'a pas de borne inférieure (resp. supérieure) puisque l'ensemble des majorants (resp. minorants) est vide.

L'écriture $\sup(A)$ (on pourrait dire de même de $\inf(A)$, $\min(A)$, $\max(A)$) n'est autorisée que si la borne supérieure existe. Il faut donc s'en assurer préalablement.

Théorème 8.5 - Théorèmes de la borne supérieure et de la borne inférieure.

$\mathbf{R}$ a la propriété de la borne supérieure, *i.e.* :

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure.

Démonstration. 1. Admis (la preuve dépend de comment on construit $\mathbf{R}$, et la construction de $\mathbf{R}$ n'est pas au programme...).

2. On applique le point 1. à $B = \{-x : x \in A\}$, et on vérifie que $-\sup(B) = \inf(A)$. □

Proposition 8.6.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide.

$$\alpha = \max(A) \iff \begin{cases} \alpha = \sup(A) \\ \alpha \in A \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha = \min(A) \iff \begin{cases} \alpha = \inf(A) \\ \alpha \in A \end{cases}$$

Démonstration.
On ne démontre que la première équivalence.
Supposons que $\alpha = \max(A)$. Alors $\alpha \in A$ par définition du plus grand élément. En particulier, comme $\sup(A)$ est un majorant de A, $\sup(A) \geqslant \alpha$. Or α est un majorant de A, donc $\sup(A) \leqslant \alpha$. Donc $\sup(A) = \alpha$.
Réciproquement, supposons $\alpha = \sup(A)$ et $\alpha \in A$. On a immédiatement $\sup(A) = \max(A)$ en tant que majorant élément de A et par unicité du maximum. □

Théorème 8.7 - Caractérisation de la borne supérieure.

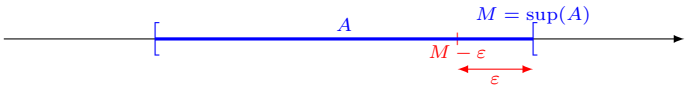
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Soit $M \in \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M = \sup(A)$.

(ii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } M' \text{ majorant de } A,\ M \leqslant M' \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } b < M,\ b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \end{cases}$



Démonstration.
Chaque assertion est une traduction de la définition. □

Exercice d'application 8.8. Déterminer, s'ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de $A = [0\,;\,1[$.

$\hookrightarrow$ $0 \in A$ et pour tout $x \in A$, $x \geqslant 0$. Donc $\min(A) = 0$ et $\inf(A) = 0$.
Démontrons que 1 est la borne supérieure de A. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $x = \max\{\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$. Alors $x \in A$ et $x > 1 - \varepsilon$, donc, d'après l'assertion (iv) du Théorème 8.7, $\sup(A) = 1$. Puisque $1 \notin A$, on obtient également que A n'a pas de plus grand élément.

Théorème 8.9 - Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Soit $M \in \mathbf{R}$.
M est la borne supérieure de A si et seulement si, M est un majorant de A et il existe une suite u d'éléments de A qui converge vers M.

Démonstration.
On démontrera ce résultat dans un chapitre ultérieur. □

Exercice d'application 8.10. Reprendre l'exercice précédent et démontrer que $\sup([0\,;\,1[) = 1$ à l'aide de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

$\hookrightarrow$ 1 majore clairement $[0\,;\,1[$ et $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}^*} \in [0\,;\,1[^{\mathbf{N}}$ avec $1 - \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\sup([0\,;\,1[) = 1$.

Théorème 8.11 - Caractérisation de la borne inférieure.

Soit B une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$. Soit $m \in \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $m = \inf(B)$.

(ii) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout } m' \text{ minorant de } B,\ m' \leqslant m \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout } b > m,\ b \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in B,\ x < m + \varepsilon \end{cases}$

Exercice d'application 8.12. Déterminer, si ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de $B = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}^\star \right\}$.

$\hookrightarrow$ $1 \in B$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\frac{1}{n} \leqslant 1$. Donc $\max(B) = 1$ et $\sup(B) = 1$.
Soit $b > 0$. Alors, pour un entier n supérieur strictement à $\frac{1}{b}$, on a $\frac{1}{n} < b$, ce qui montre que b n'est pas un minorant de B. Ainsi, l'assertion (iii) du Théorème 8.11 assure que $0 = \inf(B)$. De plus, $0 \notin B$, donc B n'a pas de plus petit élément.

Théorème 8.13 - Caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$. Soit $M \in \mathbf{R}$.
M est la borne supérieure de A si et seulement si, M est un majorant de A et il existe une suite u d'éléments de A qui converge vers M.

Démonstration.
On démontrera ce résultat dans un chapitre ultérieur. □

Notons qu'avec ce résultat, l'exercice d'application précédent devient immédiat.

Exercice d'application 8.14. Déterminer, si ils existent, le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure de

$$A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \ : \ n \in \mathbf{N}^\star \right\}.$$

$\hookrightarrow$ On a $A = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}} \ : \ n \in \mathbf{N}^\star \right\}$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \frac{1}{1 - 2^{-n}}$. On a u décroissante, donc pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n \leqslant u_1$ et ainsi $\max(A) = u_1 = 2$. En particulier, $\sup(A) = 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $1 - 2^{-n} \in]0\,;\,1[$, donc $u_n > 1$ et ainsi 1 minore A. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, on obtient que $\inf(A) = 1$ (mais A n'admet pas de maximum puisque $1 \notin A$).

8.2.2. Droite réelle achevée

On rappelle la définition suivante :

Définition 8.15.

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux objets non réels ayant la propriété

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent sur $\overline{\mathbf{R}}$ en complétant par les opérations suivantes

$$\begin{gathered}
\forall x \in \mathbf{R}, \qquad x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty \\
\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \qquad x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = -\infty \\
\forall x \in \mathbf{R}_-^\star, \qquad x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = +\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.
\end{gathered}$$

Attention : Les opérations $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies.

8.2.3. Compléments sur les intervalles de R

Définition 8.16.

Soit A une partie de $\mathbf{R}$. La partie A est dite **convexe** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad [x\,;\,y] \subset A.$$

Proposition 8.17.

Les parties convexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles. Ils peuvent prendre les formes suivantes.

1. Ensemble vide.
2. Segment : $[a\,;\,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $a \leqslant b$.
3. Intervalle ouvert : $]a\,;\,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ où $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ et $a < b$.
4. Intervalle semi-ouvert : $[a\,;\,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $]a\,;\,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $a < b$.
5. Intervalle fermé non borné : $[a\,;\,+\infty[$ ou $]-\infty\,;\,a]$, avec $a \in \mathbf{R}$.

Démonstration.
Soit A une partie convexe non vide de $\mathbf{R}$.

- Cas où A est majorée non minorée.
  Posons $a = \sup(A)$ (A est non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure).
  Soit $x \in A$. $\sup(A)$ majore A, donc $x \leqslant \sup(A)$, puis $A \subset]-\infty\,;\,a]$.
  Soit $x \in]-\infty\,;\,a[$. Puisque $x < a$, x ne majore pas A : il existe $y \in A$ tel que $x < y$. Par ailleurs, A n'est pas minorée donc il existe $z \in A$ telle que $z < x$. Or A est convexe, donc $[z\,;\,y] \subset A$. Puisque $x \in [z\,;\,y]$, on obtient que $x \in A$.
  En résumé, $[-\infty\,;\,a[\subset A \subset [-\infty\,;\,a]$. Ainsi,
  - si $a \in A$, $A =]-\infty\,;\,a]$;
  - si $a \notin A$, $A =]-\infty\,;\,a[$.

- On montre de même que si A est minorée non majorée, $A = [a\,;+\infty[$ ou $A =]a\,;+\infty[$, avec $a = \inf(A)$.
- Cas où A est majorée et minorée.
  Notons $a = \inf(A)$ et $b = \sup(A)$. Soit $x \in A$. Puisque $\inf(A)$ est un minorant et $\sup(A)$ est un majorant de A, $\inf(A) \leqslant x \leqslant \sup(A)$, puis $x \in [a\,;b]$.
  Soit $x \in]a\,;b[$. Puisque $a < x < b$, x ne majore ni ne minore A : il existe $(y,z) \in A^2$ tel que $y < x < z$. Par convexité de A, il s'ensuit que $x \in [y\,;z] \subset A$, puis $x \in A$.
  En résumé, $]a\,;b[\subset A \subset [a\,;b]$. Ainsi,
  - si $a \in A$ et $b \in A$, $A = [a\,;b]$;
  - si $a \in A$ et $b \notin A$, $A = [a\,;b[$;
  - si $a \notin A$ et $b \in A$, $A =]a\,;b]$;
  - si $a \notin A$ et $b \notin A$, $A =]a\,;b[$.
- Supposons A non majorée, non minorée. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque A est non minorée, il existe $y \in A$ avec $y \leqslant x$. Puisque A est non majorée, il existe $z \in A$ avec $x \leqslant z$. Ainsi $x \in [y\,;z] \subset A$ car A est une partie convexe. Il s'ensuit $\mathbf{R} \subset A$. L'autre inclusion étant évidente, on a $A = \mathbf{R}$. □

Remarque 8.18. Les singletons sont aussi des intervalles de $\mathbf{R}$, et même des segments, puisque pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\{A\} = [a\,;a]$.

Définition 8.19.

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble et $(E_j)_{j\in\mathcal{J}}$ une famille d'ensembles.
• L'**intersection** des ensembles $(E_j)_{j\in\mathcal{J}}$, noté $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} E_j$ est l'ensemble des éléments communs à tous les ensembles E_j, autrement dit

$$x \in \bigcap_{j\in\mathcal{J}} E_j \iff (\forall j \in \mathcal{J},\ x \in E_j).$$

• La **réunion** des ensembles $(E_j)_{j\in\mathcal{J}}$, noté $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} E_j$ est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles I_j, autrement dit

$$x \in \bigcup_{j\in\mathcal{J}} E_j \iff (\exists j \in \mathcal{J},\ x \in E_j).$$

Exemple 8.20.

$$\bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \left]-\frac{1}{k};1+\frac{1}{k}\right[= [0;1] \qquad \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \left[-\frac{1}{k};1-\frac{1}{k}\right] = [-1;1[$$

Proposition 8.21.

L'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est un intervalle.

Démonstration.
Soit $(I_j)_{j\in\mathcal{J}}$ une famille d'intervalles de $\mathbf{R}$. On note $A = \bigcap_{j\in\mathcal{J}} I_j$. Pour montrer que A est un intervalle, il suffit de prendre deux nombres réels quelconques a et b dans A, et de montrer que si un nombre réel x est compris entre a et b alors il appartient à A, c'est-à-dire à tous les I_j pour tout $j \in \mathcal{J}$.

Soit a et b deux nombres réels dans A, x un nombre compris entre a et b et $j \in \mathcal{J}$. Comme les nombres a et b appartiennent à A, ils appartiennent à I_j, et puisque I_j est un intervalle, tout nombre compris entre a et b appartient à I_j. On en déduit que x appartient à I_j. Comme ceci est valable quel que soit $j \in \mathcal{J}$, le réel$x$ appartient à l'intersection des I_j c'est à dire à A. □

Remarque 8.22. La réunion de deux intervalles n'est pas nécessairement un intervalle. Par exemple $[0;1] \cup [2,3]$ est la réunion de deux intervalles et n'est pas un intervalle.

8.2.4. Approximation d'un nombre réel

Définition 8.23.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **partie entière** le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$.
Autrement dit, pour tout nombre réel x, $\lfloor x \rfloor$ est caractérisé par

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z} \qquad \text{et} \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Démonstration.
On veut montrer ici qu'il existe un unique entier $p \in \mathbf{Z}$ tel que

$$p \leqslant x < p+1.$$

Existence. Considérons $B = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k \leqslant x \}$. Alors B est une partie non vide majorée de $\mathbf{Z}$, donc elle admet un plus grand élément p. On a $p \in B$, donc $p \leqslant x$. De plus $p+1 \notin B$, donc $x < p+1$.
Unicité. Soient p_1 et p_2 tels que $p_1 \leqslant x < p_1 + 1$ et $p_2 \leqslant x < p_2 + 1$. Alors

$$p_1 - p_2 - 1 < 0 < p_1 - p_2 + 1$$

Puisque $p_1 - p_2 \in \mathbf{Z}$, on en déduit que $p_1 - p_2 = 0$. □

Exemple 8.24. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -3,8 \rfloor = -4$.

◇◇

Remarque technique 8.25. Soit $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. D'après la définition, montrer que $\lfloor x \rfloor = a$ revient à montrer que $\begin{cases} a \in \mathbf{Z} \\ x \in [a\,;\, a+1[\end{cases}$.

Exercice d'application 8.26. Soit $a \in \mathbf{N} \backslash \{0, 1, 2\}$. Calculer la partie entière de $\sqrt{a^2+5}$.

$\hookrightarrow$ On remarque que $a^2 \leqslant a^2 + 5 < a^2 + 2a + 1$, donc $a^2 \leqslant a^2 + 5 < (a+1)^2$. Or $a \in \mathbf{N}$, donc $\left\lfloor \sqrt{a^2+5} \right\rfloor = a$.

◇◇

Proposition 8.27.

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
2. $\forall n \in \mathbf{Z},\ \lfloor n \rfloor = n$.
3. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{Z},\ (n \leqslant x \Longrightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ par définition et $x < \lfloor x \rfloor + 1$ qui se réécrit $x - 1 < \lfloor x \rfloor$.
2. Soit $n \in \mathbf{Z}$. On a $n \leqslant n < n+1$ donc, d'après la Remarque Technique 8.25, $\lfloor n \rfloor = n$.
3. Immédiat en utilisant la caractérisation $\lfloor x \rfloor = \max \{ k \in \mathbf{Z} \mid k \leqslant x \}$ donnée dans la démonstration qui suit la définition.
4. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$ et comme $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier, on en déduit que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ (cf. Remarque Technique 8.25).

□

◇◇

Remarque technique 8.28. La caractérisation de la partie entière avec des inégalités est très utile

pour résoudre des équations avec la partie entière. Si x désigne l'inconnue, on commence par encadrer x entre deux réels (phase d'analyse). Ensuite, on calcule les parties entières qui interviennent dans l'équation (puisque x est encadré par deux réels, il y a un nombre fini de calculs à faire) et on vérifie si l'équation est vérifiée (phase de synthèse).

Exercice d'application 8.29. Résoudre l'équation $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

$\hookrightarrow$ *Analyse.* Soit $x \in \mathbf{R}$ une solution de l'équation. On a $2x-1-1 < \lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor \leqslant x-4$, d'où $x < -2$. De plus, $x-4-1 < \lfloor x-4 \rfloor = \lfloor 2x-1 \rfloor \leqslant 2x-1$, d'où $x > -4$. Ainsi $x \in \,]-4\,;\,-2[$.

Synthèse. Soit $x \in \,]-4\,;\,-2[$. On cherche à distinguer des cas suivant les valeurs que peuvent prendre les parties entières. Par exemple, $-9 < x-5 < \lfloor x-4 \rfloor \leqslant x-4 < -6$, d'où $\lfloor x-4 \rfloor \in \{-8,-7\}$.

- Résolvons $\lfloor x-4 \rfloor = -8$ et $\lfloor 2x-1 \rfloor = -8$.
  On a $\lfloor x-4 \rfloor = -8 \iff -8 \leqslant x-4 < -8+1 \iff -4 \leqslant x < -3$. De plus, $\lfloor 2x-1 \rfloor = -8 \iff -8 \leqslant 2x-1 < -7 \iff -\frac{7}{2} \leqslant x < -3$. Ainsi les valeurs de $\left[-\frac{3}{2}\,;\,-3\right[$ sont solutions de l'équation initiale.

- Résolvons $\lfloor x-4 \rfloor = -7$ et $\lfloor 2x-1 \rfloor = -7$.
  On a $\lfloor x-4 \rfloor = -7 \iff -7 \leqslant x-4 < -6 \iff -3 \leqslant x < -2$. De même, $\lfloor 2x-1 \rfloor = -7 \iff -7 \leqslant 2x-1 < -6 \iff -3 \leqslant 2x-1 < -\frac{5}{2}$. Ainsi les valeurs de $\left[-3\,;\,-\frac{5}{2}\right[$ sont solutions de l'équation initiale.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\right[$.

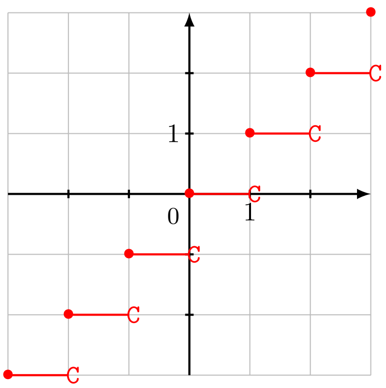
◇◇◇

Proposition 8.30.

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Supposons $x \leqslant y$. Alors $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y$. Avec le point 3. de la proposition précédente, on obtient $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$. □

Graphe de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.



Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier tel que

$$p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1, \qquad i.e. \qquad \frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{p_n+1}{10^n}.$$

Définition 8.31.

Le nombre décimal $\frac{p_n}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par défaut** de x à la précision 10^{-n}.
Le nombre décimal $\frac{p_n+1}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par excès** de x à la précision 10^{-n}.

Exemple 8.32.
- On a, à 10^{-2} près, $2,71 \leqslant \mathrm{e} < 2,72$.
- On a, à 10^{-3} près, $1,414 \leqslant \sqrt{2} < 1,415$.
- On a, à 10^{-4} près, $3,1415 \leqslant \pi < 3,1416$.

Remarque 8.33. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ l'approximation par défaut de x. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant x - u_n \leqslant 10^{-n}$. Par passage à la limite on obtient avec le théorème des gendarmes que u converge vers x.
On a ainsi obtenu, pour tout $x \in \mathbf{R}$, une suite u de nombres rationnels qui converge vers x. On traduit cette propriété en disant que $\mathbf{Q}$ est **dense** dans $\mathbf{R}$.

Chapitre 9

Suites réelles et complexes

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

Augustin Louis Cauchy [1]

Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance.

Leonardo Fibonacci [2]

1. Augustin Louis CAUCHY - mathématicien français (1789-1857)

2. Leonardo FIBONACCI, mathématicien italien (1175-1250) ; la citation est extraite de *Liber Abaci*, un traité de calculs récréatifs, qui est particulièrement innovant pour l'époque car fondé sur le calcul décimal, à une époque où l'Occident utilise encore les chiffres romains et calcule sur abaque ; on peut modéliser le problème énoncé à l'aide de la célèbre **suite de Fibonacci**, qui est étudiée dans ce chapitre en exercice.

Dans toute la suite, **K** désignera **R** ou **C**.

9.1. Généralités sur les suites réelles

9.1.1. Suites réelles : définition et notations

Définition 9.1.

Une **suite réelle** est une famille de nombres réels indexée par **N**, c'est-à-dire une application

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

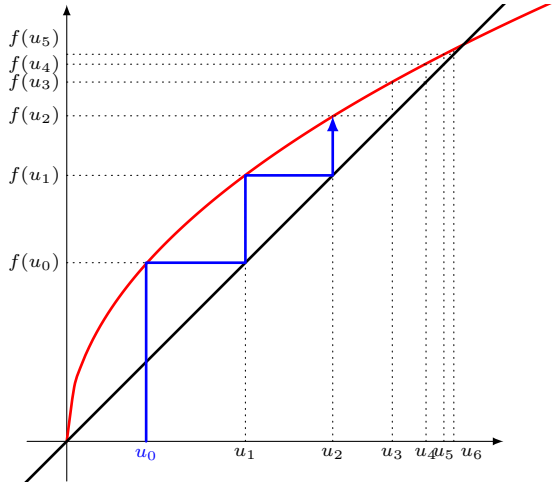
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé **terme général** (ou n-ième terme de la suite, ou terme d'indice n, ou terme de rang n) de la suite.
La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
On note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles indexées par **N**.

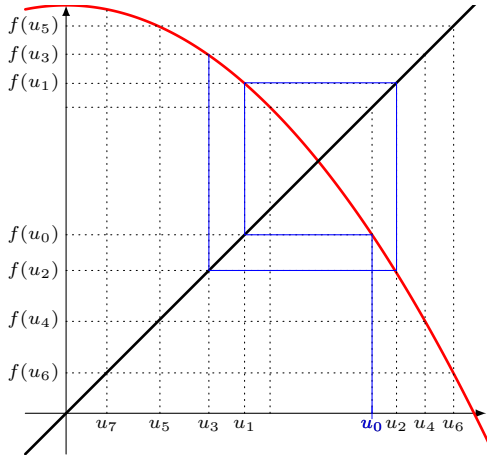
Remarque 9.2. Une suite réelle de terme général u_n peut aussi être indexée par les nombres entiers naturels supérieurs à un entier n_0. Une telle suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. L'étude d'une telle suite est identique à celle d'une suite indexée par **N**.

On peut définir une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de plusieurs manières différentes :

- **de manière explicite :** chacun des termes de la suite est donné en fonction de n.
- **de manière implicite :** tous les termes de la suite sont correctement définis comme vérifiant une certaine propriété, mais on ne dispose pas de la valeur explicite de chacun de ses termes (souvent le terme général est défini comme l'unique solution d'une équation donnée).
- **par une relation de récurrence :** on définit explicitement le (ou les) premier(s) terme(s) de la suite puis chaque terme de la suite est défini à l'aide du (ou des) précédent(s).

Représentation d'une suite définie par récurrence





Exemple 9.3. 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \exp(-n+1)$$

est définie de manière explicite.
Avec cette définition, on connaît directement la valeur de chaque terme de la suite. Dans notre exemple, $u_{20} = \exp(-19)$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans $[-1; +\infty[$ donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique nombre $u_n \in \mathbf{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et, *a priori*, il n'est pas possible d'obtenir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression directe de u_n en fonction de n.

3. Par exemple, on peut définir par récurrence deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\begin{array}{ccc} u_0 = 1 & \text{et} & \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n + u_n^2, \\ v_0 = 0,\ v_1 = 1 & \text{et} & \forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} = \exp(v_{n+1} - v_n). \end{array}$$

Là encore, on ne peut pas, *a priori*, déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$ une expression directe de u_n et v_n en fonction de n. On peut par contre calculer les termes de ces suites de proche en proche. Ainsi,

$$u_1 = 3 \qquad u_2 = 15 \qquad u_3 = 255\ldots \qquad v_2 = \mathrm{e} \quad v_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}\ldots$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente d'ordre 2.

Pour définir une suite par une relation de récurrence, il y a tout de même des précautions à prendre : il se peut que la donnée d'un premier terme et d'une relation de récurrence ne définissent pas correctement une suite.

Par exemple, en posant $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$, on ne définit pas correctement la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$: on aurait $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 1$ et u_4 n'est pas défini !

9.1.2. Opérations sur les suites

On peut définir sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ trois opérations :

Définition 9.4.

Soit u, v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La **somme** de u et v est la suite notée $(u + v)$ et définie par :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (u + v)_n = u_n + v_n.$$
- La **multiplication interne** de u et v est la suite notée $(u \times v)$ et définie par :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$
- La **multiplication externe** de u par λ est la suite notée $\lambda \cdot u$ et définie par :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad (\lambda \cdot u)_n = \lambda \cdot u_n.$$

9.1.3. Suites réelles et relation d'ordre

Définition 9.5.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **croissante** (resp. **décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) ;
- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) ;
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement croissante ou (strictement) décroissante ;
- **constante** si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n$ (ce qui équivaut à $u_n = u_0$).

Remarque technique 9.6.

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la principale méthode consiste à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n > 0$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors u est constante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n < 0$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Notons tout de même que lorsque le terme général u_n s'écrit sous forme d'un produit ou d'un quotient de termes strictement positifs, on peut, au lieu d'étudier le signe de différence, étudier la position du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 :

- si $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n > 1$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1}/u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite u est constante ;
- si $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n < 1$) pour tout $n \in \mathbf{N}$, u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Exercice d'application 9.7. Etudier la monotone de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1.$$

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 - 2u_n + 1 - u_n = (u_n - 1)^2 \geqslant 0,$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Exercice d'application 9.8. Etudier la monotone de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \frac{(n+3)!}{2^n}.$$

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+4)!2^n}{2^{n+1}(n+3)!} = \frac{n+4}{2} \geqslant 1,$$

donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ car u_n est strictement positif.

La méthode de la différence marche toujours, il suffit de mettre en facteur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+4)!}{2^{n+1}} - \frac{(n+3)!}{2^n} = \frac{(n+3)!}{2^n}\left(\frac{n+4}{2} - 1\right) = \frac{(n+3)!}{2^n} \times \frac{n+2}{2} \geqslant 0.$$

Définition 9.9.

On dit qu'une suite u satisfait la propriété $\mathcal{P}(n)$ **à partir d'un certain rang** s'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 9.10. La suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (n-2)^2$ est croissante à partir du rang 2.

Définition 9.11.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_{n+1} = u_n.$$

Exemple 9.12. La suite $\left(\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est une suite stationnaire : elle stationne à 0 à partir du rang 2.

Définition 9.13.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est :

- **majorée** si elle vérifie
$$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant M\ ;$$
- **minorée** si elle vérifie
$$\exists m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant m\ ;$$
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 9.14. Une suite positive est une suite minorée par 0. Elle est également minorée par n'importe quel nombre négatif non nul.

Exercice d'application 9.15. Démontrer qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

↪ Soit u une suite bornée à partir d'un certain rang. Alors il existe $(m, M) \in \mathbf{R}^2$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. On a en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n \geqslant \min\{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, m\} \qquad \text{et} \qquad u_n \leqslant \max\{u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, M\},$$

donc u est bornée.

Remarque 9.16. On a aussi montré qu'une suite majorée (resp. minorée) à partir d'un certain rang est majorée (resp. minorée).

Remarque 9.17. Une suite majorée peut très bien n'être majorée par aucun de ces termes.

Par exemple la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est majorée par 1 mais n'est majorée par aucun de ses termes puisque l'ensemble se ses termes $\left\{1 - \frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbf{N}^\star\right\}$ n'admet pas de plus grand élément.

Proposition 9.18.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, *i.e.*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\quad |u_n| \leqslant M.$$

Le cas échéant, on dit que u est bornée par M.

Démonstration.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors il existe des réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. Posons $K = \max(|m|, |M|)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$$

donc $|u| \leqslant K$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Alors u est minorée par $-M$ et majorée par M. □

Exercice d'application 9.19. Démontrer que l'ensemble des suites bornées est stable par somme, produit (ce qui signifie que la somme, resp. le produit, de deux suites bornées est bornée) et produit par un réel (ce qui signifie le produit par un réel d'une suite bornée est bornée).

↪ Soit u, v deux suites bornées resp. par M_1 et M_2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. En vertu de l'inégalité triangulaire, on a :

   $$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_1 + M_2,$$

   donc $u + v$ est bornée par $M_1 + M_2$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par multiplicativité de $|\cdot|$, on a :

   $$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant M_1 \times M_2,$$

   donc $u \times v$ est bornée par $M_1 \times M_2$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par multiplicativité de $|\cdot|$, on a :

   $$|\lambda \cdot u_n| \leqslant |\lambda| \cdot |u_n|,$$

   donc $\lambda \cdot u$ est bornée par $|\lambda| \cdot M_1$.

9.2. Convergence des suites réelles

9.2.1. Limite finie d'une suite réelle

Définition 9.20.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si :

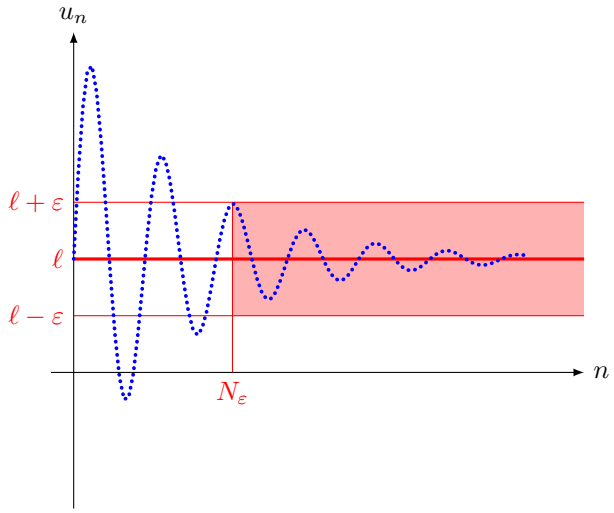
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite **convergente** et le réel ℓ est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

L'assertion de la définition signifie qu'au delà du rang N_ε (qui dépend à priori de ε), tous les termes de la suites appartiennent à l'intervalle $[\ell-\varepsilon\,;\,\ell+\varepsilon]$.

Intuitivement, u converge vers ℓ si u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ au delà d'un certain rang. Graphiquement, toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y=\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Exercice d'application 9.21. Soit $q\in\,]-1\,;\,1[$ et $u=(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que u converge vers 0.

$\hookrightarrow$ Soit $\varepsilon>0$.
Recherche au brouillon. On cherche $N\in\mathbf{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant\varepsilon$, *i.e.* $|q|^n\leqslant\varepsilon$, *i.e.* $\ln(|q|)n\leqslant\ln(\varepsilon)$, *i.e.* $n\geqslant\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}$ car $\ln(|q|)<0$ puisque $|q|<1$.
Suite de la rédaction. On pose

$$N=\left\lfloor\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}\right\rfloor+1.$$

Soit $n\geqslant N$. On a en particulier $n\geqslant\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}$, puis $\ln(|q|)n\leqslant\ln(\varepsilon)$, d'où $|u_n|\leqslant\varepsilon$ et ainsi $|u_n|\leqslant\varepsilon$.
Finalement, u converge vers 0.

Remarque 9.22. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n-\ell|\leqslant c\varepsilon.$$

où c est une constante (ne dépendant ni de n, ni de ε)

Proposition 9.23.

La limite ℓ d'une suite convergente est unique.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente. Soit $\ell,\ell'\in\mathbf{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell'$. Nous allons montrer que $\ell=\ell'$.

Supposons que $\ell\neq\ell'$ par l'absurde. Posons $\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{4}$ strictement positif.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon\in\mathbf{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ', il existe $N'_\varepsilon\in\mathbf{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N'_\varepsilon,\quad |u_n-\ell'|\leqslant\varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire d'après l'inégalité triangulaire

$$|\ell - \ell'| = |(u_n - \ell') - (u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell'| + |u_n - \ell|$$

Pour tout $n \geqslant \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, on obtient

$$|u_n - \ell'| + |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

donc

$$|\ell - \ell'| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a montré que

$$|\ell - \ell'| \leqslant \frac{|\ell - \ell'|}{2}$$

ce qui est absurde. Finalement $\ell = \ell'$. □

Définition 9.24.

On dit qu'une suite est **divergente** ou qu'elle **diverge** lorsqu'elle n'est pas convergente.

9.2.2. Propriétés des suites convergentes

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ on se ramène souvent à montrer qu'une autre suite tend vers 0 grâce à la proposition suivante :

Proposition 9.25.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ si et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } \ell &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, |(u_n - \ell) - 0| \leqslant \varepsilon \\ &\iff (u_n - \ell)_{n\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } 0\end{aligned}$$

□

Proposition 9.26.

Soit $\ell \in \mathbf{R}$. Soit $(\alpha, u) \in (\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^2$.
Si α converge vers 0 et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \alpha_n,$$

alors u converge vers 0.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque α converge vers 0, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|\alpha_n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$|u_n - \ell| \leqslant v_n \leqslant |v_n| \leqslant \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Remarque technique 9.27. D'après la proposition précédente, pour démontrer qu'une suite u converge vers ℓ, on peut tenter de majorer $|u-\ell|$ par une suite qui converge vers 0.

Pour montrer qu'une suite de signe non constant tend vers 0, on se ramène souvent à une suite positive grâce à la valeur absolue :

Proposition 9.28.

Soit u une suite réelle.

1. Si u converge vers ℓ, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|$.
2. La suite u converge vers 0 si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire d'après la seconde inégalité triangulaire

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a donc

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant \varepsilon.$$

Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|$.

2. D'après 1. si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Supposons maintenant que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\big||u_n|\big| = |u_n|$, la définition même de la convergence d'une suite vers 0 assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

□

Attention le résultat précédent n'est juste qu'avec 0. En effet, il existe des suites (u_n) qui ne convergent pas mais telles que la suite $(|u_n|)$ converge.

Par exemple la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge mais la suite $\big(|(-1)^n|\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite constante égale à 1 qui converge vers 1.

Proposition 9.29.

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a par la seconde inégalité triangulaire,

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|.$$

Par définition de la convergence de la suite vers ℓ, il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant 1.$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc,

$$|u_n| - |\ell| \leqslant \big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant 1,$$

donc

$$|u_n| \leqslant |\ell| + 1.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée (cf. Exercice d'Application 9.15). □

La réciproque de ce résultat est fausse. Par exemple, on montrera plus loin que $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente.

Proposition 9.30.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite. Soit $m, M \in \mathbf{R}$ tels que $m < \ell < M$.

1. Il existe $N_m \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_m,\ u_n > m$.
2. Il existe $N_M \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_M,\ u_n < M$.
3. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ m < u_n < M$.

Démonstration.
On démontre le 1., la démonstration du 2. est similaire et 3. s'obtient immédiatement avec 1. et 2.
1. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Soit $m' \in]m\,;\,\ell[$. On pose $\varepsilon = \ell - m' > 0$. On obtient avec ce qui précède qu'il existe un rang N_m tel que pour tout $\forall n \geqslant N_m$, $u_n \geqslant m' > m$. □

Corollaire 9.31.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers une limite ℓ.

1. Si $\ell > 0$, u est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Si $\ell < 0$, u est majorée par un réel $M < 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration. 1. On utilise le résultat 1. de la proposition précédente avec $m = \frac{\ell}{2}$.
2. On utilise le résultat 2. de la proposition précédente avec $M = \frac{\ell}{2}$. □

9.2.3. Opérations sur les limites

Proposition 9.32.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles qui convergent vers ℓ_1 et ℓ_2 respectivement. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. La somme $u + v$ converge et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2.$$
2. Le produit interne $u \times v$ convergent et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2.$$
3. Le produit externe $\lambda \cdot u$ converge et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot \ell_1.$$
4. Si de plus ℓ_2 est non nul, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ v_n \neq 0$ et la suite $(\frac{1}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{1}{\ell_2}$. Dans ce cas, la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe N_1 et N_2 des entiers tels que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N_2$, on a $|v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$. Par la Proposition 9.30, il existe $N_3 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_3$, on a $\frac{|\ell_2|}{2} \leqslant |v_n| \leqslant |\ell_2| + 1$. Posons $N_4 = \max(N_1, N_2, N_3)$.

1. Pour tout $n \geqslant N_4$,

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon.$$

   Donc $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$ (cf. Remarque 9.22).

2. Pour tout $n \geqslant N_4$,

$$|u_n v_n - \ell_1\ell_2| \leqslant |v_n(u_n - \ell_1)| + |\ell_1(v_n - \ell_2)| \leqslant |v_n|\,|(u_n - \ell_1)| + |\ell_1|\,|(v_n - \ell_2)| \leqslant (|\ell_2| + 1 + |\ell_1|)\varepsilon.$$

   Donc $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell_1\ell_2$ (cf. Remarque 9.22).

3. C'est le point 2 appliqué à la suite constante $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ égale à λ.

4. Pour tout $n \geqslant N_4$,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell_2}\right| \leqslant \frac{|\ell_2 - v_n|}{|\ell_2 v_n|} \leqslant \frac{\varepsilon}{|\ell_2|\,\frac{|\ell_2|}{2}} \leqslant \frac{2}{\ell_2^2}\varepsilon.$$

   Donc $(\frac{1}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{1}{\ell_2}$ (Remarque 9.22). □

9.2.4. Suites tendant vers l'infini

Définition 9.33.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. On dit que u **tend vers** $+\infty$ si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \geqslant A.$$

2. On dit que u **tend vers** $-\infty$ si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists N_A \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \leqslant A.$$

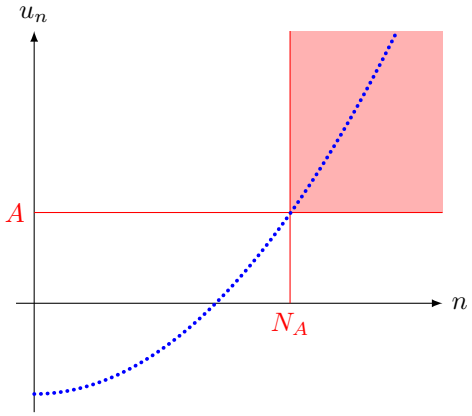
Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas une suite convergente. On dit qu'elle **diverge** vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ou encore que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite. Si u tend vers $+\infty$, on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

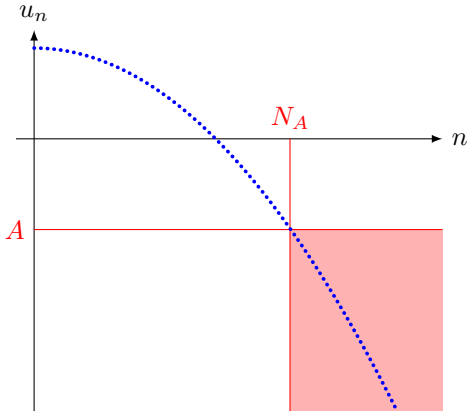
On utilise une notation similaire si u tend vers $-\infty$.

Ainsi u diverge vers $+\infty$ si on peut choisir u_n aussi grand que l'on veut au delà d'un certain rang.
La suite u diverge vers $-\infty$ si on peut rendre u_n aussi petit que l'on veut au delà d'un certain rang.

Suite divergeant vers $+\infty$



Suite divergeant vers $-\infty$



On parle donc de limite d'une suite aussi bien pour une suite convergente que pour une suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$. Lorsque la limite d'une suite existe, cette limite est donc un élément ℓ de $\overline{\mathbf{R}}$.

Proposition 9.34.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée par un réel strictement positif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement positive au delà d'un certain rang.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée par un réel strictement négatif au delà d'un certain rang. En particulier, elle est strictement négative au delà d'un certain rang.
4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration.
On fait la démonstration avec $+\infty$, l'autre cas est similaire. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$.

1. On prend $A = 1$. Alors d'après la définition, il existe $N_A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_A$, $u_n \geqslant 1$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang.
2. Cf. Exercice d'Application 9.15. □

Lemme 9.35.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

1. Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée (respectivement majorée), alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).
2. Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée (respectivement majorée) au delà d'un certain rang par un nombre strictement positif (respectivement strictement négatif), alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Démonstration.
On ne traite que le cas où u tend vers $+\infty$.

1. Si v est minorée, alors il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geqslant m$.
   Soit $A \in \mathbf{R}$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A - m$.
   Alors, pour tout $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant A$ et on a montré que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2. Si v est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif, alors il existe $m > 0$ et $N_1 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_1$, $v_n \geqslant m$.
Soit $A \in \mathbf{R}$. Par définition de la limite, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_2$, $u_n \geqslant \frac{A}{m}$.
Puisque $m > 0$, on en déduit que pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $u_n v_n \geqslant A$. □

Proposition 9.36.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles admettant respectivement $\ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$ et $\ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$ pour limite.

1. Si la forme $\ell_1 + \ell_2$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$,
2. Si la forme $\ell_1\ell_2$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1\ell_2$,
3. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^\star$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell_1$,

où le résultat des opérations précédentes est calculé dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Démonstration.
Le cas où ℓ_1 et ℓ_2 appartiennent tous deux à $\mathbf{R}$ a été vu plus haut (cf. Proposition 9.32). On traite uniquement le cas où $\ell_1 = +\infty$.

1. Supposons $\ell_2 \in \mathbf{R}$ ou $\ell_2 = +\infty$. Dans les deux cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée et d'après le lemme précédent, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. - Supposons que $\ell_2 \in \mathbf{R}^{+\star}$ ou $\ell_2 = +\infty$. Alors dans les deux cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée au delà d'un certain rang par un réel strictement positif et le lemme précédent assure que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
   - Supposons que $\ell_2 \in \mathbf{R}^{-\star}$ ou $\ell_2 = -\infty$. Alors on considère la suite $(-v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $-\ell_2 \in \mathbf{R}^{+\star}$ ou $-\ell_2 = +\infty$. En appliquant ce qui précède, on obtient que la suite $(-u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ donc la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.
3. Il suffit de considérer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda u_n = v_n u_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite constante égale à λ et appliquer le résultat précédent. □

Proposition 9.37.

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), alors :

1. au delà d'un certain rang $N \in \mathbf{N}$, tous les termes u_n sont strictement positifs (respectivement strictement négatifs) ;
2. la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ converge vers 0.

Démonstration.
On fait la preuve avec $+\infty$, le cas $-\infty$ est similaire.

D'après ce qui précède, puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, elle est minorée au delà d'un certain rang par un réel strictement positif donc il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N, u_n > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

On pose $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, N)$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ 0 < \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$$

ce qui implique que la suite $(1/u_n)_{n\geqslant N}$ converge vers 0.

□

Proposition 9.38.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0,
2. il existe un rang N au delà duquel tous les termes u_n sont strictement positifs (respectivement strictement négatifs),

alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Démonstration.
On traite le cas où les u_n sont strictement positifs au delà d'un certain rang N.

Soit $A > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, il existe $n_{1/A} \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_{1/A},\ |u_n| \leqslant \frac{1}{A}.$$

On pose $N_A = \max(N, n_{1/A})$. On a alors

$$\forall n \geqslant N_A, \frac{1}{|u_n|} \geqslant A$$

et puisque $\forall n \geqslant N, u_n > 0$, on a

$$\forall n \geqslant N_A, \frac{1}{u_n} \geqslant A$$

ce qui prouve bien que la suite $(1/u_n)_{n\geqslant N}$ tend vers $+\infty$.

Le cas où les u_n sont strictement négatifs au delà d'un certain rang se traite de façon similaire. □

9.2.5. Suites extraites

Définition 9.39.

On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \qquad (n < m \Longrightarrow \varphi(n) < \varphi(m)).$$

Remarque 9.40. Concrètement, pour former une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on ne prend que certains éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en conservant l'ordre d'apparition de ces termes (ce qui explique que φ soit choisie strictement croissante).

Exemple 9.41. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{2n}$, est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Plutôt que de changer le nom de suite, on la note souvent $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$.

Les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{p_n})_{n\in\mathbf{N}}$, où p_n désigne le n-ième nombre premier, sont également des sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Par contre, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $w_{2k} = u_{2k+1}$ et $w_{2k+1} = u_{2k}$ (autrement dit pour les premiers termes on a :

$$w_0 = u_1, \quad w_1 = u_0, \quad w_2 = u_3, \quad w_3 = u_2, \quad w_4 = u_5, \quad w_5 = u_4 \dots)$$

n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ car l'ordre d'apparition des termes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas respecté.

Proposition 9.42.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers ℓ.

Démonstration.
On traite d'abord le cas où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$.

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque la fonction φ est strictement croissante, on peut montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$, on a donc $\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \varphi(n) \geqslant N_\varepsilon$ et donc

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ vers ℓ.

Les cas où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ se traitent de façon similaire. □

Remarque technique 9.43. Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite, on peut trouver deux sous-suites distinctes de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne convergeant pas vers la même limite.

Exercice d'application 9.44. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\frac{2^n+(-2)^n}{2})_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas.

↪ On a, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{2p+1} = 0$, donc $(u_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. De plus, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{2p} = 4^p$, donc $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ est minorée par 1. En particulier, $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0. Il s'ensuit que u n'est pas convergente.

Exercice d'application 9.45. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\cos(\frac{n\pi}{10}))_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

↪ On a, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{20p} = \cos(2p\pi) = 1$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{20(p+1)} = \cos(2p\pi + \pi) = -1$. Donc les suites extraites $(u_{20p})_{p\in\mathbf{N}}$ et $(u_{20(p+1)})_{p\in\mathbf{N}}$ ne convergent pas vers la même limite. En particulier, u diverge.

Proposition 9.46.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration.
Voir TD. □

9.2.6. Passage à la limite dans une inéquation

Proposition 9.47.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergentes.
S'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration.
Notons ℓ et ℓ' lest limites respectives de u et v. Supposons par l'absurde $\ell > \ell'$. Posons alors $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{3} > 0$. Par définition de la limite, on a :

$$\begin{array}{ll} \exists N_1 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_1, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_2 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_2, & |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

Posons $M = \max(N, N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant M$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell' + \varepsilon,$$

puis $\ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}(\ell - \ell')$, ce qui est absurde. Finalement, $\ell \leqslant \ell'$. □

Remarque 9.48. On retiendra que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Corollaire 9.49.

Soient u et v deux suites convergentes. Soient m et M deux réels.

1. Si $u \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.
2. Si $u \leqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec u et les suites constantes égales à m et M respectivement. □

9.3. Suites classiques

9.3.1. Suites arithmétiques et géométriques

Définition 9.50.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite

1. **arithmétique** si, et seulement si, il existe $r \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.
2. **géométrique** si, et seulement si, il existe $q \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Remarque 9.51. La raison d'une suite arithmétique est définie de manière unique. La raison d'une suite géométrique u est définie de manière unique, sauf si $u_0 = 0$.

Proposition 9.52 - Variations.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. Supposons que u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.
   - Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
   - Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
   - Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.
2. Supposons que u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$.
   - Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite est nulle à partir du rang 1.
   - Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
   - Si $q < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est donc pas monotone.
   - Si $q > 0$, la suite est monotone et de signe constant. Plus précisément :
     - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement croissante.
     - Si $u_0 > 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement croissante.

Démonstration. 1. Immédiat en remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.

2. Si $q > 0$, on peut s'intéresser à $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Les autres cas sont simples. □

⚠ **Attention** ⚠. Ici il faut bien considérer des suites réelles ! Nous y reviendrons plus loin, mais puisque la notion de croissance est liée à la relation d'ordre $\leqslant$, la notion de suite complexe croissante n'a pas de sens.

Proposition 9.53 - Terme général.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

1. Si u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$, alors pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $u_n = u_p + (n - p) \times r$.
2. Si u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}$, alors pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration.
Ces résultats s'obtiennent facilement par récurrence, par exemple. □

Proposition 9.54 - Limites.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. Supposons que u est arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.
   - Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.
   - Si $r > 0$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   - Si $r < 0$, alors la suite (u_n) tend vers $-\infty$.
2. Supposons que u est géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$.
   - Si $u_0 = 0$, alors la suite est nulle et tend vers 0.
   - On suppose maintenant que $u_0 \neq 0$.
     - Si $|q| < 1$, alors la suite (u_n) tend vers 0.
     - Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante, égale à u_0 et converge vers u_0.
     - Si q et u_0 sont réels et si $q > 1$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si $u_0 > 0$ et vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
     - Dans tous les autres cas la suite (u_n) n'a pas de limite.

   On retiendra qu'une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q converge si, et seulement si, $q = 1$ ou $|q| < 1$.

Démonstration.
Il faut utiliser le terme général de la suite dans chaque cas. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Encore une fois la notion de limite est liée à $\leqslant$. Dire qu'une suite de complexe diverge vers $+\infty$ par exemple n'a donc pas de sens (ou pourra tout de même définir la notion de suite complexe convergente).

Proposition 9.55 - Somme des termes.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$.

1. La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :
$$\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$
2. La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 est donnée par
$$(\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$
Si la raison vaut 1, cette somme vaut plutôt $n \times (\text{premier terme})$.

Démonstration.
On peut le démontrer par récurrence, ou par changement d'indice avec les sommes de référence $\sum_{k=0}^{n-1} k$ et $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$. □

9.3.2. Suites arithmético-géométriques

Définition 9.56.

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple 9.57. Les suites arithmétiques de raison p sont des suites arithmético-géométriques particulières (pour $a = 1$ et $b = p$). Les suites géométriques de raison q sont des suites arithmético-géométriques (pour $a = q$ et $b = 0$).

Lemme 9.58.

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. Soit u et v deux suites vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ et $v_{n+1} = av_n + b$. Alors $u - v$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = a(u_n - v_n)$. □

Voici la méthode permettant de déterminer l'expression du terme général u_n lorsque (u_n) est arithmético-géométrique avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

◇◇

Remarque technique 9.59. On commence par chercher une suite constante $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+1} = ar_n + b$, *i.e.* $r = ar + b$. La suite constante égale à $r = \frac{b}{1-a}$ convient. Dans ce cas, le lemme assure que $(u_n - r)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison a, et a donc pour terme général $u_n - r = (u_0 - r)a^n$, puis, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = r + (u_0 - r)a^n$.

On peut en déduire que l'ensemble des suites u vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{b}{1-a} + \lambda \cdot a^n \right)_{n\in\mathbf{N}} \ : \ \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice d'application 9.60. Déterminer le terme général de la suite u telle que $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3 - 2u_n$.

↪ Soit $r \in \mathbf{R}$. On a $r = 3 - 2r$ si et seulement si $r = 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$u_{n+1} - 1 = -2(u_n - 1),$$

donc

$$u_n - 1 = (u_0 - 1)(-2)^n \quad i.e. \quad u_n = 1 - (-2)^n.$$

◇◇

9.3.3. Suites linéaires récurrentes doubles

Définition 9.61.

On appelle **suite linéaire récurrente double** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b)\in\mathbf{K}^2$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n. \tag{$\star$}$$

Une telle suite est entièrement déterminée par la relation $(\star)$ et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.

Proposition 9.62 - Expression dans le cas complexe.

Soit $(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^\star$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par $(\star)$ et la donnée de $(u_0,u_1)\in\mathbf{C}^2$.
Pour déterminer l'expression du terme général u_n d'une telle suite, on commence par considérer son **équation caractéristique**

$$z^2=az+b \tag{E}$$

et le discriminant Δ de cette équation.

- Si $\Delta\neq 0$, alors (E) a deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=\alpha {z_1}^n+\beta {z_2}^n.$$
- Si $\Delta=0$, alors (E) admet une unique solution z_0 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=(\alpha n+\beta){z_0}^n.$$

Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
- Supposons d'abord que l'équation (E) admette deux solutions z_1 et z_2 distinctes.
  - *Analyse.* Supposons qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&u_0\\ \alpha z_1+\beta z_2&=&u_1\end{array}\right.$. Ce système admet une unique solution $(\frac{u_1-z_2u_0}{z_1-z_2},\frac{u_1-z_1u_0}{z_2-z_1})$. Ainsi, (α,β) est déterminé de manière unique par u_0 et u_1.
  - *Synthèse.* Pour tout $n\in\mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$ », où (α,β) est déterminé dans la phase d'analyse.
    Par définition de (α,β), H_0 et H_1 sont vraies.
    Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$ et $u_{n+1}=\alpha z_1^{n+1}+\beta z_2^{n+2}$, donc
    $$\begin{array}{rcl}u_{n+2}&=&au_{n+1}+bu_n\\ &=&a(\alpha z_1^{n+1}+\beta z_2^{n+1})+b(\alpha z_1^n+\beta z_2^n)\\ &=&\alpha z_1^n(az_1+b)+\beta z_2^n(az_2+b)\\ &=&\alpha z_1^{n+2}+\beta z_2^{n+2}\end{array}$$
    car $z_1^2=az_1+b$ et $z_2^2=az_2+b$. Ainsi H_{n+2} est vraie.
    Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n\in\mathbf{N}$, H_n est vraie.
- Supposons que (E) admette une racine double z_0.
  - *Analyse.* Supposons qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\alpha z_0^n+\beta nz_0^n$. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&u_0\\ \alpha z_0+\beta z_0&=&u_1\end{array}\right.$. Ce système a une unique solution $(\alpha,\beta)=(u_0,\frac{u_1-z_0u_0}{z_0})$. Ainsi le couple (α,β) est unique (s'il existe !).

◦ *Synthèse.* Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « $u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$ », où (α, β) est donné dans la phase d'analyse.
On a H_0 et H_1 vraies par définition de (α, β).
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$ et $u_{n+1} = \alpha z_0^{n+1} + \beta(n+1) z_0^{n+1}$. Donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1} + b u_n \\ & = & a(\alpha z_0^{n+1} + \beta(n+1) z_0^{n+1}) + b(\alpha z_0^n + \beta n z_0^n) \\ & = & \alpha z_0^n (a z_0 + b) + \beta n z_0^n (a z_0 + b) + \beta z_0^{n+1} a \\ & = & \alpha z_0^{n+2} + \beta(n+2) z_0^{n+2} \end{array}$$

car $z_0^2 = a z_0 + \beta$ et $z_0 = \frac{a}{2}$. Ainsi H_{n+2} est vraie.
Finalement le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

□

Proposition 9.63 - Expression dans le cas réel.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\star$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par $(\star)$ et la donnée de $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$. Notons Δ le discriminant de l'équation polynomiale (E).

- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions x_1 et x_2 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution x_0 et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\alpha n + \beta) {x_0}^n.$$
- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, et il existe deux constantes α et β réelles telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
La démonstration est très proche de celle qui a permis de passer des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants à valeurs complexes aux solutions à valeurs réelles lorsque les coefficients de l'équation sont réels.

- Si $\Delta > 0$, on sait d'après le cas complexe qu'il existe deux constantes α et β, *a priori* complexes, telles que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$
On a alors $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$. Donc $\alpha = \dfrac{u_1 - x_2 u_0}{x_1 - x_2}$ et $\beta = \dfrac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1}$ (les nombres x_1 et x_2 sont bien différents). Puisque u_0, u_1, x_1 et x_2 sont réels, les deux nombres α et β sont, eux aussi, réels.
- On procède de la même manière si $\Delta = 0$.
- Supposons que $\Delta < 0$. D'après le cas complexe, en notant $r = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ les deux solutions complexes conjuguées de (E), où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on sait qu'il existe deux constantes complexes A et B telles que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = A r^n + B \overline{r}^n = A \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} + B \rho^n \mathrm{e}^{-in\theta}.$$
On sait que $\left\{ \begin{array}{rcll} A + B & = & u_0 & (L_1) \\ Ar + B\overline{r} & = & u_1 & (L_2) \end{array} \right.$

$(L_2) - \overline{r}(L_1)$ donne $A = \dfrac{u_1 - \overline{r}u_0}{r - \overline{r}}$ et $(L_2) - r(L_1)$ donne $B = \dfrac{u_1 - ru_0}{\overline{r} - r} = \overline{A}$ (on sait que $\overline{r} \neq r$ car $r \notin \mathbf{R}$).
Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n(A\mathrm{e}^{in\theta} + \overline{A}\mathrm{e}^{-in\theta}) \\ &= \rho^n(A\mathrm{e}^{in\theta} + \overline{A\mathrm{e}^{in\theta}}) \\ &= \rho^n\ 2\ \mathfrak{Re}(A\mathrm{e}^{in\theta}) \\ &= \rho^n(2\,\mathfrak{Re}(A)\cos(n\theta) - 2\mathfrak{Im}(A)\sin(n\theta)) \\ &= \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = 2\,\mathfrak{Re}(A)$ et $\beta = -2\mathfrak{Im}(A)$. On remarque que α et β sont des réels.

□

Exercice d'application 9.64. On considère la **suite de Fibonacci** $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Déterminer le terme général de F.

↪ L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le **nombre d'or**). D'après la proposition précédente, on peut donc dire qu'il existe un unique couple de réels (α, β) tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à résoudre le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & 0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 & = & 1 \end{array} \right.$. Or

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -\beta \\ \alpha(r_1 - r_2) & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right. .$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Exercice d'application 9.65. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

↪ On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1 - 3n)(-2)^{-n}$.

Exercice d'application 9.66. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

↪ On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sqrt{2}^n(\cos(\frac{n\pi}{4}) - 2\sin(\frac{n\pi}{4}))$.

9.4. Théorèmes d'existence d'une limite

9.4.1. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration

Théorème 9.67 - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $(N_1, N_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que

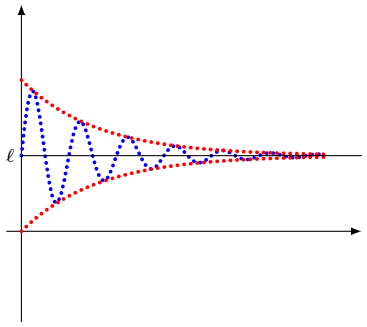
$$\begin{array}{ll} \forall n \geqslant N_1, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon, \\ \forall n \geqslant N_2, & |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \end{array}$$

Soit $n \geqslant \max(N_1, N_2, N)$. On a

$$-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \varepsilon,$$

donc $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et l'on vient de démontrer que v converge vers ℓ. □

Illustration du théorème d'encadrement. Une suite est ici encadrée par deux suites qui convergent vers ℓ.



Exercice d'application 9.68. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ (pour le voir, on factorise les dénominateurs des expressions par n et n^2 respectivement). Le théorème d'encadrement assure alors que u converge vers 1.

Exercice d'application 9.69. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, posons $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Déterminer, si elle existe, la limite de u.

↪ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Or la suite constante égale à x et la suite $\left(x - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers x, donc le théorème d'encadrement permet de conclure que u converge vers x.

Exercice d'application 9.70. Démontrer que le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 converge vers 0.

↪ Soit u une suite bornée et v une suite convergente. Il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $|u| \leqslant M$, donc, $|uv| \leqslant M|v|$. Or $M|v|$ converge vers 0. Le théorème d'encadrement permet de conclure $u \cdot v$ converge vers 0.

Théorème 9.71 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend aussi vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbf{R}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $N_A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_A,\ u_n \geqslant A$. On a alors pour tout $n \geqslant N_A$, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

2. Même méthode. □

Exercice d'application 9.72. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Puisque, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La somme de droite étant égale à $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème de minoration assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice d'application 9.73. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Étudier la limite de $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et de $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$.

↪ On a pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

d'où, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$. Donc le théorème de minoration fournit $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et, avec le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$.

9.4.2. Convergence des suites monotones bornées

Théorème 9.74 - Théorème de la limite monotone.

Soit u une suite réelle.

1. Supposons u croissante.
   (a) Si u est majorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
   $$\ell = \sup\{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
   (b) Si u n'est pas majorée, alors u diverge vers $+\infty$.
2. Supposons u décroissante.
   (a) Si u est minorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
   $$\ell = \inf\{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant \ell$.
   (b) Si u n'est pas minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration.
On ne traite que le cas où u est croissante.

(a) Supposons u majorée. Notons $A = \{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$. A est non vide car il contient u_0, et majoré (car u est majorée). Ainsi A admet une borne supérieure, notée ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $\ell - \varepsilon < x$. Comme $x \in A$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x = u_N$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geqslant N$, $\ell - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell$ (car ℓ majore A). Ainsi $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et on a montré que u converge vers ℓ.

(b) Supposons u non majorée. Ainsi,
$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N}, \quad u_n > M.$$
Soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N > A$. Puisque la suite u est croissante, on en déduit que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$ et on a montré que u tend vers $+\infty$.

□

Corollaire 9.75.

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Notons que le théorème de la limite monotone permet de démontrer qu'une suite admet une limite, mais il ne permet pas de calculer celle-ci !

Exercice d'application 9.76. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Étudier la convergence de la suite u.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, donc u est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,
$$u_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} + 1 \leqslant 2.$$
Donc la suite u est majorée par 2. Le théorème de la limite monotone assure alors que u converge.

Remarque : On peut calculer (mais c'est plus difficile) la limite de cette suite. Elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

9.4.3. Suites adjacentes

Définition 9.77.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont **adjacentes** si, et seulement si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (ou l'inverse).
2. La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Lemme 9.78.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $w_n = v_n - u_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}),$$

et, comme v est décroissante et u est croissante, $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ (somme de deux nombres négatifs). Ainsi w est décroissante.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque w est décroissante, on a pour tout $k \geqslant n$, $w_k \leqslant w_n$ puis, en faisant tendre k vers $+\infty$, $w_n \geqslant 0$. □

Théorème 9.79 - Convergence des suites adjacentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles avec u croissante et v décroissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes alors :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent ;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (on note ℓ cette limite commune) ;
3. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration. 1. Avec le lemme et les variations de u et v, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0. \qquad (\star)$$

Ainsi u est croissante et majorée donc, d'après la théorème de la limite monotone, elle converge vers ℓ_1. De même, v est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ_2.

2. Par opération, $u - v$ converge vers $\ell_1 - \ell_2$. Or, $u - v$ converge vers 0 par hypothèse. Par unicité de la limite, on conclut que $\ell_1 - \ell_2 = 0$, *i.e.* $\ell_1 = \ell_2$.
3. Le théorème de la limite monotone assure par ailleurs que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. □

Exemple 9.80. Pour $x \in \mathbf{R}$, les suites des valeurs approchées par défaut et par excès de x, définies par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n},$$

forment deux suites adjacentes convergeant vers x.

Exercice d'application 9.81. Justifier que les suites u et v définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

convergent vers une même limite.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ &\quad - \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc u est croissante. De plus,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leqslant 0,$$

donc v est décroissante. Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $u - v$ converge vers 0. Ainsi u et v sont adjacentes. On en déduit que u et v convergent vers la même limite.

9.5. Suites de nombres complexes

Définition 9.82.

Une **suite de nombres complexes** est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$. On la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbf{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, adjacentes... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes, de même que les théorème de la limite monotone et d'encadrement !). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 9.83.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **bornée** si, et seulement si, la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Proposition 9.84.

Si une suite complexe converge, alors sa limite est unique.

Démonstration.
On utilise la même démonstration que pour les suites réelles, en remplaçant valeur absolue par module. □

Définition 9.85.

On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0,$$

(c'est la limite d'un module, donc d'une suite réelle). Autrement dit, z converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque 9.86. Dire qu'une suite complexe tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a pas de sens.

Proposition 9.87.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbf{C}$.
La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$.

Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $b = \mathfrak{Im}(\ell)$.

- Supposons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$|\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| = |\,\mathfrak{Re}(z_n - \ell)| \leqslant |z_n - \ell|$$
et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| = 0$ c'est-à-dire que la suite $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a. On montrerait de même que $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers b.
- Supposons que les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire
$$|z_n - (a+ib)| = |(\mathfrak{Re}(z_n) - a) + i(\mathfrak{Im}(z_n) - b)| \leqslant |\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| + |\,\mathfrak{Im}(z_n) - b|.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathfrak{Im}(z_n) - b| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - (a+ib)| = 0$ donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. □

Remarque 9.88. Les résultats obtenus sur les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbf{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes. Par exemple, les opérations sur les limites restent valables : on le démontre de la même manière que pour les suites réelles, en remplaçant les valeurs absolues par des modules.

Proposition 9.89.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ un nombre complexe.

1. La suite $(\overline{z_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.
2. La suite $(|z_n|^2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|^2$.
3. La suite z est bornée.

Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $b = \mathfrak{Im}(\ell)$.

1. Les suites $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Comme pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\mathfrak{Re}(\overline{z_n})=\mathfrak{Re}(z_n)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z_n})=-\mathfrak{Im}(z_n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathfrak{Re}(\overline{z_n})=a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathfrak{Im}(\overline{z_n})=-b$. D'après la proposition précédente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{z_n}=a-ib=\overline{\ell}$.
2. La suite $(z_n\overline{z_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell\overline{\ell}$ par produit et en utilisant 1.
3. On utilise la même démonstration que pour les suites réelles, en remplaçant valeur absolue par module. □

9.6. Relations de comparaison pour les suites

9.6.1. Domination et négligeabilité

Définition 9.90.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes. On dit que :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **dominée** par la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée et un rang $n_0\in\mathbf{N}$ tels que pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n=v_nb_n$.
   On note alors $u_n=\mathrm{O}(v_n)$ et on lit «u_n est un grand O de v_n».
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et un rang $n_0\in\mathbf{N}$ tels que pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n=v_n\varepsilon_n$.
   On note alors $u_n=\mathrm{o}(v_n)$ et on lit «u_n est un petit o de v_n».

On peut, de manière immédiate, réécrire ces définitions comme dans la proposition suivante (ces nouvelles caractérisations sont à connaître car elles sont très utiles en pratique) :

Proposition 9.91 - Caractérisation de o et O.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.

1. (a) u est dominée par v si et seulement si il existe $M\in\mathbf{R}_+$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ |u_n|\leqslant M|v_n|$.
   (b) Si de plus v ne s'annule pas au delà d'un certain rang n_1, alors u est dominée par v si et seulement si pour tout $n\geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|\leqslant M$.
2. Si v ne s'annule pas au delà d'un certain rang n_1, alors u es négligeable devant v si et seulement si $\dfrac{u}{v}$ converge vers 0.

Remarque 9.92.

- $u_n=\mathrm{O}(1)$ signifie que (u_n) est bornée.
- $u_n=\mathrm{O}(0)$ signifie que u est une suite nulle à partir d'un certain rang.
- $u_n=\mathrm{o}(1)$ signifie que u converge vers 0.
- $u_n=\mathrm{o}(0)$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang.

Exemple 9.93.

- $n=\mathrm{o}\big(n^2\big)$ et $\dfrac{1}{n^2}=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Plus généralement, si $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$ avec $\alpha<\beta$, alors $n^\alpha=\mathrm{o}\big(n^\beta\big)$.
- On a $n^{3/2}\cos(1/n)=\mathrm{O}\big(n^{3/2}\big)$ car pour tout $n\geqslant 1$, $\left|\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^{3/2}}\right|=|\cos(1/n)|\leqslant 1$.
- On a $n^{3/2}\cos(1/n)=\mathrm{o}\big(n^2\big)$ car pour tout $n\geqslant 1$, $\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^2}=\dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}=0$ puisque pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$, $\dfrac{-1}{\sqrt{n}}\leqslant\dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

9.6.2. Propriétés des o et O

La relation O :

- est réflexive (pour tout $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 \times v_n$ et $(1)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc $u_n = \mathrm{O}(u_n)$) ;
- n'est pas symétrique ($n = \mathrm{O}\big(n^2\big)$ mais $n^2 \neq \mathrm{O}(n)$) ;
- n'est pas antisymétrique ($\frac{n}{2} = \mathrm{O}\big(\frac{2n}{3}\big)$ et $\frac{2n}{3} = \mathrm{O}\big(\frac{n}{2}\big)$, mais $\frac{n}{2} \neq \frac{2n}{3}$ pour $n \in \mathbf{N}$) ;
- est transitive (si $u, v, w \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ avec $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors il existe (α_n) et (β_n) bornées telles que, pour n assez grand, $u_n = \alpha_n \times v_n$ et $v_n = \beta_n \times w_n$, donc $u_n = (\alpha_n\beta_n) \times w_n$, donc $(\alpha_n\beta_n)$ est bornée, puis $u_n = \mathrm{O}(w_n)$).

La relation o :

- n'est pas réflexive ($1 \neq \mathrm{o}(1)$ car $\frac{1}{1}$ ne tend pas vers 0) ;
- n'est pas symétrique ;
- n'est pas antisymétrique ;
- est transitive.

Proposition 9.94.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Démonstration.
Laissé en exercice. □

Proposition 9.95.

Soient $u, v, w, t \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

1. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{O}(w_n)$.
   Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{o}(w_n)$.
2. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{O}(w_n t_n)$.
   Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n t_n)$.

Exercice d'application 9.96. Montrer que $n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(n) = \mathrm{O}(n)$.

↪ On a $\ln(n) = \mathrm{o}(n)$ donc $\ln(n) = \mathrm{O}(n)$. Comme $n\sin(\frac{1}{n}) = \mathrm{O}(n)$, on peut écrire $n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(n) = \mathrm{O}(n)$.

Exercice d'application 9.97. Montrer que $n\ln(n)\sin(\frac{1}{n}) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$.

↪ $n\sin(1/n) = \mathrm{O}(n)$ et $\ln(n)\mathrm{o}(n)$ donc $n\ln(n)\sin(1/n) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$.

Proposition 9.98 - Croissances comparées.

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, soit $q \in]1\,;+\infty[$. Alors

$$q^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\Big(\ln^\beta n\Big), \quad \ln^\beta n = \mathrm{o}(n^\alpha), \quad n^\alpha = \mathrm{o}(q^n), \quad q^n = \mathrm{o}(n!), \quad n! = \mathrm{o}(n^n).$$

Remarque 9.99. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$ (notation privilégiée dans d'autres sciences), on a donc

$$\frac{1}{n!} \ll q^{-n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Démonstration.
Toutes ces relations sont des réécritures du théorème de croissance comparée (en notant que $q = \mathrm{e}^{\ln(q)}$), sauf $q^n = o(n!)$, avec $q > 1$ et $n! = o(n^n)$.

- Posons $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Une récurrence aisée permet alors de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u_N}{2^{n-N}}$. Puisque $\dfrac{u_N}{2^{n-N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient par encadrement que u converge vers 0.

- De même, posons $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} < \frac{1}{2}.$$

  Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On conclut alors comme précédemment.

□

Exemple 9.100.

- $n^2 = o(n^4)$
- $\dfrac{1}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- $(-1)^n = o(n)$.
- $(\ln(n))^3 = o(n)$
- $n^3 = o(\mathrm{e}^n)$.

Corollaire 9.101.

Pour tout $\gamma > 0$, et tout $\beta > 0$, $n^\beta = o(\mathrm{e}^{\gamma n})$ et $\mathrm{e}^{-\gamma n} = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

9.6.3. Suites équivalentes

Définition 9.102.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et un rang n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n a_n$.
On note alors $u_n \sim v_n$, on lit «u_n est équivalente à v_n».

On obtient immédiatement la caractérisation suivante, très utile en pratique :

Proposition 9.103 - Caractérisation de $\sim$.

Soit $u, v \in \mathbf{K}^N$ telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1.$$

⚠ **Attention** ⚠. Écrire $u_n \sim 0$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang !! Donc si vous trouvez qu'une suite est équivalente à 0, **il y a de très (TRÈS) fortes chances qu'il y ait une erreur**.

Exemple 9.104.

On a $n + \ln(n) \sim n$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+\ln(n)}{n} = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice d'application 9.105. Montrer que $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ puis $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$.

Proposition 9.106 - Lien avec o et O.

Soit $u, v \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ avec v qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1. $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$.

Démonstration.
Notons n_0 le rang à partir duquel v ne s'annule pas.

1. $$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \\ &\iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)\,. \end{aligned}$$
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 1, alors $\dfrac{u}{v}$, donc u, est non nulle à partir d'un certain rang n_1 et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_1}$ converge vers 1, donc $\dfrac{u}{v}$ est bornée. □

Remarque 9.107. On peut aussi démontrer la proposition précédente sans supposer que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang (mais c'est un peu plus pénible à écrire). Par exemple, pour le point numéro 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 1, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = v_n a_n \\ &\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 1, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = (1-a_n)v_n \\ &\iff \exists (\epsilon)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = \epsilon_n v_n \\ &\iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n) \end{aligned}$$

Pour toute la suite, on suppose que les suites manipulées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Notation 108. Si le terme général d'une suite (u_n) s'écrit $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n = \mathrm{o}(v_n)$, on peut écrire $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ (et on a alors $u_n \sim v_n$).

Exemple 9.109. $\ln(n) = o(n)$ donc $n + \ln(n) \sim n$.

Proposition 9.110.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. Soient $u, v, w \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

- Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et, par opération sur les limites, $\dfrac{v_n}{w_n} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \cdot \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim w_n$. □

Proposition 9.111 - Opérations avec $\sim$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}, (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ quatre suites réelles.

1. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$.
2. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{x_n}$.
3. Si (u_n) et (v_n) sont strictement positives au delà d'un certain rang, et si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration.
1. On a $\dfrac{u_n \cdot v_n}{w_n \cdot x_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \cdot \dfrac{v_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. On a $\dfrac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{x_n}} = \dfrac{u_n}{v_n} \cdot \dfrac{x_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. On a $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où le résultat. □

Exercice d'application 9.112. Montrer que $\binom{n}{6} \sim \dfrac{n^6}{720}$.

↪ Soit $j \in \mathbf{N}$. On a $n - j \sim n$, donc

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!}\prod_{j=0}^{5}(n-j) \sim \frac{1}{6!}\prod_{j=0}^{5} n = \frac{n^6}{720}.$$

Remarque : En DS il faudrait rédiger mieux que cela ☺.

⚠ **Attention** ⚠**.** Les remarques suivantes sont extrêmement importantes. Les maîtriser vous évitera bien des erreurs !

1. **On ne peut ni ajouter, ni soustraire, les équivalents.**
   Par exemple, $n + 1 \sim n + 2$ et $-n \sim -n$, et pourtant 1 n'est pas équivalent à 2.
2. **On ne compose pas les équivalents**.
   Si f est une fonction (même continue sur $\mathbf{R}$) et si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$. Posons par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$ et $f = \exp$. On a $u_n \sim v_n$, mais

   $$\frac{f(u_n)}{f(v_n)} = \mathrm{e}^{n^2+n-n^2} = \mathrm{e}^{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   donc $f(u_n) \neq f(v_n)$.

3. **Lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant.**
   Par exemple, $1+\frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ n'est pas équivalent 1 (en effet, grâce à la limite classique $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$, on a donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$).

Proposition 9.113.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites équivalentes.

1. Si la suite (v_n) est strictement positive (respectivement négative) au delà d'un certain rang, alors (u_n) est strictement positive (resp. négative) au delà d'un certain rang.
2. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. 1. Comme u et v sont équivalentes, on a $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$, on a $\frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{1}{2}$, et u et v ont même signe strict.

2. Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On a $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par opérations sur les limites. □

9.6.4. Équivalents classiques

Proposition 9.114.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_n \sim \ell$.

Proposition 9.115.

Si $P : x \longmapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est une fonction polynomiale dont le coefficient a_p est non nul, alors $P(n) = a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 \sim a_p n^p$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 = \mathrm{o}(a_p n^p)$. □

Les équivalents donnés dans la proposition suivante sont à connaître **par cœur !**

Proposition 9.116 - Équivalents classiques.

Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas au delà d'un certain rang. Alors chacune des suites suivantes est bien définie au delà d'un certain rang, et

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $1-\cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
- $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$.
- $1-\mathrm{ch}(u_n) \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

Démonstration.
On utilise le fait que si pour une fonction f, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$. □

Exercice d'application 9.117. Déterminer la limite de $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

↪ On a $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n})}$ et $-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$, donc $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -1$, puis
$n\ln\left(n-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Or $\lim\limits_{x\to-1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1}$.
Donc, par composition des limites, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Remarque 9.118. Attention, dans l'exercice précédent il peut être tentant de composer des équivalents (ce qui est interdit !!!). Vous remarquerez que nous ne l'avons pas fait : nous avons composé des limites, ce qui est licite.

Exercice d'application 9.119. Déterminer un équivalent simple de $(\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})))_{n\in\mathbf{N}}$.

↪ On a :

$$\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) = \ln\left(\mathrm{e}^{-n}\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-n}) + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = -n + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right).$$

Or $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(\mathrm{e}^{-n}) \sim \mathrm{e}^{-n}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}} = 1$, et ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right)}{-n} = 0$, d'où $\ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = \mathrm{o}(-n)$. Ainsi $-n + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = -n + \mathrm{o}(-n)$. Finalement, $\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) \sim -n$.

Remarque 9.120. Dans l'exercice précédent, il peut être tentant d'ajouter des équivalents (ce qui est interdit !!!). Vous remarquerez que nous ne l'avons pas fait : nous avons utilisé un petit o. Une méthode alternative aurait été de factoriser l'expression :

$$\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) = -n\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right)\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \text{ donc } \frac{\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n}))}{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

9.7. Etude des suites récurrentes

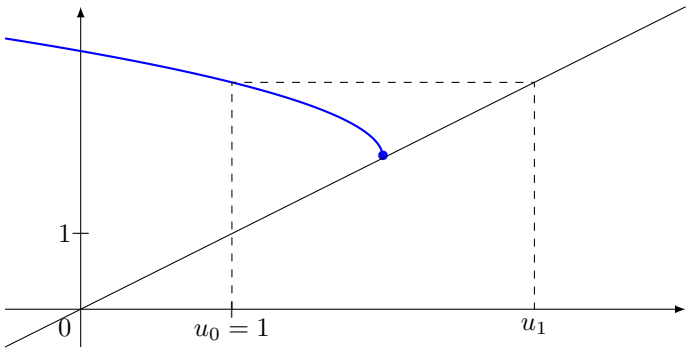
Dans ce paragraphe, nous allons étudier les suites définies par la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \tag{$\star$}$$

où f est une fonction réelle.

9.7.1. Stabilité

Il n'est pas du tout automatique que la suite définie par $(\star)$ existe. La définition par récurrence nécessite qu'à chaque étape le terme u_n soit dans le domaine de définition de f. Par exemple, on ne peut pas définir de suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{2 - u_n}$. En effet, on aurait $u_1 = f(u_0) = 3$ et la relation ne permet pas de définir u_2 puisque $f : x \longmapsto 2 + \sqrt{2 - x}$ n'est pas définie en 3.



Définition 9.121.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{R}$. Une partie I de D est dite **stable** par f si, et seulement si, $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall x \in I,\ f(x) \in I.$$

Exemple 9.122.

- L'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$ est stable par la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ car pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$.
- L'intervalle $[0\,;1]$ est stable par la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ car pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1.$$

Proposition 9.123.

Si I est une partie stable par f et si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et tous ses termes appartiennent à I.

Démonstration.
Pour le démontrer, on procède par récurrence :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété « u_n existe **et** $u_n \in I$ ».

- u_0 existe et $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. $u_n \in I \subset D$ donc $f(u_n)$ est bien défini et u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n \in I$, $u_{n+1} \in f(I)$ donc $u_{n+1} \in I$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n \in I$. □

Remarque 9.124. Il est évident que si f est définie sur $\mathbf{R}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

Exercice d'application 9.125. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+$ et la relation : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$, est bien définie et que tous ses termes sont positifs ou nuls.

↪ Soit $I = [0, +\infty[$ et $f : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, donc I est une partie stable par f.

Comme $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont dans I, donc sont positifs ou nuls.

Exercice d'application 9.126. Montrer qu'il existe une et une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + \sqrt{u_n}).$$

↪ D'une part, $2 \in \mathbf{R}_+$. D'autre part, l'intervalle $\mathbf{R}_+$ est stable par la fonction $x \longmapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ car pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $1 + \sqrt{x} \geqslant 1$, donc $\ln(1 + \sqrt{x}) \in \mathbf{R}_+$.

Pour la suite de ce cours, on suppose que la partie I de $\mathbf{R}$ est stable par f et que $u_0 \in I$ (et donc que tous les termes de la suite (u_n) sont dans I).

9.7.2. Convergence

Parfois, c'est simple !

◇◇

Remarque technique 9.127. Pour déterminer la limite d'une suite définie par $(\star)$ (une fois qu'on a démontré que cette suite est bien définie, avec un argument de stabilité !), on pourra essayer d'adopter la stratégie suivante :

1. déterminer le sens de variation de u ;
2. appliquer le théorème de la limite monotone et supposer que la suite converge (en espérant obtenir soit une contradiction, soit la valeur de la limite).

Exercice d'application 9.128. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$, diverge vers $+\infty$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} \geqslant 0$, donc u est croissante et possède une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone. Par l'absurde, faisons l'hypothèse que $\ell \in \mathbf{R}$. On a $\lim\limits_{x\to\ell} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^\ell$, donc $\ell = \lim_{n\to+\infty}(u_n + \mathrm{e}^{u_n}) = \ell + \mathrm{e}^\ell$ et ainsi $\mathrm{e}^\ell = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $\ell = +\infty$.

Exercice d'application 9.129. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ converge vers 0.

↪ L'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$ est stable par $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et $u_0 = 1 \in \mathbf{R}_+^\star$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} \leqslant 0.$$

Ainsi u est décroissante et positive, donc elle converge vers une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone. On a alors :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n^2} = \frac{\ell}{1+\ell^2},$$

donc

$$\ell - \frac{\ell}{1+\ell^2} = \frac{\ell^3}{1+\ell^2} = 0,$$

et ainsi $\ell = 0$.

◇◇

Si c'est plus compliqué, on pourra utiliser les résultats suivants.

Proposition 9.130.

Soit $f : I \longrightarrow I$ (de sorte que I soit stable par f) et u définie par $(\star)$.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant x$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Démonstration. 1. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ puisque I est stable par f). Il s'ensuit que u est croissante. □

Proposition 9.131.

Soit $f : I \longrightarrow I$ et u définie par $(\star)$.
Si u converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un **point fixe** de f, *i.e.*

$$f(\ell) = \ell.$$

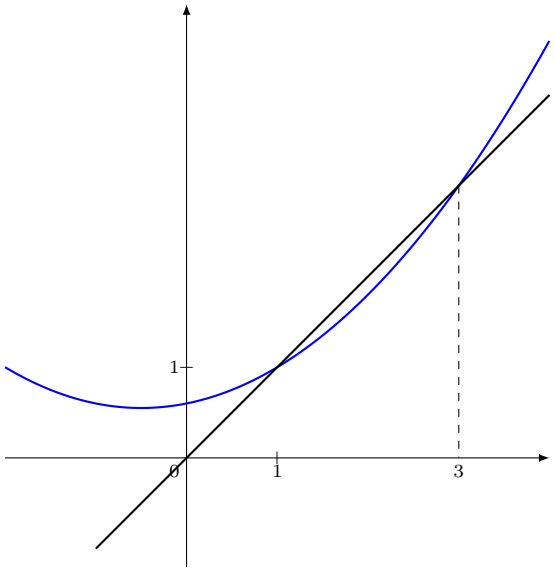
Démonstration.
A lire après avoir fait le chapitre sur la continuité.
Comme f est continue en ℓ, $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Enfin pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc en effet $f(\ell) = \ell$. □

Exercice d'application 9.132. Soit u une suite pour laquelle, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n + 3}{5}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\mathbf{R}_+$ est stable par f.
2. Déterminer la nature de u et sa limite éventuelle.

↪

1. On a f strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ en tant que somme de fonctions strictement croissante. Par ailleurs f est continue et $f(0) = \frac{3}{5}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc le théorème de la bijection assure que $f(\mathbf{R}_+) = \left[\frac{3}{5}\,;\,+\infty\right[$.
2. Avant de commencer, on peut s'aider d'un graphique et faire quelques conjectures sur le comportement de la suite.



Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On remarque que

$$f(x) - x = \frac{(x-1)(x-3)}{5}.$$

Il s'ensuit

x	0		1		3		$+\infty$
f	$\frac{3}{5}$	↗	1	↗	3	↗	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit beaucoup d'informations sur ce tableau : le signe de $x \longmapsto f(x)-x$, mais aussi que les intervalle $[0\,;\,1[$, $]1\,;\,3[$ et $]3\,;\,+\infty[$ sont stables par f (essentiel pour pouvoir lier le signe de $f-\mathrm{Id}$ à la monotonie de u). Ceci nous conduit à distinguer les cas suivants :

- Supposons $u_0 \in [0\,;\,1[$. Puisque $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [0\,;\,1[$ et $[0\,;\,1[$ est stable par f, on a u croissante. Or u est majorée par 1, donc u converge. Les seuls points fixes de f étant 1 et 3, on en déduit que u converge vers 1 par continuité de f.
- Si $u_0 = 1$, alors la suite est constante égale à 1. En particulier, elle converge vers 1.
- Supposons $u_0 \in]1\,;\,3[$. Puisque $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in]1\,;\,3[$ et $]1\,;\,3[$ est stable par f, on obtient que u est décroissante. De plus u est minorée par 1, donc u converge vers $\ell \in [1\,;\,3[$ d'après le théorème de la limite monotone. Donc, par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_0 = 3$, alors la suite est constante égale à 3. En particulier, elle converge vers 3.
- Supposons $u_0 > 3$. On a $]3\,;\,+\infty[$ stable par f et pour tout $x > 3$, $f(x) \geqslant x$, donc u est croissante. Le théorème de la limite monotone assure alors que u admet une limite $\ell > 3$ (par croissance de u). Comme f ne possède pas de point fixe dans $]3\,;\,+\infty[$, on en déduit que $\ell = +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

En résumé, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u_0 \in [0\,;\,3[\\ 3 & \text{si} \quad u_0 = 3 \\ +\infty & \text{si} \quad u_0 > 3 \end{cases}$.

En dernier recours, on pourra s'intéresser aux résultats suivants (qui sont à démontrer à chaque utilisation, par récurrence).

Proposition 9.133.

Soit $f : I \longrightarrow I$ et u définie par $(\star)$.

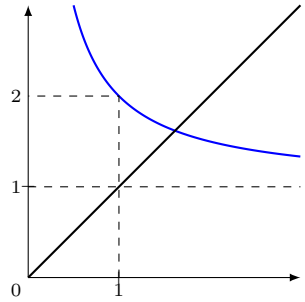
1. Si f est croissante, alors u est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.
2. Si f est décroissante sur D, $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones de sens contraire. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2.

Démonstration. 1. Supposons f croissante et $u_0 \geqslant u_1$. Montrons par récurrence que u est croissante, en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».
$u_0 \geqslant u_1$ par hypothèse, donc H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vrai. On a $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ par croissance de f et en utilisant H_n. Par conséquent, H_{n+1} est vraie et le principe de récurrence permet de conclure.
Si cas $u_0 \leqslant u_1$ est similaire.

2. Supposons f décroissante avec $u_0 \leqslant u_2$. Alors $f \circ f$ est croissante et $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante d'après le point précédent.
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et en utilisant la décroissance de f : $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$, donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Le cas $u_0 \geqslant u_2$ est similaire. □

Exercice d'application 9.134. On note u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. Donner la nature de u.

$\hookrightarrow$ Posons $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.



- L'intervalle $[1\,;2]$ est stable par f et $u_0 \in [1\,;2]$, donc la suite u est bien définie (et bornée par 1 et 2).
- Ensuite, f est décroissante sur le domaine stable $[1\,;2]$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones de sens contraires. La démonstration est donnée avant. Bornées, ces deux suites sont ainsi convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'.

  Notons qu'ici le sens des variations des suites n'est pas utile. Mais on pourrait facilement l'obtenir avec le signe de $u_2 - u_0$.
- A présent, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ étant récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$, leurs limites ℓ et ℓ' sont des points fixes de $f \circ f$. Soit $x \in [1\,;2]$.

$$f \circ f(x) = x \iff 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x \iff x^2 - x - 1 \iff x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$. On en déduit finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Chapitre 10

Systèmes linéaires

On a donc autant d'équations linéaires qu'il y a d'inconnues à trouver ; les valeurs de ces inconnues seront obtenues par l'élimination ordinaire.

Voyons maintenant si cette élimination est toujours possible, ou si la solution peut quelquefois devenir indéterminée, ou même impossible.

Carl Friedrich Gauss.

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n et p sont des entiers naturels.

10.1. Présentation du problème

Définition 10.1.

On appelle **équation linéaire** à p inconnues toute équation du type

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

d'**inconnues** x_1, x_2,..., x_p éléments de $\mathbf{K}$, et avec a_1, a_2, ..., a_p, b des éléments de $\mathbf{K}$ fixés. On appelle a_1, a_2,..., a_p les **coefficients** et b le **second membre**.

Exemple 10.2.

- Prenons $p = 2$, et notons x et y les inconnues, a, b les coefficients réels et $c \in \mathbf{R}$ le second membre. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, dans le plan muni d'un repère orthonormé (direct) $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ est une droite de vecteur directeur $-b\vec{u} + a\vec{v}$ et de vecteur normal $a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Prenons $p = 3$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. L'équation $ax + by + cz = d$ d'inconnue (x, y, z) correspond à l'équation d'un plan si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, de vecteur normal $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$, si l'on se place dans un repère orthonormé (direct) $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Définition 10.3.

On appelle **système** de n équations à p inconnues tout système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& b_n \end{array}\right. \quad \text{(S)}$$

où $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{K}$. Un tel système est d'**inconnue** $(x_1, ..., x_p) \in \mathbf{K}^p$.
Un système dont le second membre est nul est dit **homogène**.

Exemple 10.4.

- Un système linéaire de n équations à 2 inconnues correspond (en général) à l'intersection de n droites du plan. Cette interprétation permet de comprendre qu'un tel système peut n'avoir aucune solution (si les droites sont parallèles), une unique solution (si les droites sont concourantes : la solution est alors le couple de coordonnées du point d'intersection des droites) ou une infinité de solution (si les droites sont confondues : les solutions décrivent les coordonnées de tous les points de cette unique droite).
- Un système linéaire de n équations à 3 inconnues correspond (en général) à l'intersection de n plans de l'espace, qui peut être vide (si les plans sont parallèles), une droite (si les plans s'intersectent tous en la même droite) ou un plan.

Définition 10.5.

On peut associer au système (S) un tableau de nombres, appelé **matrice associée** à (S) :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On peut également lui associer un autre tableau, avec le second membre, appelé **matrice augmentée** de (S) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right).$$

Exemple 10.6. Considérons le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & & & = & 1 \\ & & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$.

La matrice qui lui est associée est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice augmentée qui lui est associée est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

10.2. Opérations élémentaires

On considérera le système suivant, désignant par L_1,..., L_n les différentes lignes du système, de sa matrice ou de sa matrice augmentée :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \quad (L_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& b_n \quad (L_n) \end{array}\right.$$

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes du système (resp. de sa matrice, resp. de sa matrice augmentée) toute opération d'un des trois types suivants.

1. Échange de deux lignes i et j, qu'on note $L_1 \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplication d'une ligne i par un nombre non nul $\lambda \in \mathbf{K}^\star$, qu'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajout à une ligne i un multiple $\alpha \in \mathbf{K}$ d'une autre $j \neq i$, qu'on note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Exemple 10.7. On considère le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 4z &=& 5 \\ -x + 5y - z &=& 1 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Après l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$, le système devient $\left\{\begin{array}{rcl} 7y + 2z &=& 7 \\ -x + 5y - z &=& 1 \end{array}\right.$.

Définition 10.8.

- On dit que deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont **équivalents** si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $(S_1) \iff (S_2)$.
- Deux matrices A et B sont dites **équivalentes** si l'on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \underset{L}{\sim} B$.

Proposition 10.9.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Démonstration.
On suppose que les systèmes ont n lignes pour p inconnues. Soit i et j deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

- L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ne change pas l'ensemble des solutions.
- Soit $\lambda \in \mathbf{K}^\star$. Considérons l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Notons S_1 le système initial et S_2 le système obtenu à partir de S_1 par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
  - Soit $(x_1, ..., x_n)$ une solution de S_1. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

    $$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,p}x_p = b_k.$$

    En particulier, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ avec $k \neq i$,

    $$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,p}x_p = b_k.$$

    et pour la ligne i s'écrit

    $$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i,$$

    ce qui devient après multiplication par λ,

    $$\lambda a_{i,1}x_1 + \lambda a_{i,2}x_2 + \cdots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i.$$

    Ainsi, $(x_1, ..., x_n)$ vérifie S_2.

  - Le réciproque se mène de manière similaire en considérant plutôt une multiplication par $\frac{1}{\lambda}$.
- L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ est semblable. □

Expliquons sur un exemple :

Exemple 10.10. On considère le système d'équations d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (1) \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 & (2) \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (3) \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & (4) \end{array} \right.$$

On soustrait à la deuxième ligne de (S) deux fois la première ligne. On obtient :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (1') \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 & (2') \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (3') \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & (4') \end{array} \right.$$

- Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une solution de (S). Si (1), (2), (3), (4) sont vraies, alors (1'), (3') et (4') sont vraies. De plus,

  $$3x_2 - 3x_3 + x_4 = (2x_1 - x^2 - x_3 - x_4) - 2(x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4) = 3 - 2 \times 1 = 1,$$

  donc (2') est vraie aussi.
- Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une solution de (S'). Alors (1), (3) et (4) sont vraies. De plus,

  $$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2(x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4) + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 + 2 \times 1 = 3.$$

  donc (2) est vraie aussi.
- Finalement, (S) et (S') sont équivalents.

On écrit cette équivalence à l'aide de matrices comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right),$$

Exemple 10.11. On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y + 4z & = & 5 \\ -x + 5y - z & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 7y + 2z & = & 7 \\ -x + 5y - z & = & 1 \end{array} \right. \iff \exists t \in \mathbf{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4 - \frac{17}{7}t \\ y & = & 1 - \frac{2}{7}t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(4 - \frac{17}{7}t, 1 - \frac{2}{7}t, t\right) \,:\, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

10.3. Méthode de Gauss

10.3.1. Système triangulaire, matrice échelonnée

Définition 10.12.

Un système est dit **triangulaire** (ou **échelonné**) s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,r}x_r & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,r}x_r & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & a_{r,r}x_r & + & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

Définition 10.13.

Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes.

1. Si une de ses lignes est nulle, alors les suivantes le sont aussi.
2. Si à la ligne i, le premier coefficient non nul est situé à la colonne j, alors le premier coefficient non nul (s'il existe) de la ligne $i+1$ est situé sur une colonne d'indice strictement supérieur à j.

On appelle alors **pivots** de la matrice les premiers coefficients non nuls de chaque ligne (s'ils existent).

Exemple 10.14. La matrice suivante est échelonnée par lignes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ses pivots sont 2, -1 et 2.

Exercice d'application 10.15. Les matrices suivantes sont-elles échelonnées par lignes ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\hookrightarrow$ Les matrices A et B sont échelonnées par lignes, mais les matrices C et D ne le sont pas.

◇◇◇

Remarque technique 10.16. Il est simple de résoudre un système échelonné par « remonté » (on part de la dernière ligne vers la première).

Exercice d'application 10.17. Résoudre le système échelonné suivant, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x + y + 2z + 3t & = & 4 \\
y + z - t & = & 0 \\
2z + 2t & = & 8 \\
t & = & 2
\end{array}\right.$$

$\hookrightarrow$ On obtient aisément que l'unique solution est le quadruplet $(-6, 0, 2, 2)$.

◇◇

Pour résoudre un système (S), l'idée va donc être d'essayer de faire subir à (S) des opérations élémentaires pour obtenir un système échelonné.

Notons que la résolution est encore plus simple si les pivots sont égaux à 1.

Définition 10.18.

Une matrice est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est échelonnée par lignes, si tous ses pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls dans leur colonne.

Exemple 10.19. La matrice suivante est échelonnée réduite par ligne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 13 & 0 & -19 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

10.3.2. Description de l'algorithme du pivot de Gauss

On décrit ci-dessous un algorithme permettant de passer par une suite d'opérations sur les lignes à un système échelonné. On procède en six étapes :

1. On commence par réordonner les inconnues du système pour obtenir une écriture similaire à celle de (S). Les inconnues sont donc alignées en « colonnes », chaque colonne ne faisant apparaître qu'une seule inconnue (que des « x », ou que des « y »...).
2. On considère la « colonne » la plus à gauche ne contenant pas déjà un pivot encadré : c'est dans cette colonne que l'on va choisir notre nouveau pivot. La première fois que cette étape a lieu, il s'agit de la première colonne.
3. On choisit comme pivot un coefficient non nul P de cette colonne dans une ligne qui suit celle qui contient le précédent pivot encadré (n'importe où dans la première colonne la première fois que cette étape a lieu), et on encadre ce choix. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément dans la ligne succédant à celle contenant le précédent pivot (on l'amène donc à la première ligne si l'on effectue cette étape pour la première fois). On encadre le pivot.

   ⚠ **Attention** ⚠**.** Lors du choix du pivot, on privilégie toujours les coefficients dont on est certain qu'ils sont non nuls (ceux qui ne contiennent aucun paramètre).

   En pratique, avec des coefficients entiers, on a toujours intérêt à choisir comme pivot un coefficient dont la valeur absolue est la plus petite possible. Les meilleurs pivots sont les 1 et les -1.
4. Par des opérations élémentaires sur les lignes du type $L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda L_k$ (où k est la ligne du pivot et α est non nul), on fait disparaître les inconnues de la colonne du pivot dans les lignes qui sont **en dessous** de la ligne du pivot. En pratique :

   - on réécrit, sans aucune modification, les premières lignes qui contiennent déjà un pivot (celle du nouveau pivot et celles des anciens pivots) ;
   - on calcule les coefficients des dernières lignes du nouveau système à partir des coefficients de l'ancien système.

     Dans l'exemple ci-dessous, pour obtenir 0 à la place du coefficient $D_1 x_k$ tout en gardant un système équivalent, il suffit de changer la ligne L_j en la ligne $\boxed{P}.L_j - D_1.L_i$. Le terme Ax_ℓ devient alors Xx_ℓ avec $X = \boxed{P}A - D_1 D_2$.

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{ccccc} \ddots & & \vdots & & \iddots \\ & \boxed{P}x_k & D_2x_\ell & & (L_i) \\ \cdots & & \cdots & & \\ & D_1x_k & Ax_\ell & & (L_j) \\ \iddots & & \vdots & & \ddots \end{array}\right.}_{\text{ancien système avec le nouveau pivot } P} \iff \underbrace{\left\{\begin{array}{ccccc} \ddots & & \vdots & & \iddots \\ & \boxed{P}x_k & D_2x_\ell & & \\ \cdots & & & & \cdots \\ & 0 & Xx_\ell & & \\ \iddots & & \vdots & & \ddots \end{array}\right.}_{\text{nouveau système}}$$

5. S'il reste des lignes qui ne sont pas de la forme $0 = cst$ en dessous du dernier pivot encadré, on reprend le processus à l'étape 2.
6. Lorsqu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot, le processus s'arrête. Le système obtenu est alors échelonné et porte le nom de **réduite de Gauss** du système de départ. Cette réduite n'est pas unique puisqu'elle dépend des pivots choisis.

Notons qu'une légère modification de l'algorithme précédent permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite (par exemple, on peut normaliser tous les pivots (les rendre égaux à 1, en faisant des divisions sur les lignes). Plus précisément l'**algorithme de Gauss-Jordan**[1] renvoie une matrice échelonnée réduite :

```
r ← 0        # r est l'indice de ligne du dernier pivot trouvé
pour j de 1 jusqu'à m        # k décrit tous les indices de colonnes
  rechercher max({|A_{i,j}| : r+1 ⩽ i ⩽ n})
  noter k l'indice de ligne du maximum        # A_{k,j} est le pivot
  si A_{k,j} ≠ 0 alors
    r ← r + 1
    diviser la ligne k par A_{k,j}        # on normalise la ligne du pivot
    si k ≠ r alors
      échanger les lignes k et r        # on place la ligne du pivot en position r
    fin si
    pour i de 1 jusqu'à n        # on simplifie les autres lignes
      si i ≠ r alors
        soustraire à la ligne i la ligne r multipliée par A_{i,j}        # pour annuler A_{i,j}
      fin si
    fin pour
  fin si
fin pour
```

Théorème 10.20 - Théorème de Gauss-Jordan.

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Démonstration.
L'algorithme de Gauss-Jordan fournit le résultat. □

Exemple 10.21 (*suite de l'Exemple 10.10*).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{11} \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-14}{22} \end{array}\right)$$

1. Camille JORDAN, mathématicien français (1838-1922)

10.4. Résolution des systèmes linéaires

Définition 10.22.

Un système linéaire est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit qu'il est **incompatible**..
On appelle **condition de compatibilité** du système la condition qui permet de rendre le système compatible.

Remarque 10.23. Un système homogène est toujours compatible.

Exemple 10.24. Le système $\begin{cases} x+2y &= 3 \\ 0 &= 1 \end{cases}$ est incompatible. Le système $\begin{cases} x+2y &= 3 \\ 0 &= a-1 \end{cases}$ est compatible si et seulement si $a=1$ (la condition de compatibilité est donc $a=1$).

Définition 10.25.

On appelle **rang** d'un système linéaire le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite en ligne équivalente à la matrice en lignes du système.

Exercice d'application 10.26. Déterminer le rang de $(S) : \begin{cases} x+2y-z &= -1 \\ 3y+z &= 1 \\ x+5y &= 0 \end{cases}$.

↪ La matrice associée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Définition 10.27.

Les inconnues correspondants aux colonnes des pivots sont appelées **inconnues principales**.
Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires** (ou **paramètres**).

Exemple 10.28. Dans l'Exercice d'application 10.26, x et y sont les inconnues principales, alors que z est un paramètre.

Définition 10.29.

On appelle **système de Cramer**[2] un système linéaire de n équations à n inconnues et de rang n.

Proposition 10.30.

Un système de Cramer admet une unique solution.

2. Gabriel CRAMER, mathématicien genevois (1704-1752)

Démonstration.
La matrice échelonnée réduite en lignes, équivalente en ligne à la matrice du système, est une matrice diagonale. Le système correspondant admet donc bien une unique solution, d'où le résultat. ☐

Remarque 10.31. Un système de Cramer homogène admet $(0, 0, \cdots, 0)$ comme unique solution.

En pratique, on peut être confronté à trois types de situations quand on résout un système linéaire (S) de n équations à n inconnues, et de rang r.

1. Système incompatible : il y a au moins une équation du type $0 = \alpha$, où $\alpha \neq 0$, dans le système équivalent.
2. Système compatible avec une unique solution : si $r = p$ (le système est de Cramer, cf. Proposition 10.30) ;
3. Système compatible avec une infinité de solutions : si $r < p$. Les inconnues principales s'expriment en fonction des paramètres (qui sont au nombre de $p - r$).

◇◇

Remarque technique 10.32.

Pour résoudre un système linéaire, on applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée.

Exercice d'application 10.33. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$(S) : \begin{cases} 7x + 4y &= 1 \\ 4x + 3y &= 1 \end{cases}$$

↪ Avec la méthode de Gauss, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 1 \\ \boxed{4} & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow 4L_1 - 7L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{-5} & -3 \\ \boxed{4} & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow 5L_2 + 3L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{-5} & -3 \\ \boxed{20} & 0 & -4 \end{array}\right)$$

L'unique solution de (S) est $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Exercice d'application 10.34. Résoudre le système (S) suivant, d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{C}^4$:

$$(S) : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \end{cases}$$

↪ On applique la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{-1}\,\textcircled{2} & 1 \\ \boxed{1}\,\textcircled{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & \boxed{-2}\,\textcircled{3} & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions de (S) est $\left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, t, t\right),\ t \in \mathbf{C}\right\}$.

Exercice d'application 10.35. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - y + z &= 1 \\ x + 3y - 3z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{cases}$.

↪ Le système n'admet pas de solution (les détails du calcul sont laissés en exercice).

◇◇

◇◇

Remarque technique 10.36. Il faut être vigilant lorsque le système comporte des paramètres.

Puisqu'il est interdit de choisir un pivot nul, on peut être amener à discuter suivant la valeur des paramètres.

Exercice d'application 10.37. Soit $a \in \mathbf{R}$. Résoudre le système (S) suivant, d'inconnue (x_1, x_2, x_3).

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_2 + 5x_2 + 3x_3 & = & a+1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 2a \\ x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow$ On applique la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}_{(1)} & 2 & 1 & a \\ 2 & \boxed{5}_{(2)} & 3 & a+1 \\ 1 & 1 & \boxed{4}_{(3)} & 2a \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3a - \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} - a \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right)$$

Le système (S) est compatible si et seulement si $a = 1$. Lorsque $a = 1$, le système admet une seule solution $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Exercice d'application 10.38. Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x - ay + (a+1)z & = & 1 \\ ax - y + 2az & = & a+2 \\ x - y + (1-a)z & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (S) soit compatible.

$\hookrightarrow$ On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ a & -1 & 2a & a+2 \\ 1 & -1 & 1-a & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & -1+a^2 & a-a^2 & 2 \\ 0 & -1+a & -2a & -1 \end{array} \right)$$

- Supposons $a \neq 1$. Alors

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a(a-1) & 2 \\ 0 & \boxed{-1+a} & -2a & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim_L \\ \\ \sim_L \end{array} \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3a(a+1) & a+3 \\ 0 & \boxed{a-1} & -2a & -1 \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -a & a+1 & 1 \\ 0 & \boxed{a-1} & -2a & -1 \\ 0 & 0 & 3a(a+1) & a+3 \end{array} \right) \end{array}$$

  Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, le choix du dernier pivot est possible et le système est compatible.
- Si $a = 1$, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

  et le système est incompatible.
- Si $a = 0$, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

  et le système est incompatible.
- Si $a = -1$, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

  et le système est incompatible.

Finalement, (S) est compatible si et seulement si $a \in \mathbf{R}\backslash\{0, -1, 1\}$.

◇◇

Proposition 10.39 - Structure de l'ensemble des solutions.

Si le système (S) est compatible, alors toute solution de (S) s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène.

Démonstration.
Puisque le système est compatible, il admet une solution $(x_1, ..., x_p) \in \mathbf{K}^p$. Soit $(y_1, ..., y_p) \in \mathbf{K}^p$.

$$\begin{aligned}
(y_1, ..., y_p) \text{ est solution de (S)} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,p}y_p &=& b_1 \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,p}y_p &=& b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,p}y_p &=& b_n \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,p}y_p &=& a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,p}y_p &=& a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,p}y_p &=& a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{array}\right. \\
&\iff (x_1 - y_1, ..., x_p - y_p) \text{ est solution du système homogène} \\
&\iff \text{il existe une solution homogène } (h_1, ..., h_p) \text{ telle que} \\
&\qquad \forall i \in [\![1, p]\!], x_i - y_i = h_i
\end{aligned}$$

□

Chapitre 11

Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, **K** désigne **R** ou **C**, et (n,p) est un couple d'entiers naturels non nuls.

11.1. Vocabulaire

Définition 11.1.

On appelle **matrice** à coefficients dans **K** un tableau rectangulaire constitué de nombres appartenant à **K** et ayant n lignes, p colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note, de manière condensée, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
L'élément $a_{i,j}$ est appelé **coefficient** de position (i,j) de la matrice A : il est situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne (où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
Le couple (n,p) est appelé **format** de la matrice. On dit que M est une matrice (n,p) (sous entendu de format (n,p), on dit parfois de taille (n,p)).
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de format (n,p).

Définition 11.2.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. Si $n = p$ (la matrice a donc le même nombre de lignes et de colonnes), M est dite **matrice carrée** . On note alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Si $n = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule ligne), M est dite **matrice ligne**.
3. Si $p = 1$, (la matrice n'a donc qu'une seule colonne), M est dite **matrice colonne**.

Définition 11.3.

On appelle **matrice nulle** de format (n,p) la matrice de format (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou 0 si cette notation ne présente pas d'ambiguïté.

Exemple 11.4. Voici quelques exemples de matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{R}) \quad B = \begin{pmatrix} \pi \\ 1,5 \\ \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \quad C = \begin{pmatrix} 3,1 & -2 \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbf{R}) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

B est une matrice colonne, D est une matrice ligne, C et E sont carrées.
On a par exemple, $a_{3,1} = 9$, $a_{1,3} = 3$, etc.

Exercice d'application 11.5. Écrire explicitement les matrices suivantes :

$$M = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{\substack{i\in[\![1,3]\!] \\ j\in[\![1,4]\!]}} \qquad N = \left(n_{i,j}\right)_{\substack{i\in[\![1,5]\!] \\ j\in[\![1,3]\!]}} \text{ avec } \forall (i,j) \in [\![1,5]\!] \times [\![1,3]\!], n_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i > j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$

↪ On a

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice d'application 11.6. Soit $P = (p_{i,j})_{i,j\in[\![1,5]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $i,j \in [\![1,5]\!]$, donner la valeur de $p_{i,j}$.

↪ On reconnaît le triangle de Pascal, et ainsi $p_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$.

Exercice d'application 11.7. Combien y-t'il de matrice de format $(2,4)$ dont les éléments sont des 0 ou des 1 ?

↪ On a 8 éléments à choisir dans $\{0,1\}$, d'où 2^8 possibilités.

Notation : soit M une matrice (n,p) où n et p désigne deux entiers strictement positifs.

On note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de la matrice M. Ces lignes sont écrites via des matrices-ligne.

On note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de la matrice M. Ces colonnes sont écrites via des matrices-colonne.

Exemple 11.8. Les lignes et les colonnes de la matrice A de l'Exemple 11.4 sont

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

11.2. Calcul matriciel

11.2.1. Combinaison linéaire

Définition 11.9.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit les matrices $A + B$ et λA par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

⚠ **Attention** ⚠. On ne peut additionner ou multiplier par une constante que des matrices de même format.

Exemple 11.10. $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} & 3 \\ \ln 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{e} & 4 \\ \ln 2 & 5+\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 11.11. $i \begin{pmatrix} 1+i & i & 3 \\ \ln 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 & -1 & 3i \\ i \ln 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice d'application 11.12. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $A + 2B$ et $2A - B$.

↪ $A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.

Proposition 11.13 - Propriétés de la somme matricielle.

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

1. Commutativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. Associativité : $A + B = B + A$;
3. Existence d'un élément neutre : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$;
4. Existence d'un opposé : $A + (-1).A = A - A = 0_{n,m}$.

Proposition 11.14 - Propriétés du produit externe matriciel.

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
3. $\lambda(\mu A) = (\mu \times \lambda)A$;
4. $0.A = 0_{n,p}$;
5. $1.A = A$;

Remarque 11.15. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire

(c'est-à-dire une somme pondérée) des matrices $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définies par

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & | & 0 \\ & 0 & \\ 0 - 0 & 1 & 0 - - 0 \\ & 0 & \\ 0 & | & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème ligne}$$
$$\uparrow$$
$$j\text{-ème colonne}$$

En effet, toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ s' écrit de manière unique sous la forme :

$$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j}.$$

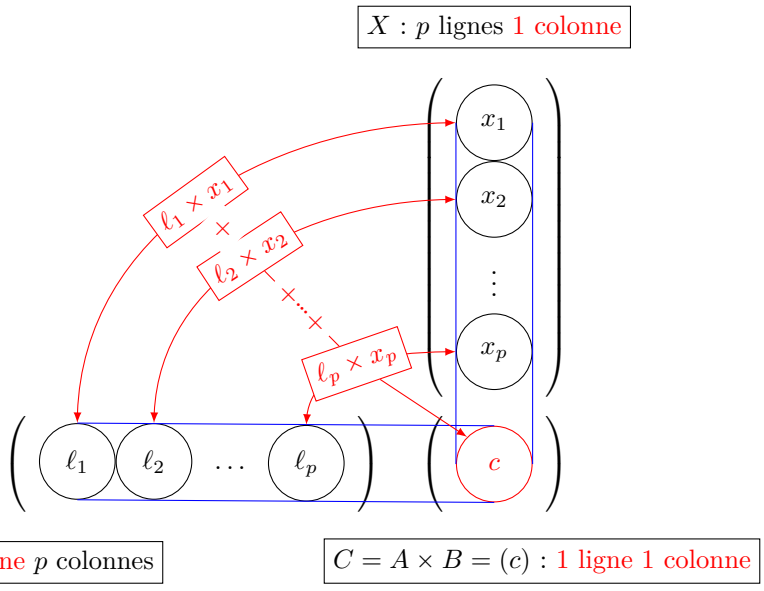
Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{1,2} + 4E_{2,1} - E_{2,2}.$$

11.2.2. Multiplication matricielle

Soit $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell 2 & \cdots & \ell p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. On définit alors le produit LX comme étant la matrice de taille 1×1 égale à :

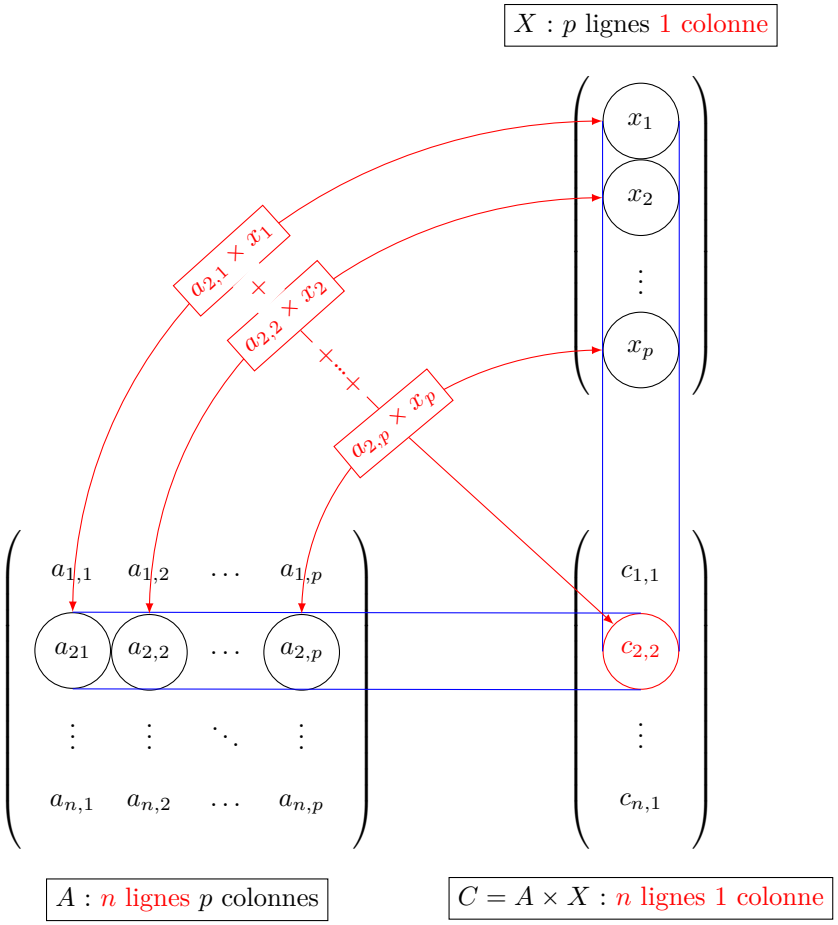
$$LX = \left(\sum_{k=1}^{p} \ell_k x_k \right).$$



Exemple 11.16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-2) + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = -1.$

Remarque 11.17. Le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne correspond au produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si les coordonnées de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) sont stockées dans la matrice ligne (resp. la matrice colonne).

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Le produit AX est la matrice colonne de taille $n \times 1$ dont la i-ième ligne est le produit de la i-ième ligne de A par X, à savoir $\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k \right)$.



Exemple 11.18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Remarque 11.19. On a

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} x_k \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} x_k \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix},$$

et on remarque que AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Notons par ailleurs que, si $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation matricielle

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est équivalent à au système d'équations linéaires

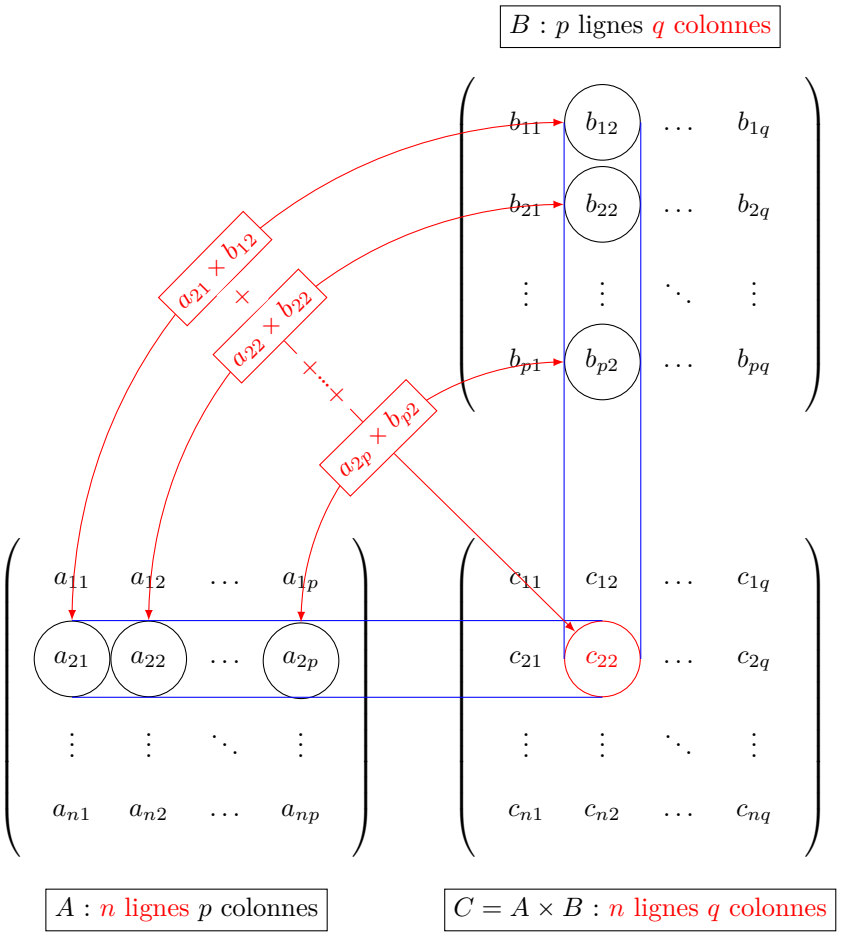
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

La matrice A est alors la matrice du système linéaire, tandis que $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ correspond à la matrice augmentée.

Définition 11.20.

Soit $(n,p,q) \in (\mathbf{N}^\star)^3$, $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de sorte que le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B (c'est pour cette raison que l'indice de colonne de A est le même que l'indice de ligne de B).
On peut alors définir le **produit matriciel** de A par B, noté AB, comme la matrice $(c_{i,k})$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall (i,k) \in [\![1;n]\!] \times [\![1,q]\!], \qquad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \cdots + a_{i,p}b_{p,k}.$$



Exemple 11.21. 1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -11 \\ -1 & -9 & 37 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. On ne peut pas multiplier $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans cet ordre.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

⚠ **Attention** ⚠**.** Il faut être très prudent avec le produit matriciel : les règles du produit sur $\mathbf{K}$ ne s'appliquent pas toutes aux matrices. Par exemple, on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. De plus, le produit matriciel n'est pas commutatif *a priori* : en général, $AB \neq BA$ (où A et B sont des matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, sinon un de ces produits n'est même pas défini).

Remarque 11.22. 1. Dans le cas où A est une matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$, alors AB est une combinaison linéaire des lignes de B :

$$AB = a_1 \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,r} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,r} \end{pmatrix} + \cdots + a_p \begin{pmatrix} b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,r} \end{pmatrix}.$$

2. Dans le cas général, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{K})$, alors la i-ième ligne de AB est le produit de la i-ième ligne de A avec B.

Proposition 11.23.

Soit $(n, p, q, r) \in (\mathbf{N}^\star)^4$. Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- Le produit matriciel est **associatif** :
$$(AB)C = A(BC)\,;$$
- Le produit matriciel est **distributif** par rapport à l'addition :
$$A(B + B') = AB + AB' \qquad \text{et} \qquad (A + A')B = AB + A'B\,;$$
- Le produit matriciel et le produit par les scalaires « **commutent** » :
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Démonstration. 1. $AB = (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$

De plus, $(AB)C = (\sum_{\ell=1}^{q} (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell}) c_{\ell,j}) \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{K})$.

Par associativité sur $\mathbf{K}$, $(AB)C = (\sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j}) = (\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} (\sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell} c_{\ell,j})) = A(BC)$.

□

L'associativité du produit nous permet d'écrire ABC à la place de $(AB)C$ ou $A(BC)$.

⚠ **Attention** ⚠**.** Il faut être très prudent avec le produit matriciel : les règles du produit sur $\mathbf{K}$ ne s'appliquent pas toutes aux matrices. Par exemple, on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. De plus, le produit matriciel n'est pas commutatif *a priori* : en général, $AB \neq BA$ (où A et B sont des matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, sinon un de ces produits n'est même pas défini).

Exemple 11.24. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

11.2.3. Transposition

Définition 11.25.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La **transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ notée ${}^tA$ ou A^T dont le coefficient de position (i,j) est $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Les éléments de le i-ème ligne de ${}^tA$ sont donc les éléments de la i-ème colonnes de A et vice-versa.

Exemple 11.26.

- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \pi \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$
- La transposée d'une matrice-ligne est une matrice-colonne et vice-versa.

Proposition 11.27.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad {}^t({}^tA) = A.$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB.$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbf{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA \quad .$

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Notons ${}^tA = (a'_{i,j})$ et ${}^t({}^t(A)) = (a''_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. On a par définition $a''_{i,j} = a'_{j,i} = a_{i,j}$, d'où le résultat.
2. Soit $(\lambda, A, B) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})^2$. Notons $(\lambda A + B) = (c_{i,j})$, ${}^t(\lambda A + B) = (c'_{i,j})$, ${}^tA = (a'_{i,j})$ et ${}^tB = (b'_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. On a $c'_{i,j} = c_{j,i} = \lambda a_{j,i} + b_{j,i} = \lambda a'_{i,j} + b'_{i,j}$, d'où le résultat.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{m,q}(\mathbf{K})$. Notons ${}^tA = (a'_{i,j})$, ${}^tB = (b'_{i,j})$, $AB = (c_{i,j})$ et ${}^t(AB) = (c'_{i,j})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$$c'_{i,j} = c_{j,i} = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{m} a'_{k,j} b'_{i,k} = \sum_{k=1}^{m} b'_{i,k} a'_{k,j}$$

d'où le résultat. □

L'une des principales propriétés de la transposition est la conservation du rang.

Proposition 11.28.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, le rang de ${}^tA$ est égal au rang de A.

Démonstration.
Admis. □

En pratique, ce résultat signifie que dans la recherche du rang, on peut indifféremment travailler sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice, puisque les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$ et vice versa.

11.3. Les matrices carrées

Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $A+B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les produits AB et BA sont tous les deux possibles, et de plus $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ mais on a vu qu'en général $AB \neq BA$.

L'ensemble des matrices carrées de taille n est donc muni de deux opérations : l'addition et la multiplication.

11.3.1. Matrices triangulaires supérieures ou inférieures, diagonales

Définition 11.29.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est :

- **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i > j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}.$$
Les $*$ désignent ici des scalaires quelconques.
- **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i < j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$
- **diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i \neq j) \Longrightarrow (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Cette matrice se note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
- **scalaire** s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Remarque 11.30. Les matrices diagonales sont triangulaires inférieures et triangulaires supérieures

Définition 11.31.

On appelle **matrice identité de taille** n la matrice notée I_n et définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I_n est donc une matrice scalaire : $I_n = \text{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

La matrice identité vérifie

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Proposition 11.32.

Soit $(A, B, \lambda) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \times \mathbf{K}$.

1. Si A et B sont diagonales, alors $A + B$, λA et AB aussi, et on a :
   - $\text{diag}(a_1, ..., a_n) + \text{diag}(b_1, ..., b_n) = \text{diag}(a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$;
   - $\lambda \,\text{diag}(a_1, ..., a_n) = \text{diag}(\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$;
   - $\text{diag}(a_1, ..., a_n) \times \text{diag}(b_1, ..., b_n) = \text{diag}(a_1 b_1, ..., a_n b_n)$.
2. Si A et B sont triangulaires supérieures, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.
3. Si A et B sont triangulaires inférieures, alors $A + B$, λA et AB le sont aussi.

11.3.2. Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 11.33.

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite :

1. **symétrique** lorsque ${}^tA = A$;
2. **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Remarque 11.34. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. A est symétrique si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
A est antisymétrique si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,i} = 0$ et pour $j \neq i$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$.

Exemple 11.35.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -\mathrm{e} \\ -12 & 0 & -i \\ \mathrm{e} & i & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Le produit de deux matrices symétriques peut ne pas être symétrique, comme le montre l'exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 11.36.

La somme de deux matrices symétriques de même taille est une matrice symétrique.

Théorème 11.37.

Toute matrice carrée de taille n s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Voir TD. □

11.3.3. Puissance d'une matrice carrée

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A \times A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On peut itérer et définir les puissances de A.

Définition 11.38.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on définit la matrice A^k par récurrence :

$$A^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ A^{k+1} = A^k \times A.$$

Ainsi, $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, etc. Remarquons que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k$.

Exercice d'application 11.39. Calculer A^3 où $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

↪ On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$.

Proposition 11.40 - Cas des matrices diagonales.

Soit $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ une matrice diagonale. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, ..., a_n^k) = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons H_k : « $A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, ..., a_n^k)$ ».
H_0 est vraie puisque $A^0 = I_n$ par définition.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que H_k soit vraie. On a

$$A^{k+1} = A \times A^k = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n) \times \mathrm{diag}(a_1^k, ..., a_n^k) = \mathrm{diag}(a_1^{k+1}, ..., a_n^{k+1}).$$

d'après la Proposition 11.32. Ainsi H_{k+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure. □

Définition 11.41.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Exemple 11.42. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. A et I_n commutent car $A \times I_n = A = I_n \times A$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, A et A^k commutent car $A \times A^k = A^{k+1} = A^k \times A$.

Proposition 11.43.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$. Si A et B commutent, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, A et B^k commutent.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons H_k : « $AB^k = B^kA$ ».
On a $AB^0 = AI_n = A = I_nA = B^0A$, donc H_0 est vraie.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que H_k soit vraie. On a

$$\begin{array}{rcll} AB^{k+1} & = & AB^kB & \\ & = & B^kAB & \text{d'après } H_k \\ & = & B^kBA & \text{car } A \text{ et } B \text{ commutent} \\ & = & B^{k+1}A & \end{array}$$

Ainsi H_{k+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure. □

Proposition 11.44 - Formule du binôme pour les matrices.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que A et B commutent. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Démonstration.
Pour tout $N \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$ ».
$(A+B)^0$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = A^0B^0 = I_n$, donc H_0 est vraie.

Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que H_N soit vraie.

$$\begin{aligned}
(A+B)^{N+1} &= (A+B)\times(A+B)^N \\
&= A\times(A+B)^N + B\times(A+B)^N \\
&= A\times\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k} + B\times\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k} && \text{d'après } H_k \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k+1}B^{N-k} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k+1} && \text{car } A \text{ et } B \text{ commutent} \\
&= \sum_{\ell=1}^{N+1}\binom{N}{\ell-1}A^{\ell}B^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\left(\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}\right)A^kB^{N-k+1} + A^{N+1} + B^{N+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\binom{N+1}{k}A^kB^{N+1-k} + A^{N+1} + B^{N+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}A^kB^{N+1-k},
\end{aligned}$$

ce qui montrer H_{N+1}. Le principe de récurrence permet de conclure. □

⚠ **Attention ⚠.** $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'étant pas commutatif, on ne peut appliquer pas toujours la formule du binôme de Newton. Notamment, pour toute matrice A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$ et pour certaines matrices A et B (en fait, la plupart) $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

Exercice d'application 11.45. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Développer $(I_n+A)^N$.

$\hookrightarrow (I_n+A)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}I_n^{N-k}A^k = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^k = I_n + NA + \frac{N(N-1)}{2}A^2 + ... + NA^{N-1} + A^N.$

11.4. Méthode du pivot de Gauss et calcul matriciel

On a vu que le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& b_n
\end{array}\right.$$

traduit l'égalité matricielle $AX = B$, où $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice des coefficients, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des inconnues et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des seconds membres.

Nous allons voir dans cette partie que les opérations sur les lignes dans l'algorithme du pivot de Gauss correspondent elles aussi à un calcul matriciel.

11.4.1. Matrices élémentaires

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit les trois matrices élémentaires suivantes.

Définition 11.46.

On appelle **matrice de dilatation** une matrice de la forme

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\alpha} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

où $\alpha \in \mathbf{K}^\star$ et tous les coefficients de cette matrice sont égaux, sauf celui de position (i, i).

La matrice $D_i(\alpha)$ est la matrice obtenue à partir de I_n en faisant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \alpha L_i$.

Définition 11.47.

On appelle **matrice de transposition** une matrice $P_{i,j}$ obtenue à partir de I_n en échangeant deux lignes i et j :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \boxed{1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{1} & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Définition 11.48.

On appelle **matrice de transvection** une matrice obtenue à partir de I_n en ajoutant λ fois (où $\lambda \in \mathbf{K}$) la ligne j à la ligne i : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$:

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \boxed{\lambda} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

11.4.2. Méthode du pivot de Gauss

Proposition 11.49.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $(\alpha,\lambda) \in \mathbf{K}^\star \times \mathbf{K}$.

1. $D_i(\alpha) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
2. $P_{i,j} \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.
3. $T_{i,j}(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Les opérations élémentaires sur les lignes de A se traduisent ainsi par des produits à gauche par des matrices élémentaires.

Nous avons vu lors du chapitre sur la résolution des systèmes linéaires que pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite en ligne R telle que $A \sim_L R$. D'après ce qui précédente, cela signifie :

Proposition 11.50.

Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui est produit de matrices élémentaires, telle que $E \times A = R$.

11.4.3. Opérations sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Faire des opérations élémentaires sur les colonnes de A revient à faire des opérations élémentaires sur les lignes de ${}^tA$. Puisque ${}^t \times {}^t A = A \times {}^t E$, les opérations élémentaires sur les colonnes de A se traduisent par des produits à droites par des matrices élémentaires.

Proposition 11.51.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $(\alpha,\lambda) \in \mathbf{K}^\star \times \mathbf{K}$.

1. $A \times D_i(\alpha)$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \alpha C_i$.
2. $A \times P_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$.
3. $A \times T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

On note $A \sim_C B$ lorsqu'on passe de A à B par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les colonnes.

11.5. Matrices carrées inversibles

11.5.1. Présentation

Définition 11.52.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices inversibles s'appelle le **groupe linéaire** d'ordre n et il est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

⚠ **Attention** ⚠. Pour être inversible, une matrice doit d'abord être carrée !!

Proposition 11.53.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Cette matrice est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

Démonstration.
Notons B et C deux inverse de A.

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

□

Exemple 11.54. I_n est inversible, et $I_n^{-1} = I_n$.
$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
La matrice nulle n'est pas inversible. En effet, pour tout matrice B, $B \times 0 = 0$.

Exercice d'application 11.55. Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

↪ Posons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix},$$

ne peut jamais être égal à l'identité. Donc A n'est pas inversible.

Proposition 11.56.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$. Si A et B sont inversibles, alors AB aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration.
On a

$$(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

et de même,

$$(B^{-1}A^{-1}) \times (AB) = I_n.$$

□

Remarque 11.57. On peut en déduire, à l'aide d'une simple récurrence, que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. Cette dernière matrice est notée A^{-k}.

Remarque 11.58. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Supposons que l'on ait trouvé une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ (respectivement $BA = I_n$). Du fait que la multiplication matricielle n'est pas commutative, on ne peut pas affirmer *a priori* que cet inverse à gauche (respectivement à droite) est la matrice inverse de A. Ce résultat est cependant *vrai dans le cas des matrices* et nous le démontrerons plus tard.

Proposition 11.59.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est inversible, alors ${}^tA$ aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.
On a

$$({}^tA) \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \times A) = {}^tI_n = I_n$$

et de même

$${}^t(A^{-1}) \times ({}^tA) = I_n.$$

□

Théorème 11.60 - Caractérisation de l'inversibilité.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

(ii) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{n,1}$.

(iii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

(iv) $A \sim_L I_n$.

(v) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ admet une unique solution.

(vi) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ admet au moins une solution.

Démonstration.
On montre que (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(i) pour commencer.

- (i)$\Longrightarrow$(ii). Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $AX = 0_{n,1}$. On a $A^{-1}AX = A0_{n,1}$, d'où $I_nX = 0_{n,1}$ puis $X = 0_{n,1}$.
- (ii)$\Longrightarrow$(iii). L'assertion (ii) signifie que le système est de Cramer (il admet au plus une solution, et 0 est une solution évidente, donc il admet exactement une solution) ce qui signifie que $\mathrm{rg}(A) = n$.
- (iii)$\Longrightarrow$(iv). Si le système est de rang n, alors l'algorithme de Gauss-Jordan assure qu'il est équivalent par lignes à I_n.
- (iv)$\Longrightarrow$(i). Si le système est équivalent par lignes à I_n, il existe E un produit de matrices élémentaires tel que $EA = I_n$. On a admis que cette égalité suffisait à caractériser que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ (on pourrait aussi démontrer sans trop de difficulté que $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ pour conclure).

Montrons pour conclure (i)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(iv).

- (i)$\Longrightarrow$(v). Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B.$$

- (v)$\Longrightarrow$(vi). Evident.
- (vi)$\Longrightarrow$(iv). Si l'équation $AX = B$ admet une solution pour tout B que la matrice augmentée associée au système ne contient pas de ligne du type $\left(\begin{array}{c|c} 0 \cdots 0 & cst \end{array}\right)$. En particulier, un pivot a pu être choisi pour chaque ligne et $\mathrm{rg}(A) = n$. □

11.5.2. Calcul pratique de l'inverse

Pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss. On écrit à gauche la matrice A, et à droite la matrice I_n. On applique l'algorithme du pivot sur A pour la réduire à I_n (ce qui est possible puisqu'on a vu dans le Théorème 11.60 que $A \sim_L I_n$). On fait les mêmes opérations sur la matrice de droite. A la fin, on doit donc avoir I_n à gauche. La matrice à droite est l'inverse de A.

Exemple 11.61. On veut calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_n} \\
\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{L}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{I_n} & \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}
\end{array}$$

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 11.62. On peut interpréter l'inversion de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ en terme de réciproque d'application de $\mathbf{K}_n$ sur lui-même. Le calcul précédente prouve que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, 2x+4y-z, -2x-5y+3z) \end{array}$$

est bijective, de réciproque

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (a,b,c) & \longmapsto & (7a-b+2c, -4a+b-c, -2a+b) \end{array}$$

En effet, si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'application f peut se décrire plus simplement sous la forme $f : X \longmapsto AX$, et g par $g : x \longmapsto A^{-1}X$. Il est alors immédiat que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Nous reviendrons très précisément sur cela dans un chapitre ultérieur.

Chapitre 12

Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

Une fois qu'on a passé les bornes, il n'y a plus de limite.

Alphonse Allais [1]

12.1. Propriétés locales d'une fonction

Définition 12.1.

On appelle **extrémité** d'une partie D de la forme $I\backslash\{a\}$ où I est un intervalle d'extrémités b et c, avec $(b, c, a) \in (\overline{\mathbf{R}})^2 \times \mathbf{R}$.

Exemple 12.2. Les extrémités de $[1\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$ sont 1, 3 et $+\infty$.

Définition 12.3.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$. On appellera **voisinage** de a tout intervalle du type $]a-h\,;\,a+h[$, avec $h > 0$.
- Cas où $a = +\infty$. On appellera **voisinage** de $+\infty$ tout intervalle du type $]A\,;\,+\infty[$, avec $A \in \mathbf{R}$.
- Cas où $a = -\infty$. On appellera **voisinage** de $+\infty$ tout intervalle du type $]-\infty\,;\,A[$, où $A \in \mathbf{R}$.

Exemple 12.4.
- La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est supérieure à 1 au voisinage de $\frac{1}{2}$ (sur $]0\,;\,1[$ par exemple) et bornée au voisinage de $+\infty$ sur $]1\,;\,+\infty[$ par exemple).
- La fonction logarithme est définie au voisinage de 0 (sur $]-1\,;\,1[\cap \mathbf{R}_+^\star$ par exemple).

1. Alphonse ALLAIS, journaliste et écrivain français (1854-1905)

Définition 12.5.

Une fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{R})$ admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en $a \in D$ s'il existe un intervalle ouvert V contenant a tel que

$$\forall x \in V \cap D,\ f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)).$$

Un **extremum local** de f est un maximum local de f ou un minimum local de f.

Exercice d'application 12.6. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1.

$\hookrightarrow$ Il suffit d'étudier les variations de la fonction. On a par exemple que le maximum de $g\big|_{]-5\,;\,1[}$ est 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

12.2. Limites

Dans tout ce paragraphe on notera D une partie de $\mathbf{R}$ de la forme I ou $I\backslash\{a\}$, avec $a \in \overline{R}$ et I un intervalle.

12.2.1. Limite finie d'une fonction en $a \in \overline{\mathbf{R}}$

Définition 12.7.

- Cas où $a \in \mathbf{R}$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en a si

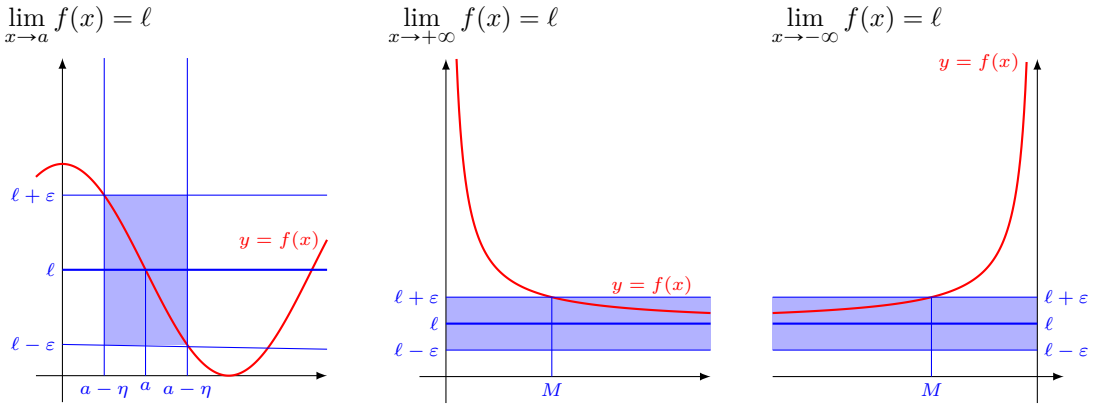
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Cas où $a = +\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in D, \quad x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Cas où $a = -\infty$: on dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbf{R}$ en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in D, \quad x \leqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$



Remarque 12.8. Comme pour les suites, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges dans la définition. De plus, on peut remplacer ε par $c{\cdot}\varepsilon$, où $c > 0$ est une constante (indépendante de tous les autres paramètres).

Remarque 12.9. On peut écrire une définition plus compacte à l'aide des voisinages :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x \in V \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 12.10.

Si f possède une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, alors cette limite est unique.
Dans ce cas, on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Démonstration.
On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbf{R}$ (elle s'adapte facilement aux autres cas).
Raisonnons par l'absurde et supposons que f admettent deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes en a. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$. Par définition de la limite en a, on a

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon,$$

et

$$\exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon,$$

Notons $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \eta_0$. Alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)| \leqslant |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|.$$

D'où $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, puis $\ell_1 = \ell_2$. □

Exercice d'application 12.11. Montrer, avec la définition, que la fonction racine carrée tend vers 0 en 0.

↪ La fonction racine carrée est bien définie au voisinage de 0 et, pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^2$ pour avoir

$$\forall x \geqslant 0,\ (|x - 0| \leqslant \eta) \Longrightarrow \left(\left|\sqrt{x} - 0\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

Exercice d'application 12.12. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ tend vers 0 en $+\infty$.

↪ En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $A = \frac{1}{\varepsilon}$ pour avoir

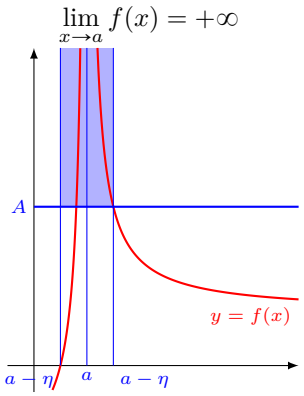
$$\forall x \in \mathbf{R}^\star,\ (x \geqslant A) \Longrightarrow \left(\left|\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

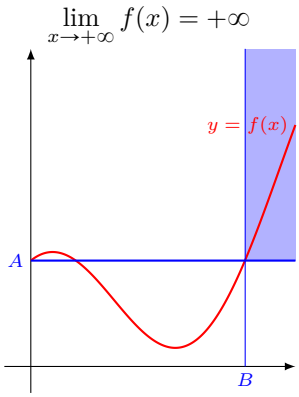
12.2.2. Limites infinies

On dit qu'une fonction réelle f tend vers $+\infty$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a.

Définition 12.13.

- On dit que f **tend vers** $+\infty$ en $a \in \mathbf{R}$ ssi elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \qquad (|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant A\big).$$
- On dit que f **tend vers** $+\infty$ en $+\infty$ ssi elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists B \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \qquad (x \geqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant A\big).$$
- On dit que f **tend vers** $+\infty$ en $-\infty$ ssi elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists B \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \qquad (x \leqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \geqslant A\big).$$





Définition 12.14.

- On dit que f **tend vers** $-\infty$ en $a \in \mathbf{R}$ ssi elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \qquad (|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant A\big).$$
- On dit que f **tend vers** $-\infty$ en $+\infty$ ssi elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists B \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \qquad (x \geqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant A\big).$$
- On dit que f **tend vers** $-\infty$ en $-\infty$ ssi elle vérifie
$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists B \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in D, \qquad (x \leqslant B) \Longrightarrow \big(f(x) \leqslant A\big).$$

⚠ **Attention** ⚠. On utilisera la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ uniquement après avoir montré que f converge en a, que f diverge vers $+\infty$ en a ou que f diverge vers $-\infty$ en a.

Remarque 12.15. Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On peut compacter les trois cas de la Définition 12.14 comme suit :
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathbf{R},\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in D, \quad x \in V \Longrightarrow f(x) \geqslant A).$$

De même, on peut écrire la Définition 12.13 de manière plus synthétique :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff (\forall A \in \mathbf{R},\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in D, \quad x \in V \implies f(x) \leqslant A).$$

Enfin, on peut regrouper toutes les définitions sur les limites ainsi, où $(a, \ell) \in (\overline{\mathbf{R}})^2$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff (\forall U \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in D, \quad x \in V \implies f(x) \in U).$$

Proposition 12.16 - Unicité de la limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Si une fonction f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en a, alors cette limite est unique. Lorsque $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$, on note encore :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Démonstration.
Il suffit d'adapter la démonstration de la proposition de l'unicité de la limite finie. □

Exemple 12.17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

12.2.3. Propriétés des limites

Théorème 12.18.

Si $a \in D$ et si f admet pour limite le nombre $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en a, alors $\ell \in \mathbf{R}$ et $\ell = f(a)$.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que f admette une limite ℓ en a, avec $\ell \neq f(a)$.

- Supposons $\ell = +\infty$. Il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in D \cap V$, $f(x) \geqslant f(a) + 1$. En particulier, puisque $a \in D \cap V$, alors $f(a) \geqslant f(a) + 1$, ce qui est absurde. Ainsi $\ell \neq +\infty$.
- De même, on montre que $\ell \neq -\infty$.
- On a donc $\ell \in \mathbf{R}$, et $\ell \neq f(a)$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - f(a)| > 0$. Puisque f a pour limite ℓ en a, il existe un voisinage V de a tel que, pour $x \in D \cap V$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. En particulier, puisque $a \in D \cap V$, $|f(a) - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|f(a) - \ell|$, ce qui est absurde.

Finalement, $\ell = f(a)$. □

Proposition 12.19.

Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration.
Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$. Notons $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Pour $\varepsilon = 1$,

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

Ainsi, pour $x \in I \cap [a - \eta\,;\, a + \eta]$,

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$$

donc f est bornée au voisinage de a. □

Proposition 12.20.

Soit α et β deux nombres réels. Si f possède une limite finie ℓ en a et si $\ell \in]\alpha\,;\,\beta[$, alors f prend ses valeurs dans $]\alpha, \beta[$ au voisinage de a.

Démonstration.
Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon < \min\{\ell - \alpha, \beta - \ell\}$ (de sorte que $\alpha < \ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon < \beta$), on obtient pour x au voisinage de a,

$$\alpha < \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon < \beta.$$

□

Corollaire 12.21.

Si f possède une limite strictement positive en a alors f est minorée par un nombre strictement positif au voisinage de a.

Démonstration.
Il suffit de prendre $\alpha = \frac{\ell}{2} > 0$ dans la proposition précédente. □

Remarque 12.22. Le résultat est faux si la limite est nulle. Par exemple $f : x \longmapsto x$ possède une limite nulle en 0 mais n'est pas positive au voisinage de 0.

Remarque 12.23. On peut en déduire que si f admet une limite non nulle en a, alors f est non nulle au voisinage de a : il suffit d'appliquer le corollaire précédent à $|f|$.

Théorème 12.24 - Passage à la limite dans une inégalité.

Soit f et g deux fonctions réelles définies sur D et a un point ou une extrémité de D. Si f et g admettent une limite en a (finie ou non), et si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

Démonstration.
Démontrons ce résultat par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) > \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) > 0$ donc $f - g$ est strictement positive au voisinage de a ce qui est absurde. □

⚠ **Attention** ⚠. Le résultat précédent est faux avec des inégalités strictes !!!

Si $f < g$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f \leqslant \lim\limits_{a} g$ mais on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{a} f < \lim\limits_{a} g$.

Exemple 12.25. Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, g la fonction nulle (c'est-à-dire $g : x \longmapsto 0$) et $a = +\infty$, on a $f > g$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Théorème 12.26 - Caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{R})$ une fonction réelle et a un point ou une extrémité de D.
La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si, pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ a pour limite ℓ.

Démonstration.
Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$ (les cas $a = -\infty$ et $a = +\infty$ sont similaires) et $\ell \in \mathbf{R}$.

- Supposons que $\lim_a f = \ell$ et considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a. Puisque $\lim_a f = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ (|x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$
Comme $\lim u_n = a$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - a| \leqslant \eta.$$
Alors
$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N) \Longrightarrow (|u_n - a| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(u_n)-\ell| \leqslant \varepsilon)$$
et donc $\lim f(u_n) = \ell$.
- Pour la réciproque, raisonnons par contraposition en supposant que f n'admet pas ℓ pour limite en a, c'est-à-dire
$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x_\eta \in D,\ (|x_\eta - a| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x_\eta) - \ell| > \varepsilon).$$
En prenant $\eta = \frac{1}{n}$ pour chaque $n \in \mathbf{N}^\star$, on obtient l'existence de $u_n \in D$ (ici $u_n = x_{1/n}$) tel que
$$(|u_n - a| \leqslant \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(u_n) - \ell| > \varepsilon).$$
On voit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans D ainsi construite vérifie $\lim u_n = a$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers ℓ.

□

◇◇

Remarque technique 12.27. Cette proposition s'utilise souvent pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en $a \in \overline{\mathbf{R}}$: il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers a telles que les suites $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ n'ont pas la même limite.

Exercice d'application 12.28. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = n\pi$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Les suites u et v divergent vers $+\infty$, et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sin(u_n) = 0$, $\sin(v_n) = 1$, donc sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice d'application 12.29. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

↪ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = 1$. Par ailleurs,
$$f\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \sim \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{e}}.$$
Ainsi f n'est pas convergente.

◇◇

12.2.4. Limite à droite, limite à gauche

Définition 12.30.

- On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ pour **limite à droite** en a si la restriction de f à $]a\,;+\infty[\cap D$ admet ℓ pour limite en a. On la note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.
- On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ pour **limite à gauche** en a si la restriction de f à $]-\infty\,;a[\cap D$ admet ℓ pour limite en a. On la note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

Remarque 12.31. 1. Dans le cas où ℓ est un réel, ces deux définitions s'écrivent avec des quantificateurs de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \forall \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (0 < x - a < \eta) \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

pour la limite à droite, et

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \forall \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad (-\eta < x - a < 0) \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

pour la limite à gauche.

2. Dans la définition précédente, les intervalles $]a\,; +\infty[$ et $]-\infty\,; a[$ sont ouverts en a. Autrement dit, la valeur de f en a n'intervient pas dans l'existence et la valeur de la limite à droite ou à gauche.

Exemple 12.32. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

Exercice d'application 12.33. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Déterminer les limites à droite et à gauche de la fonction partie entière en m.

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in]m-1\,; m[$, $\lfloor x \rfloor = m-1$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to m \\ x<m}} \lfloor x \rfloor = m-1$. De plus, pour tout $x \in]m\,; m+1[$, $\lfloor x \rfloor = m$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to m \\ x>m}} \lfloor x \rfloor = m$.

Proposition 12.34.

1. Si f admet $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ pour limite en a alors f admet une limite à droite et à gauche en a toutes les deux égales à ℓ (si tant est que f est définie à gauche ou à droite de a).
2. Soit a est un réel en lequel f est définie. Si f est définie à gauche et à droite de a, et si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
alors f tend vers $f(a)$ en a.

⚠ **Attention ⚠.** Le point 2. de la proposition précédente n'est pas exactement la réciproque du point 1. D'ailleurs, la réciproque de 1. est fausse en général (voir exemple suivant).

Exemple 12.35. Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. La proposition assure que si f admet une limite, celle-ci est nécessairement 0.
Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, on a $0 = |0-0| \leqslant \eta$, alors que $|f(0)-0| = 1 > \varepsilon$. f n'admet donc pas 0 comme limite. La proposition assure en outre que f n'a pas de limite en 0.

◇◇

Remarque technique 12.36. La proposition peut être utile pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (cf. l'exemple précédent ou l'exercice d'application qui suit).

Exercice d'application 12.37. La fonction $f : x \longmapsto \lfloor -|x| \rfloor$ possède-t-elle une limite en 0 ?

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in]0\,; 1[$, $f(x) = \lfloor -x \rfloor = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$. De même, pour tout $x \in]-1\,; 0[$, $f(x) = \lfloor x \rfloor = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Par contre, $f(0) = 0$, ce qui empêche de conclure que f admet une limite en 0. Démontrons que ça n'est pas le cas, c'est-à-dire que f ne converge pas vers -1 (seul candidat possible d'après la proposition) : posons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, on a $|0| < \eta$ et $|f(0)+1| = 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$. Ainsi f ne converge pas vers -1 en 0, donc f n'admet pas de limite en 0.

◇◇

Définition 12.38.

Soit a est un réel en lequel f n'est pas définie, tel que f est définie à gauche et à droite de a. Si f possède une limite à gauche et une limite à droite et si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

alors on dit que f tend vers ℓ en a.

Exercice d'application 12.39. Déterminer, si elle existe, la limite de $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$ en 0.

↪ On a $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

12.3. Opérations sur les limites

Remarque 12.40. Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 en posant $x = a + h$: la limite en $a \in \mathbf{R}$ de $x \longmapsto f(x)$ existe ssi la limite en 0 de $h \longmapsto f(a+h)$ existe et dans ce cas

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h).$$

Proposition 12.41.

Soit f et g deux fonctions définies sur D et a un point ou une extrémité de D. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ où ℓ et ℓ' sont deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$.

1. Si la forme $\ell + \ell'$ n'est pas indéterminée alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$.
2. Si la forme $\ell \times \ell'$ n'est pas indéterminée alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \ell\ell'$.
3. Si ℓ' est un réel tel que $\ell' \neq 0$, alors la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a donc la fonction $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\ell'}$.
4. Si $\ell' = +\infty$ ou $\ell' = -\infty$, alors la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a donc la fonction $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0$.
5. Si $\ell' = 0$ et si g est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a, alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = -\infty$).

Démonstration.
On va utiliser les opérations sur les limites de suites et la caractérisation séquentielle de la limite pour étendre ces propriétés aux limites de fonctions. On démontre le point 1. (les autres preuves se mènent de la même manière).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ qui converge vers a. Par la caractérisation séquentielle de la limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = \ell'$. Par opérations sur les limites de suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) + g(u_n) = \ell + \ell'$. Or ceci est vrai pour toute suite u qui tend vers a. Par la caractérisation séquentielle de la limite, on a donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$. □

Remarque 12.42. 1. Les résultats sur la limite de $\frac{f}{g}$ en a se déduisent en combinant le point 2 à l'un des points 3,4, et 5.

2. Dans la proposition précédente, tout reste vrai si l'on remplace la limite en a par la limite à gauche en a ou la limite à droite en a (lorsque cela a un sens).
3. Dans tous les cas « indéterminés », on peut avoir une limite finie, une limite infinie ou pas de limite. Pour trouver la limite dans les cas particuliers il faut « lever l'indétermination », c'est-à-dire transformer l'expression pour ne plus avoir de forme indéterminée.
   Pour les indéterminations $(\pm\infty) \pm (\mp\infty)$, $0 \times (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ une méthode consiste à mettre le terme dominant en facteur.

Proposition 12.43.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{R})$ et a un point ou une extrémité de D. Soit $g \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ et b un point ou une extrémité de E. On suppose que $f(D) \subset E$ de sorte que l'on puisse considérer la fonction $g \circ f$ de $\mathcal{F}(D, \mathbf{R})$.
Si f admet pour limite b en a, et si g admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en b, alors $g \circ f$ tend vers ℓ en a.

Démonstration.
On fait la preuve uniquement pour $(a, b, \ell) \in \mathbf{R}^3$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de g,

$$\exists \nu > 0,\ \forall y \in E, \quad (|y - b| \leqslant \nu \Longrightarrow |g(y) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Ensuite, la définition de la limite de f donne

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \nu)\,.$$

On a donc, pour tout $x \in D \cap [a - \eta\,;\, a + \eta]$, $|g(f(x)) - c| \leqslant \varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

Exemple 12.44. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$.

12.4. Théorèmes d'existence de limite

Théorème 12.45 - Théorème d'encadrement.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$, f, g, h trois fonctions réelles définies sur D, a un point ou une extrémité de D et $\ell \in \mathbf{R}$. Supposons que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

(a) $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.
(b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
(c) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Alors g admet une limite en a, et plus précisément $\lim\limits_{x \to a} g(x) = a$.

Démonstration.
On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite :

$$\exists \eta_1,\ \forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,,$$

$$\exists \eta_2,\ \forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,,$$

De plus, il existe $\eta_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [a - \eta_3\,;\, a + \eta_3]$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Pour tout $x \in I \cap [a - \eta\,;\, a + \eta]$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon,$$

donc $|g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, et ainsi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$. □

Remarque 12.46. On notera, qu'au contraire du théorème de passage à la limite dans une inégalité, le théorème d'encadrement

fournit à la fois l'existence d'une limite finie à une fonction et la valeur de sa limite.

Exercice d'application 12.47. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin\sqrt{x}}{2x^2+1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\frac{x^2-1}{2x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2+1}{2x^2+1}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Corollaire 12.48.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ soit f et g deux fonctions définies sur D, a un point ou une extrémité de D, tels que $|f| \leqslant g$ au voisinage de a. Si g possède une limite nulle en a alors f possède également une limite nulle en a.

Théorème 12.49 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur D, a un point ou une extrémité de D, tels que $f \leqslant g$ au voisinage de a.

1. Si f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend également vers $+\infty$ en a.
2. Si g tend vers $-\infty$ en a, alors f tend également vers $-\infty$ en a.

Démonstration.
Traitons le cas où $a \in \mathbf{R}$, et ne démontrons que le théorème de minoration. Supposons donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Soit $A > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [a-\eta_1\,;\,a+\eta_1]$, $f(x) \geqslant A$. De plus, il existe $\eta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [a-\eta_2\,;\,a+\eta_2]$, $g(x) \geqslant f(x)$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a, pour tout $x \in D \cap [a-\eta\,;\,a+\eta]$, $g(x) \geqslant A$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. □

Théorème 12.50 - Théorème de la limite monotone.

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ avec $a < b$, et f une fonction croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $]a\,;\,b[$.

1. Si f est majorée (resp. minorée) sur $]a\,;\,b[$, alors f possède une limite finie à gauche en b et

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup(\{f(x) \,:\, x \in]a\,;\,b[\}) \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf(\{f(x) \,:\, x \in]a\,;\,b[\})\right).$$

2. Si f est minorée (resp. majorée) sur $]a\,;\,b[$, alors f possède une limite finie à droite en a et

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf(\{f(x) \,:\, x \in]a\,;\,b[\}) \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup(\{f(x) \,:\, x \in]a\,;\,b[\})\right).$$

3. Si f n'est pas majorée (resp. minorée) sur $]a\,;\,b[$, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).
4. Si f n'est pas minorée (resp. majorée) sur $]a\,;\,b[$, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Démonstration.
Supposons que f est croissante sur l'intervalle $]a\,;\,b[$.

1. La fonction f étant majorée, l'ensemble $\{f(x)\,:\,x\in]a\,;\,b[\}$ est non vide et majoré, ce qui justifie l'existence de $\ell=\sup(\{f(x)\,:\,x\in]a\,;\,b[\})$. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la borne supérieure, on sait qu'il existe $x_0\in]a\,;\,b[$ tel que $\ell-\varepsilon\leqslant f(x_0)\leqslant\ell$. Comme la fonction f est croissante et majorée par ℓ, on en déduit que pour tout $x\geqslant x_0,\ \ell-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant\ell$. On a donc démontré que
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in]a\,;\,b[\,,\ \forall x\geqslant x_0,\ |f(x)-\ell|\leqslant\varepsilon,$$
ce qui établit la convergence de f vers ℓ.

3. Soit $A\in\mathbf{R}$. Comme f n'est pas majorée, le nombre A n'est pas un majorant de f, c'est-à-dire qu'il existe $x_0\in]a\,;\,b[$ tel que $f(x_0)\geqslant A$. Comme f est croissante, on en déduit que pour tout $x\geqslant x_0,\ f(x)\geqslant A$. On a donc démontré que
$$\forall A>0,\ \exists x_0\in]a\,;\,b[\,,\ \forall x\geqslant x_0,\ f(x)\geqslant A,$$
ce qui démontre la divergence de f vers $+\infty$ quand x tend vers b.

Le cas où f est décroissante se déduit en considérant $-f$ à la place de f. Les points 2. et 4. se déduisent de 1. et 3. en considérant : $x\longmapsto f(-x)$ à la place de f. □

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 12.51.

Soit $f:D\longrightarrow\mathbf{R}$ monotone, et $a\in D$ tel que a ne soit pas une borne de D. Alors f admet des limites finies à gauche et à droite en a. Plus précisément,

1. Si f est croissante, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\leqslant f(a)\leqslant\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$.
2. Si f est décroissante, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\leqslant f(a)\leqslant\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$.

Démonstration.
Montrons le résultat dans le cas où f est croissante, et notons c et d les bornes de D. L'application $f\big|_{]c\,;\,a[}$ est croissante, et pour tout $x\in]c\,;\,a[$, $f(x)\leqslant f(a)$, donc cette fonction est majorée. Ainsi elle admet une limite en a^-. De plus, pour tout $x\in]c\,;\,a[$, $f(x)\leqslant f(a)$ et en passant à la limite quand x tend vers a^-, on obtient $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\leqslant f(a)$.
De même, en considérant $f\big|_{]a\,;\,d[}$, on montre que $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ existe et est supérieure ou égale à $f(a)$. □

Remarque 12.52. Ces deux inégalités peuvent être strictes (penser à la fonction partie entière). On verra dans un paragraphe suivant l'on peut établir la continuité d'une fonction si les inégalités sont des égalités.

Exercice d'application 12.53. On considère $F:\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ x&\longmapsto&\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{array}$. Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

↪ On remarque que F est croissante comme primitive d'une fonction positive. Il suffit donc d'établir qu'elle est majorée. On a, pour tout $t\in[0\,;\,1]$, $\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant\mathrm{e}^{-t}$ si $t\geqslant 1$. Ainsi, pour tout $x\geqslant 1$,
$$F(x)=\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\mathrm{d}t+\int_1^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=1+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1+\mathrm{e}^{-1}.$$
Ainsi F est croissante, majorée par $1+\mathrm{e}^{-1}$: elle admet donc une limite finie en $+\infty$ (on peut établir, mais c'est plus difficile, qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

12.5. Relations de comparaison : cas des fonctions

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Dans ce paragraphe, on considère des fonctions f, g et h définies au voisinage de a.

12.5.1. Présentation

Définition 12.54.

Pour cette définition, g peut s'annuler au voisinage de a. On dit que f est :

1. **dominée** par g au voisinage de a s'il existe une fonction ϕ bornée au voisinage de a telle que $f = \phi \times g$. On note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$.
2. **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe ϕ de limite nulle en a telle que $f = \phi \times g$. On note $f \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$.
3. **équivalente** à g au voisinage de a s'il existe ϕ de limite égale à 1 en a telle que $f = \phi \times g$. On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 12.55.

1. $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $x = \dfrac{1}{x} \times x$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
2. $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 = x \times x$, avec $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Remarque 12.56.

- f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(1)$.
- f converge vers 0 en a si et seulement si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$.
- $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \Longrightarrow f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$.

A partir de la définition, on obtient immédiatement la proposition suivante :

Proposition 12.57.

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a,

- $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ si et seulement si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a ;
- $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$;
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration.
Il suffit de choisir $\phi = \dfrac{f}{g}$ dans la définition. □

On supposera pour toute la suite que les fonctions f, g et h ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a). Autrement dit, on suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ et $h(x) \neq 0$.

Exemple 12.58.

1. $x^2 \sin(x^3) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\big(x^2\big)$. En effet $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^2 \sin(x^3)$ sont définies sur $\mathbf{R}^\star$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $\left|\dfrac{x^2 \sin(x^3)}{x^2}\right| \leqslant 1$.

2. Si $p < q$, $x^p \underset{x\to+\infty}{=} o(x^q)$ et $x^q \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$. En effet $x \longmapsto x^p$ et x^q sont définie sur $\mathbf{R}^\star$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{x^q} = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^q}{x^p}$.
3. $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$. En effet, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$.

Exercice d'application 12.59. Soit $p \in \mathbf{N}$, $(a_0, a_1, ..., a_p) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^\star$ et $f : x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$. Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0, puis au voisinage de $+\infty$.

↪ Notons $K = \min\{k \in [\![0, p]\!] \mid a_k \neq 0\}$ (l'ensemble est non vide car $a_p \neq 0$ et est fini). On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_K x^K$.

Puisque $\dfrac{f(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum\limits_{k=0}^{p-1} \underbrace{\dfrac{a_k}{x^{p-k}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_p x^p$.

Par exemple, $2x^3 + 4x^2 + \pi x \underset{x\to 0}{=} \pi x$ et $2x^3 + 4x^2 + \pi x \underset{x\to+\infty}{=} 2x^3$.

12.5.2. Propriétés

Les propriétés données ci-après sont très semblables à celles données dans le chapitre sur les suites (mise à part la Proposition 12.69). Les preuves sont similaires.

Proposition 12.60 - Transitivité.

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} O(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Proposition 12.61 - Somme.

- Si $f \underset{a}{=} O(h)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} O(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.

⚠ **Attention** ⚠. On ne somme jamais des équivalents !

Proposition 12.62 - Produit.

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies au voisinage de a et qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être en a.

- Si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$.
- Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
- Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.

Proposition 12.63 - Quotient.

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies au voisinage de a et qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être en a.
Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$, sous réserve de définition des quotients.

Proposition 12.64 - Puissances.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Proposition 12.65 - Symétrie.

On a $f \underset{a}{\sim} g \iff g \underset{a}{\sim} f$.

Théorème 12.66.

On a $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$.
En particulier, si $h \underset{a}{=} \mathrm{o}(f)$, alors $f + h \underset{a}{\sim} f$.

Théorème 12.67.

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe strict au voisinage de a.

Théorème 12.68.

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f a une limite en a si et seulement si g a une limite en a. Le cas échéant, $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$.

Proposition 12.69 - Changement de variable dans un équivalent.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et ϕ est une fonction de limite a en b, alors $f \circ \phi \underset{b}{\sim} g \circ \phi$ (en prenant garde à ce que ϕ et les composées soient bien définies).

Démonstration.
On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$ et $\phi(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} a$ donc, par composition de limite, on obtient le résultat. □

12.5.3. Comparaison des fonctions usuelles

Théorème 12.70.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b) \in \mathbf{R}^6$ avec $0 < \alpha < \beta$, $0 < \gamma < \delta$ et $1 < a < b$.

- **Comparaison des « infiniment grands » usuels en** $+\infty$.

$$|\ln(x)|^\gamma \ll |\ln(x)|^\delta \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x \ll x^x.$$

- **Comparaison des « infiniment petits » usuels en** $+\infty$.

$$\frac{1}{x^x} \ll \frac{1}{b^x} \ll \frac{1}{a^x} \ll \frac{1}{x^\beta} \ll \frac{1}{x^\alpha} \ll \frac{1}{|\ln(x)|^\delta} \ll \frac{1}{|\ln(x)|^\gamma}.$$

- **Comparaison des « infiniment grands » usuels au voisinage de** 0.

$$|\ln(x)|^\gamma \ll \frac{1}{x^\alpha} \ll \frac{1}{x^\beta}.$$

- **Comparaison des « infiniment petits » usuels au voisinage de** 0.

$$x^\beta \ll x^\beta |\ln(x)|^\gamma \ll x^\alpha.$$

12.5.4. Équivalents classiques

Proposition 12.71 - Équivalents classiques.

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $1 - \mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Démonstration.
Puisque sin est dérivable en 0 avec $\sin'(0) = 1$, on a $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Or $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$. On a donc $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{4}$, puis $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - 1}{\mathrm{ch}(x) + 1} = \dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{ch(x) + 1}$. Or $\mathrm{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{ch}(x) + 1) = 2$, d'où $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

Les autres équivalents sont laissés en exercice. □

Remarque technique 12.72. On peut obtenir des équivalents en d'autre point qu'en 0, en faisant un changement de variable (cf. Proposition 12.69).

Exercice d'application 12.73. Déterminer un équivalent au point a, pour chacune des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \ln(x)$ en $a = 1$;
2. $x \longmapsto \mathrm{sh}(\frac{1}{x})$ en $a = +\infty$;
3. $x \longmapsto \cos(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$;
4. $x \longmapsto \sqrt{\cos(x)} - 1$ en $a = 0$;
5. $x \longmapsto \tan(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$.

$\hookrightarrow$

1. On a, pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \ln(1 + (x-1))$ avec $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$, d'où $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
2. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
3. On a $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$.
4. $\sqrt{\cos(x)} - 1 = \sqrt{\cos(x) - 1 + 1} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}(\cos(x) - 1)$ car $\lim_{x\to 0} \cos(x) - 1 = 0$. On en déduit $\sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{-x^2}{4}$.
5. $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(x - \frac{\pi}{2})} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$.

◇◇

12.6. Continuité

Dans toute la suite, I sera un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point. a est un élément de $\overline{\mathbf{R}}$ et soit $a \in I$, soit a est une extrémité de I.

12.6.1. Continuité en un point

Définition 12.74.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \qquad \big(|x - a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue en** a.

⚠ **Attention** ⚠**.** Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie !! Ainsi, il n'y a **aucun sens** à étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-\frac{1}{\sqrt{x}}) \end{array}$$

puisque celle-ci n'est pas définie en 0.

En faisant le lien avec la notion de limite, on obtient immédiatement la caractérisation suivante.

Proposition 12.75 - Caractérisation avec les limites.

La fonction f est continue en a si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche en a et que ces limites sont égale à $f(a)$.

Exemple 12.76. • $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 puisque $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.

- Soit $m \in \mathbf{Z}$. La fonction partie entière n'est pas continue en m puisqu'elle n'admet pas de limite finie en un tel point (la limite à gauche de la fonction partie entière en m n'est pas égale à $\lfloor m \rfloor$).

Exercice d'application 12.77. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbf{R}^+$ par $\begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall x > 0,\ g(x) = \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} \end{cases}$ est continue en 0.

$\hookrightarrow$ g est définie en 0 et $g(0) = 0$. g est définie à droite de 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} -1/\sqrt{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g admet $g(0) = 0$ pour limite en 0, donc est continue en 0.

Définition 12.78.

On dit que la fonction f est **continue à gauche en** a (respectivement **continue à droite en** a) lorsqu'elle admet une limite à gauche en a vérifiant $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$ (respectivement lorsqu'elle admet une limite à droite en a vérifiant $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$).

Exemple 12.79. Soit $m \in \mathbf{Z}$. La fonction partie entière est continue à droite en m mais n'est pas continue à gauche en ce point.

En effet, pour tout $x \in]m, m+1[$, $\lfloor x \rfloor = m$, donc $\lim\limits_{x \to m^+} = m$. Comme $\lfloor m \rfloor = m$, on en déduit que E est continue à droite en m.

$\forall x \in]m-1, m[$, $\lfloor x \rfloor = m-1$, donc $\lim\limits_{x \to m^+} = m - 1 \neq \lfloor m \rfloor$. Donc $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue à droite en m.

Proposition 12.80.

La fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Exercice d'application 12.81. On pose $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Étudier la continuité de f en m.

$\hookrightarrow$ $f(m) = m + (m-m)^2 = m$.
Pour tout $x \in]m, m+1[$, on a $f(x) = x + (x-m)^2$. On a donc $\lim\limits_{x \to m^+} f(x) = m = f(m)$ et f est continue à droite en m.
Pour tout $x \in]m-1, m[$, on a $f(x) = x + (x - (m-1))^2$. On a donc $\lim\limits_{x \to m^+} f(x) = m + 1 \neq f(m)$ et f est n'est pas continue à droite en m.
f n'est pas continue à droite en m donc f n'est pas continue en m

En faisant le lien entre les notions de limites à gauche et à droite, et la notion de limite, on obtient le résultat suivant.

Proposition 12.82.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite.

12.6.2. Prolongement par continuité

Définition 12.83.

Soit f une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$. On dit que f est prolongeable par continuité au point a s'il existe une fonction $g \in \mathcal{F}(I,\mathbf{R})$ telle que $g|_{I\setminus\{a\}} = f$ et g est continue en a. On dit alors que g est un **prolongement par continuité** de f.

Exemple 12.84. Considérons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

g est un prolongement de f par construction. Il reste à voir que g est continue en 0.
On sait que $\sin \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, puis $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1$, et $g(0) = 1$. Ainsi g est continue en 0.

Théorème 12.85.

Soit f définie sur $I\setminus\{a\}$. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a. Le cas échéant, ce prolongement par continuité est unique et est défini par :

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \lim\limits_a f & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

Démonstration.

- Supposons f prolongeable par continuité en a. Soit g un prolongement par continuité de f en a. g est continue en a, donc admet une limite finie en a : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.
  Pour $x > a$, $g(x) = f(x)$, donc f est une limite finie à droite en a. De même, f admet une limite finie à gache en a, et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = g(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
  f a donc une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a)$. Donc

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \lim\limits_a f & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

  On vient de montrer que si g existe, elle est unique (et définie comme avant).
- Réciproquement, supposons que f a une limite finie en a. Considérons

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \lim\limits_a f & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

  Alors g est un prolongement de f. De plus, g est continue en a. Donc f est prolongeable par continuité. □

Exercice d'application 12.86. Montrer qu'on peut prolonger la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2\sin(1/x) \end{array}$ par continuité en 0.

$\hookrightarrow \forall x > 0$, $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = \lim\limits_{x\to 0^+} -x^2 = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, f admet 0 pour limite à droite en 0.

$\mathbf{R}^\star$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $f(-x) = (-x)^2 \sin(1/(-x)) = -x^2 \sin(1/x) = -f(x)$. Donc f est impaire, d'où l'on déduit que f admet 0 pour limite à gauche en 0.

Donc f n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0^-} = 0$, donc f peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Exercice d'application 12.87. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

$\hookrightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi f a une limite finie en 0. Donc f est prolongeable par continuité en 0, et ce prolongement est donné par

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

12.6.3. Opérations

Proposition 12.88.

Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeur dans $\mathbf{R}$ et continues en a. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. $f + g$ est continue en a.
2. λf est continue en a.
3. $f \times g$ est continue en a.
4. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.

Démonstration.
Ces résultats proviennent directement des résultats sur les opérations de limites.

1. Par continuité de f en a, on sait que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$. De même, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. On en déduit que $f+g$ converge en a avec $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$, ce qui entraîne que $f + g$ est continue en a. □

Proposition 12.89.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{F}(I, R)$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbf{R})$. On suppose que $f(I) \subset J$.
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration.
Puisque f est continue en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. De même, $\lim\limits_{x\to f(a)} g(x) = g(f(a))$. Ainsi, par composition de limite, $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$ et par conséquent $g \circ f$ est continue en a. □

12.6.4. Image d'une suite convergente

Proposition 12.90.

Si la fonction f est continue en a, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de D convergeant vers a,

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

Démonstration.
C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la limite. □

◇◇

Remarque technique 12.91. La contraposée de ce résultat permet de justifier la discontinuité d'une fonction en un point a. Il suffit de trouver une suite (u_n) tendant vers a telles que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers $f(a)$.

Exercice d'application 12.92. Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbf{R}^\star,\ f(x) = \sin(1/x) \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

↪ Pour tout n entier naturel non-nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$. Alors la suite u ainsi définie tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $f(u_n) = \sin(1/u_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$.

Donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1. Or $f(0) = 0$ donc par la contraposée de la Proposition 12.90 f n'est pas continue en 0.

◇◇

Corollaire 12.93.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur le $[a\,;\,b]$. On suppose que $[a\,;\,b]$ est stable par f (*i.e.* $f([a\,;\,b]) \subset [a\,;\,b]$). On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a,b]$ et la relation

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un élément ℓ de $[a\,;\,b]$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$, autrement dit, ℓ est un point fixe de la fonction f sur $[a\,;\,b]$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose P_n : « u_n est bien défini et $u_n \in [a,b]$" ».
u_0 est fixé dans $[a\,;\,b]$, donc P_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n soit vraie. Alors $u_n \in [a\,;\,b]$, donc $f(u_n)$ a un sens et u_{n+1} est bien défini. Comme $f([a\,;\,b]) \subset [a\,;\,b]$, $u_{n+1} \in [a\,;\,b]$. Donc P_{n+1} est vraie. D'où P_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ par récurrence.
Comme la suite u est minorée par a et majorée par b, sa limite est dans $[a\,;\,b]$. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite convergeant vers une limite ℓ, $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ converge également vers ℓ en tant que suite-extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. D'après la proposition précédente, $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(\ell)$, donc $f(\ell) = \ell$. □

12.7. Fonctions continues sur un intervalle

12.7.1. Ensemble des fonctions continues sur I

Définition 12.94.

On dit que f est **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I. On note $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ (ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Exemple 12.95.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbf{R}$. Plus généralement, une fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.
- Pour tout $m \in \mathbf{Z}_-^\star$, la fonction $x \longmapsto x^m$ est continue sur $\mathbf{R}^\star$. En particulier, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^\star$.
- sin et cos sont continues sur $\mathbf{R}$. tan est continue sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbf{Z}$.
- exp est continue sur $\mathbf{R}$.
- ln est continue sur $\mathbf{R}_+^\star$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^\star$.

Proposition 12.96.

Soit $(f, g) \in (\mathscr{C}(I, \mathbf{R}))^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I.
Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la continuité ponctuelle. □

Proposition 12.97.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbf{R})$, $g \in \mathscr{C}(J, \mathbf{R})$. On suppose que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathscr{C}(I, \mathbf{R})$.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la proposition sur la continuité ponctuelle d'une composée de fonctions. □

Exemple 12.98. Si f est continue sur I, alors $|f[$ est continue sur I.

12.7.2. Image d'un intervalle

Théorème 12.99 - Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $a \leqslant b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$ (c'est-à-dire tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Il existe alors un élément $c \in [a\,;\,b]$ vérifiant $f(c) = 0$.

Démonstration (procédé de dichotomie).
On se place dans le cas où $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) =\geqslant 0$.

On va construire par récurrence deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ de telle façon qu'elle soient adjacentes et convergentes vers le c de l'énoncé. Plus précisément, on va les construire de telle sorte que :

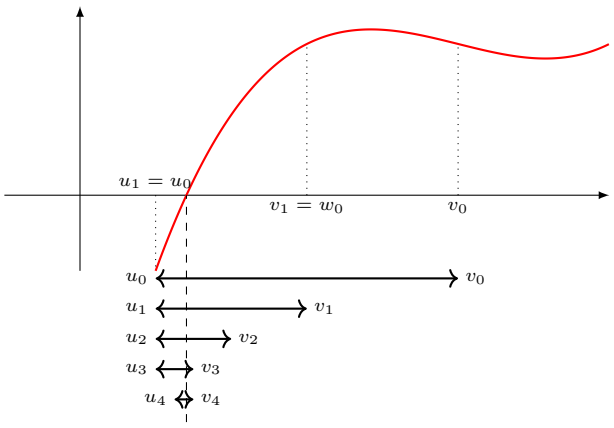
1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit croissante.
2. $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n - u_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_n) \leqslant 0$ et $f(v_n) \geqslant 0$.

Pour tout n, on pose P_n : "Les suites u et v sont bien définies jusqu'au rang n et vérifient les 4 propriétés ci-dessus jusqu'à ce rang".

Initialisation : On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Alors on a bien $f(u_0) \leqslant 0$, $g(v_0) \geqslant 0$ et $v_0 - u_0 = b - a$. Donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose P_n, c'est à dire que les suites u et v sont construites jusqu'au rang n.

On pose $w_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, qui est donc le milieu du segment $[u_n, v_n]$.



- Si $f(w_n) \leqslant 0$, on pose $u_{n+1} = w_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
  Alors $u_{n+1} \geqslant u_n$, $v_{n+1} \leqslant v_n$, $f(u_{n+1}) = f(w_n) \leqslant 0$, $f(v_{n+1}) = f(v_n) \geqslant 0$ et
  $$v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + v_n) = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}.$$
- Si $f(w_n) > 0$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = w_n$.
  Alors $u_{n+1} \geqslant u_n$, $v_{n+1} \leqslant v_n$, $f(u_{n+1}) = f(u_n) \leqslant 0$, $f(v_{n+1}) = f(w_n) \geqslant 0$ et
  $$v_{n+1} - u_{n+1} = w_n - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Dans les deux cas, on a bien défini u_{n+1} et v_{n+1} tels que les 4 propriétés soient vérifiées jusqu'au rang $n+1$. Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$. u est croissante, v est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers une limite commune $c \in [u_0, v_0] = [a, b]$.

f étant continue sur $[a,b]$, elle est continue en c. Ainsi, d'après la Proposition 12.90, c $f(u_n) \to f(c)$ et $f(v_n) \to f(c)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f(u_n) \leqslant 0$ et $f(v_n) \leqslant 0$ donc, par passage à la limite, $f(c) \leqslant 0$ et $f(c) \geqslant 0$. Donc $f(c) = 0$.

Dans le cas où $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$, on applique cette preuve à $-f$. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Le théorème des valeurs intermédiaires **ne donne pas l'unicité** du point d'annulation de la fonction.
Pour obtenir l'unicité, on utilise le théorème de la bijection (et il faut donc montrer la stricte monotonie en plus de la continuité). Voir Théorème 12.107.

Les hypothèses « I est un intervalle » et « f est continue sur I » sont essentielles.

Exemple 12.100.
- $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^\star$, $f(-1) < 0$ et $f(1) > 0$, mais f ne s'annule pas sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,1[$.
- La fonction $f : \begin{array}{ccc} [0\,;\,2] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \end{array}$ est définie sur un segment avec $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ et pourtant cette fonction ne s'annule pas.

La contraposée de ce théorème fournit également un énoncé remarquable.

Corollaire 12.101.

Si une fonction continue sur un intervalle ne s'y annule pas, alors elle y garde un signe constant.

Corollaire 12.102 - Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I tels que $a \leqslant b$.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration.
Soit y réel entre $f(a)$ et $f(b)$. On pose $g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - y \end{array}$. Alors g est continue sur I.

Comme y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(a)-y$ et $f(b)-y$ sont de signes opposés. Donc $g(a)g(b) \leqslant 0$. Alors, d'après le Théorème 12.99, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = y$. □

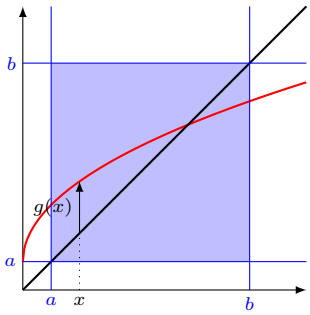
Exercice d'application 12.103. Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

↪ Soit n un entier impair, $a_n \in \mathbf{R}^\star$ et $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
f est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n$. Donc f est du signe de a_n au voisinage de $+\infty$ et du signe de $-a_n$ au voisinage de $-\infty$. Il existe donc $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(A)f(B) \leqslant 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f(c) = 0$, d'où le résultat.

Exercice d'application 12.104. Soit $f : [a\,;\,b] \longrightarrow [a\,;\,b]$ une fonction continue.

Montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = c$.

↪



On pose $g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x - f(x) \end{array}$. Alors g est continue sur $[a,b]$. $g(a) = a - f(a) \leqslant 0$ car $f(a) \in [a,b]$.
De même, $g(b) = b - f(b) \geqslant 0$ car $f(b) \in [a,b]$. Donc $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = c$.

Une conséquence topologique du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 12.105.

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Démonstration.
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur I.

Soient z_1 et z_2 dans $f(I)$ tels que $z_1 \leqslant z_2$. Par définition de $f(I)$, il existe y_1 et y_2 dans I tels que $f(y_1) = z_1$ et $f(y_2) = z_2$.

Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $z_1 \leqslant x \leqslant z_2$, cela signifie que x est compris entre $f(y_1)$ et $f(y_2)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $w \in I$ tel que $f(w) = x$. Donc $x \in f(I)$.

Ainsi, on a montré que pour tout z_1 et z_2 de $f(I)$, on a $\{x \in \mathbf{R}, \mid z_1 \leqslant x \leqslant z_2\} \subset f(I)$. Donc $f(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$. □

On peut se demander si le type d'un intervalle (c'est-à-dire fermé, borné, semi-ouvert, ...) est conservé par une application continue. Nous allons voir que la réponse est positive dans le cas d'un segment. Par contre, pour les huit autres types d'intervalles, sans autre hypothèse que la continuité, le type d'intervalle n'est pas conservé.

12.7.3. Image d'un segment par une fonction continue

Théorème 12.106.

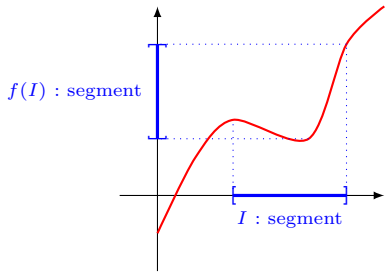
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a\,;\,b], \mathbf{R})$. Alors $f([a\,;\,b])$ est un segment : f est bornée sur $[a\,;\,b]$ et atteint ses bornes.
Autrement dit,

$$\exists c_1 \in [a;b], \quad f(c_1) = \inf_{[a;b]} f = \min_{[a;b]} f \qquad \text{et} \qquad \exists c_2 \in [a;b], \quad f(c_2) = \sup_{[a;b]} f = \max_{[a;b]} f.$$

et

$$f([a\,;\,b]) = \left[\min_{[a,b]} f\,;\,\max_{[a,b]} f\right].$$

Démonstration.
Admis. □



L'hypothèse « $[a\,;b]$ est un segment » est essentielle. Prenons

$$\begin{array}{rccc} f: & [1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

On a $f \in \mathscr{C}([1\,;+\infty[)$ et pour tout $x \geqslant 1$, $0 < \frac{1}{x} \leqslant 1$. Ainsi f est bien bornée, mais elle n'a pas de minimum.

12.7.4. Théorème de la bijection

Théorème 12.107 - Théorème de la bijection.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors

(i) $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.

(ii) f réalise une bijection de I sur $f(I)$: la fonction $\widetilde{f}: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection.

(iii) La bijection réciproque $\widetilde{f}^{-1}$ de $\widetilde{f}$ est continue sur $f(I)$ et $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.

Démonstration.
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante.

(i) $f(I)$ est un intervalle d'après le Corollaire 12.105. On a montré dans le chapitre précédent que les bornes supérieures et inférieures de cet intervalle sont justement les limites de f aux bornes de I.

(ii) La fonction $\widetilde{f}$ est surjective par définition. Montrons qu'elle est injective. Soient x et x' dans I tels que $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x')$. La fonction f étant strictement croissante, $\widetilde{f}$ l'est aussi. Si $x > x'$, alors $\widetilde{f}(x) > \widetilde{f}(x')$ par stricte croissance. Si $x < x'$, alors $\widetilde{f}(x) < \widetilde{f}(x')$. Ces deux possibilités sont absurdes, donc $x = x'$.
$\widetilde{f}$ est bien injective, donc elle est bijective.

(iii) • Montrons que $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement croissante. Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. On pose $x_1 = \widetilde{f}^{-1}(y_1)$ et $x_2 = \widetilde{f}^{-1}(y)(y_2)$. Si $x_1 \geqslant x_2$, alors par croissance de $\widetilde{f}$, on a $y_1 \geqslant y_2$. C'est absurde. Donc $x_1 < x_2$. C'est à dire $\widetilde{f}^{-1}(y_1) < \widetilde{f}^{-1}(y_2)$. Donc $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement croissante.
• Soit $y_0 \in f(I)$. Montrons que $\widetilde{f}$ est continue en y_0. On note $x_0 = \widetilde{f}^{-1}(y_0)$.
Soit $\epsilon > 0$.

- Si x_0 n'est pas une extrémité de I : On pose $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$ tel que $[x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'] \subset I$. Un tel ε' existe car I est un intervalle dont x_0, n'est pas une extrémité. On pose $x_1 = x_0 - \varepsilon'$, $x_2 = x_0 + \varepsilon'$, $y_1 = \widetilde{f}(x_1)$, $y_2 = \widetilde{f}(x_2)$.
  Alors, par stricte croissance de $\widetilde{f}$, on a $\widetilde{f}(x_1) < \widetilde{f}(x_0) = y < \widetilde{f}(x_2)$. On pose $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$. On a bien $\eta > 0$.
  Pour tout $y \in f(I)$, si $|y - y_0| \leqslant \eta$, alors $y \in [y_1, y_2]$. Donc, par stricte croissance de $\widetilde{f}^{-1}$, $\widetilde{f}^{-1}(y_1) < \widetilde{f}^{-1}(y) < \widetilde{f}^{-1}(y_2)$, c'est à dire $x_1 < \widetilde{f}^{-1}(y) < x_2$ et donc $\widetilde{f}^{-1}(y_0) - \varepsilon' < \widetilde{f}^{-1}(y) < \widetilde{f}^{-1}(y_0) + \varepsilon'$. D'où
  $$\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)\right| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon.$$

- Si x_0 est une extrémité de I. Supposons que x_0 est la plus petite extrémité de I. Alors y_0 est la plus petite valeur prise par $\widetilde{f}$. (Le cas où x_0 est la plus grande extrémité est similaire)

  On pose $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$ tel que $[x_0, x_0 + \varepsilon'] \subset I$. Un tel ε' existe car x_0 est l'extrémité gauche de I. On pose $x_2 = x_0 + \varepsilon'$, $y_2 = \widetilde{f}(x_2)$.

  Alors, par stricte croissance de $\widetilde{f}$, on a $y = \widetilde{f}(x_0) < \widetilde{f}(x_2)$. On pose $\eta = y_2 - y$. On a bien $\eta > 0$.

  Pour tout $y \in f(I)$, si $|y - y_0| \leqslant \eta$, alors $y \in [y_0, y_2]$. Donc, par stricte croissance de $\widetilde{f}^{-1}$, $\widetilde{f}^{-1}(y_0) < \widetilde{f}^{-1}(y) < \widetilde{f}^{-1}(y_2)$, c'est à dire $x_0 < \widetilde{f}^{-1}(y) < x_2$ et donc $\widetilde{f}^{-1}(y_0) < \widetilde{f}^{-1}(y) < \widetilde{f}^{-1}(y_0) + \varepsilon'$. D'où

$$\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)\right| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon.$$

Dans tous les cas, on a montré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in f(I), |y - y_0| \leqslant \eta \Rightarrow \left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)\right| \leqslant \epsilon.$$

Donc $\widetilde{f}^{-1}$ est continue en y_0. Cela est vrai pour tout $y_0 \in f(I)$, donc $\widetilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

□

Exercice d'application 12.108. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, on note $f(\alpha)$ l'unique solution sur $\mathbf{R}^\star$ de l'équation d'inconnue réelle x

$$(E) \qquad \alpha x^3 + \alpha x - 1 = 0$$

Montrer que f est bien définie est bien définie et donner ses variations.

↪ On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^3+x} \end{array}$. Alors $\alpha x^3 + \alpha x - 1 = 0$ si et seulement si $g(x) = \alpha$. g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $g'(x) = -\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x)^2} < 0$.

Donc g' est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^\star$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim x \to +\infty g(x) = 0$, donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^\star$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. La fonction f est la bijection réciproque de g donc est bien définie et est strictement croissante.

12.8. Fonctions à valeurs complexes

12.8.1. Limite d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

On peut étendre aux fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ toutes les propriétés des fonctions réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ (il ne sera plus question de fonction croissante, décroissante, majorée, minorée). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 12.109.

Soit I une partie de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.
On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbf{C}$ en $a \in \mathbf{R}$ lorsqu'elle est définie au voisinage de a et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \qquad (\underbrace{|t-a|}_{\text{val. abs.}} \leqslant \eta) \Longrightarrow (\underbrace{|f(t)-\ell|}_{\text{module}} \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbf{C}$ en $+\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $+\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in I, \qquad (t \geqslant A) \Longrightarrow (|f(t)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbf{C}$ en $-\infty$ lorsqu'elle est définie au voisinage de $-\infty$ et qu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in I, \qquad (t \leqslant A) \Longrightarrow (|f(t)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

On peut synthétiser :

Définition 12.110.

Soit $\ell \in \mathbf{C}$, $a \in I \cup \{\inf I, \sup I\}$. On dit que f a pour limite ℓ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists V \in \mathcal{V}(a), \ \forall x \in I, \quad x \in V \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Comme dans le cas réel, la limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

Pour les fonctions à valeurs complexes, seules les limites finies ont un sens. Une fonction à valeur dans $\mathbf{C}$ ne peut pas admettre $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Les résultats suivants restent valables.

Proposition 12.111.

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1. Une fonction à valeurs complexes qui admet une limite en a est bornée au voisinage de a (cela signifie que son module $|f|$ est une fonction réelle majorée au voisinage de a).
2. Si f et g sont deux fonctions à valeurs complexes qui possèdent une limite en a, alors
   - la somme $f+g$ possède une limite en a et $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$,
   - le produit fg possède une limite en a et $\lim\limits_a (fg) = \lim\limits_a f \times \lim\limits_a g$,
   - si $\lim\limits_a g \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini au voisinage de a, possède une limite en a et $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim\limits_a f}{\lim\limits_a g}$.

Le théorème suivant est fondamental. Il établit que l'existence d'une limite pour une fonction complexe équivaut à l'existence d'une limite pour sa partie réelle et pour sa partie imaginaire.

Théorème 12.112.

Une fonction complexe f tend vers $\ell \in \mathbf{C}$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$ si, et seulement si, les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ admettent respectivement $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$ pour limite en a.

Démonstration.
Si les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ tendent respectivement vers les réels α et β en a, alors la somme $f = \mathfrak{Re}(f) + i\,\mathfrak{Im}(f)$ tend vers $\ell = \alpha + i\beta$ en a, d'après la proposition précédente.

Supposons réciproquement qu'une fonction f, définie sur une partie I de $\mathbf{R}$, tend vers $\ell = \alpha + i\beta$ en a, où α et β sont deux réels.

(on fait la démonstration lorsque $a \in I$ est un nombre réel. On l'adaptera facilement aux cas où $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.)

Soit $\varepsilon > 0$. Le fait que f tend vers ℓ en a assure qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on a :

$$\forall t \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ \big|f(t) - \ell\big| = \big|\big(\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha\big) + i\big(\mathfrak{Im}(f)(t) - \beta\big)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$,

$$\big|\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha\big| \leqslant \big|\big(\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha\big) + i\big(\mathfrak{Im}(f)(t) - \beta\big)\big| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\big|\mathfrak{Im}(f)(t) - \beta\big| \leqslant \big|\big(\mathfrak{Re}(f)(t) - \alpha\big) + i\big(\mathfrak{Im}(f)(t) - \beta\big)\big| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc démontré que $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ tendent respectivement vers α et β en a. □

12.8.2. Continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

Définition 12.113.

Soit I une partie de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.

- On dit que f est **continue en** $a \in I$ si et seulement si f tend vers $f(a)$ en a.
- On dit que f est **continue sur** I si et seulement si f est continue en tout point de I.

Proposition 12.114.

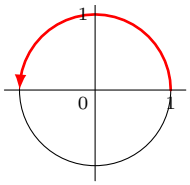
Soit I une partie de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$.
La fonction f est continue en $a \in I$ (respectivement sur I) si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues en $a \in I$ (respectivement sur I).
La somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), de deux fonctions à valeurs complexes continues sur I est continue sur I.

Le théorème des valeurs intermédiaires, et le théorème de la bijection faisant appel aux propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, ils n'existent pas pour les fonctions à valeurs complexes.

Exemple 12.115. La fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{ix} \end{array}$ est continue.

On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$, mais f ne s'annule jamais !

Le théorème des valeurs intermédiaires ne peut pas s'appliquer ici.



12.8.3. Notion de fonctions bornées

Définition 12.116.

Soit $a \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$. On dit que f est **bornée** au voisinage de a lorsque

$$\exists A \in \mathbf{R},\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in I, \quad x \in V \Longrightarrow |f(x)| \leqslant A.$$

Proposition 12.117.

Si f admet une limite au voisinage de a, alors f est bornée au voisinage de a.

12.8.4. Relations de comparaisons

Les notions de fonctions négligeables, dominées, équivalentes s'étendent aux fonctions à valeurs complexes (excepté les notions en lien avec la positivité).

Chapitre 13

Dérivation des fonctions d'une variable réelle

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivée.

Charles Hermite [1]

Dans ce cours, I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ non vides et non réduits à un point.

13.1. Fonctions dérivables

13.1.1. Dérivabilité en un point

Définition 13.1.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction f est dite **dérivable en** a si, et seulement si, la fonction τ_a, appelée **taux d'accroissement de** f **en** a et définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a. Cette limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** a, et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. Autrement dit, si les limites ci-dessous existent,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 13.2. Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Soit $a \in \mathbf{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{a\}$,

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

1. Charles HERMITE, mathématicien français (1822-1901)

Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\tau_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice d'application 13.3. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star, \quad f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0) = g(0) = 0.$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $\tau_0^f(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\sin(1/x)}{x} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or, $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $\tau_0^g(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\sin(1/x)}{x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $-x \leqslant \tau_0^g(x) \leqslant x$. D'après le théorème des gendarmes, $\tau_0^g(x)$ converge vers 0 en 0 donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

13.1.2. Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- On suppose que f est dérivable en a.
  Posons $\varepsilon : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases} \end{array}$
  La fonction ε vérifie $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ (limite à gauche = limite à droite = valeur au point) et l'on peut écrire :
  $$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$
- Supposons réciproquement qu'il existe une fonction ε définie sur I et un nombre réel α tels que :
  $$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$
  Alors, pour tout $x \in I\backslash\{a\}$,
  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha + \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha$$
  donc f est dérivable en a et le nombre dérivé de f en a vaut α.

Proposition 13.4.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I.
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, il existe un réel α et une fonction ε définie sur I tels que

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, α est nécessairement égal à $f'(a)$ et l'on dit que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a.

Exemple 13.5. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$ donc on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(x) = 1 + x + x\varepsilon(x) \qquad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

13.1.3. Dérivabilité et continuité

Proposition 13.6.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I.
Si f est dérivable en a **alors** f est continue en a.

Démonstration.
Supposons que f est dérivable en a. Alors, d'après la Proposition 13.4, il existe une fonction ε définie sur I et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $\lim_a \varepsilon = 0$ et pour tout x dans I, $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

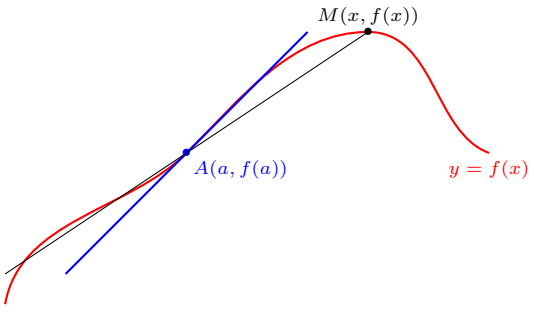
Donc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a. □

⚠ **Attention** ⚠**.** La réciproque de ce résultat est **FAUSSE**. La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Soit $x \in \mathbf{R}^\star$. Alors $\tau_0(x) = \frac{|x|}{x}$. Donc $\tau_0(x) = 1$ si $x > 0$ et $\tau_0(x) = -1$ si $x < 0$, ce qui implique que $\lim x \to 0^+ |x| = 1$ et $\lim x \to 0^- |x| = -1$.

Donc $x \longmapsto \tau_0(x)$ a une limite à gauche différente de sa limite à droite donc n'admet pas de limite en 0. Donc $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

13.1.4. Interprétation graphique



Pour tout $x \in I$, la valeur $\tau_a(x)$ représente la pente de la sécante joignant les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ de la courbe représentative de f.

Si f est dérivable, cette sécante a une position limite, que l'on appelle **tangente** à la courbe en A. Le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de cette tangente.

Proposition 13.7.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I.

- Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f possède une tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$ et une équation cartésienne de celle-ci est
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{matrix} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{matrix}$ et $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{matrix} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{matrix}$, la fonction f n'est pas dérivable en a mais la tangente à la courbe en a existe et cette tangente est verticale.

Remarque 13.8. On peut démontrer que la fonction $g : x \longmapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est la meilleure approximation de f au voisinage de a par une fonction affine.

13.1.5. Fonction dérivée

Définition 13.9.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I. Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur** I et la fonction $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ est appelée la **fonction dérivée** de f, et se note f', Df ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Proposition 13.10.

Si f est une fonction dérivable sur I alors elle est continue sur I.

⚠ **Attention** ⚠. La réciproque est **FAUSSE**. Une fonction continue sur un intervalle n'est pas nécessairement dérivable sur cet intervalle.

13.1.6. Dérivée à droite et à gauche en un point

Définition 13.11.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I.
• Si f est définie à droite de a, on dit que f est **dérivable à droite** en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à droite en a. Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé à droite** de f en a et se note $f'_d(a)$. Autrement dit, si les limites suivantes existent et sont finies,

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

• Si f est définie à gauche de a, on dit que f est **dérivable à gauche** en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à gauche en a. Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé à gauche** de f en a et se note $f'_g(a)$. Autrement dit, si les limites suivantes existent et sont finies,

$$f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple 13.12. La fonction $f : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Par contre, elle est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. (cf calcul précédent).

Remarque 13.13. La courbe représentative d'une fonction f qui admet une dérivée à gauche (resp. à droite) en a possède une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a. Son équation est $y = f(a) + f'_g(a)(x-a)$ (resp. $y = f(a) + f'_d(a)(x-a)$).

Si la fonction τ_a tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ à gauche (resp. à droite) en a, alors la courbe de la fonction f possède une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a.

Proposition 13.14.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I. Lorsque a n'est pas une extrémité de I, la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a et vérifie $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration.
Comme la fonction τ_a n'est pas définie en a, et comme a n'est pas une extrémité de I, celle-ci admet une limite en a si, et seulement si, elle possède une limite à droite et à gauche en a qui sont égales. □

Exercice d'application 13.15. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

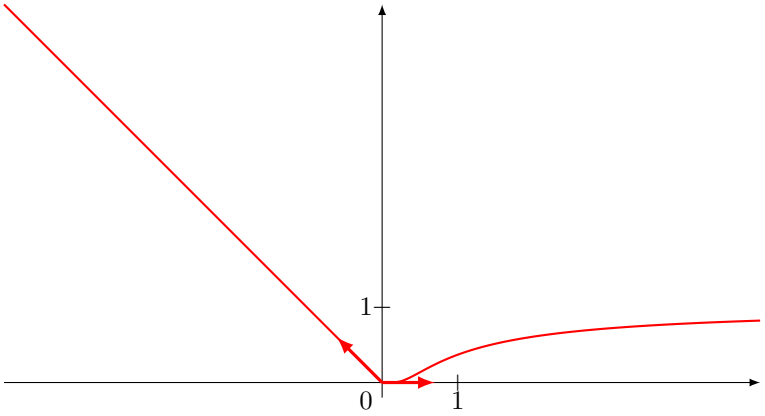
↪ Notons τ_0 le taux d'accroissement de f en 0. On a, pour tout $x < 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{\mathrm{e}^{-1/x} - 0}{x - 0}$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau_0(x) = 0$ par croissances comparées, ce qui signifie que f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 0$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

donc en particulier f est dérivable à gauche en 0, avec $f'_g(0) = -1$.



Puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

Corollaire 13.16.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I.
Si a n'est pas une extrémité de I alors si f est
- dérivable à droite en a alors f est continue à droite en a.
- dérivable à gauche en a alors f est continue à gauche en a.
- dérivable à droite et à gauche en a alors f est continue en a.

Remarque 13.17. Dans le troisième point du corollaire précédent, il n'est pas nécessaire que la dérivée à gauche et à droite de f en a soient égales.

13.2. Opérations sur les dérivées

13.2.1. Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Proposition 13.18.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point de I.
1. Si f et g sont dérivables en a alors $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. Si f et g sont dérivables en a alors fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. Si g est dérivable en a et si $g(a) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que g ne s'annule pas sur $I \cap J$, la fonction $\dfrac{1}{g}$ bien définie sur $I \cap J$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Si de plus f est dérivable en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ bien définie sur $I \cap J$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Démonstration. 1. Si f et g sont dérivables en a : Alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Comme $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ et $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$, on en déduit que $x\longmapsto\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$ converge vers $f'(a)+g'(a)$ en a. Donc $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

2. Si f et g sont dérivables en a : Alors, pour tout $x\in I\setminus\{a\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}&=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\&=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(g(x))+(f(a))\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Comme g est dérivable en a, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$. De plus, elle est continue en a donc $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$. f étant dérivable en a et $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

Ainsi, $x\longmapsto\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}$ converge en a et $\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$. Donc fg est dérivable et $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$.

3. Si g est dérivable en a et $g(a)\neq 0$. g ne s'annule pas sur $I\cap J$. Alors pour tout $x\in I\cap J$, on a

$$\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)-\left(\frac{1}{g(a)}\right)}{x-a}=\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}=\frac{1}{g(x)g(a)}\cdot\frac{-(g(x)-g(a))}{x-a}.$$

Par continuité de g en a, $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}=\frac{1}{g(a)^2}$ et par dérivabilité de g en a, on a $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$. Donc $\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)-\left(\frac{1}{g(a)}\right)}{x-a}=\frac{-g'(a)}{g(a)^2}$. Ainsi, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Si f est également dérivable en a, alors d'après le point 2, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=f(a)\frac{-g'(a)}{g(a)^2}+f'(a)(\frac{1}{g(a)})=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Donc $\frac{f}{g}$ est bien dérivable en a et sa dérivée en a est bien $\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

□

Corollaire 13.19.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a\in I$. Si f et g sont dérivables en a, alors pour tous réels λ et μ, l'application $\lambda f+\mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda f'(a)+\mu g'(a)$.

Remarque 13.20. En particulier, il ne faut pas utiliser la formule de dérivation du produit pour dériver une fonction de la forme λf où λ est une constante !!!! (Un chaton meurt à chaque fois que quelqu'un le fait).

Proposition 13.21.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
1. Si f et g sont dérivables sur I alors $f+g$ est dérivable sur I et

$$(f+g)' = f' + g'.$$

2. Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. Si g est dérivable sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{g}$ correctement définie sur I est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

4. Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{f}{g}$, correctement définie sur I, est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Corollaire 13.22.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Si f et g sont dérivables sur I, alors pour tous réels λ et μ, l'application $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

13.2.2. Dérivée d'une fonction composée

Proposition 13.23.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Soit a un point de I.
1. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

2. Si f et g sont respectivement dérivables sur I et $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f'.(g' \circ f).$$

Démonstration.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Comme f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$, on a $\lim\limits_{y \to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a))$. Donc

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(f(a))f'(a).$$

Donc $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. □

13.2.3. Dérivée de la bijection réciproque d'une bijection

Proposition 13.24.

Soit f une bijection **continue** strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J. Soit b un point de J. On pose $a = f^{-1}(b)$.
1. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b, mais sa représentation graphique présente une tangente verticale au point de coordonnées $(b, f^{-1}(b))$.
2. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration.
Soit $x \in J \setminus \{b\}$. On a, en posant $y = f^{-1}(x)$,

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \frac{y - a}{f(y) - f(a)}.$$

D'après le théorème de la bijection, $f^{-1}(x)$ tend vers a quand x tend vers b. Comme f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{y \to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a)$.

• Si $f'(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{y \to a} \frac{y-a}{f(y)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$, donc $\lim\limits_{x \to b} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(b)}{x-b} = \frac{1}{f'(a)}$. Ainsi, f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

• Si $f'(a) = 0$, alors $\lim\limits_{y \to a} \frac{y-a}{f(y)-f(a)} = +\infty$. Donc f^{-1} n'est pas dérivable en b et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(b, f^{-1}(b))$.

Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier à tous les point de I. □

Remarque 13.25. Ce résultat s'interprète de manière graphique : puisque les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice il en va de même pour leurs tangentes. Les pentes de ces tangentes sont donc inverses l'une de l'autre.

13.3. Dérivées successives

13.3.1. Définition

Définition 13.26.

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, sa dérivée f' peut elle-même être dérivable sur I. On appelle alors **dérivée seconde** de f la dérivée de f' et on la note f''. On dit alors que f est deux fois dérivable sur I.
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Si f est n fois dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième. Par convention, $f^{(0)}$ désigne la fonction f. Autrement dit, les dérivées successives de f sont définies par récurrence par

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

La dérivée n-ième de f est aussi notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Définition 13.27.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $n \in \mathbf{N}^\star$.
On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I **et si sa dérivée n-ième** $f^{(n)}$ **est continue sur** I.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$.
Par convention, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur I est aussi noté $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$.
On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f possède des dérivées de tous ordres sur I. Une telle fonction est dite indéfiniment dérivable.
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I est noté $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{R})$.

Remarque 13.28.
1. Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sont dites *continûment dérivables*.
2. $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{R}) \subset \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^2(I, \mathbf{R}) \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbf{R}) \subset \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$.

Exemple 13.29. Les polynômes, les fonctions cos, sin, exp et ln sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Exercice d'application 13.30. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $\forall x \in \mathbf{R}^\star$, $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$.

La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?

$\hookrightarrow$ On a déjà vu que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \frac{-1}{x^2} \cos(\frac{1}{x}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x})$.

f' est donc continue sur $\mathbf{R}^\star$ d'après les résultats généraux sur la continuité.

On a vu que $x \longmapsto x \sin(\frac{1}{x})$ est continue en 0. En revanche, $x \longmapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0. En effet, $\frac{1}{x} \to_{x \to 0} +\infty$ et cos n'a pas de limite en $+\infty$ (ce qu'on peut voir avec la relation entre suite et limite).

Donc f' n'est pas continue en 0 et f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

13.3.2. Opérations sur les dérivées n-ièmes

Proposition 13.31.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la fonction $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

Démonstration.
Par récurrence sur le premier point de la Proposition 13.21. □

Théorème 13.32 - Formule de Leibniz.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I, alors la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration.
Fixons f et g deux fonctions définies sur I. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note (P_n) la proposition : «si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$».

- Supposons que f et g sont de classe $\mathscr{C}^0$ sur I, c'est-à-dire continues sur I. On a vu au chapitre précédent que la fonction $f.g$ est continue sur I et la formule de Leibniz est vraie (dans la somme n'apparait que le terme $f.g$). Donc (P_0) est vraie.
- Fixons $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la propriété (P_n) est vraie.
  Supposons que f et g sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Puisque $\mathscr{C}^{n+1}(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$, ces deux fonctions sont aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur I donc fg est de classe $\mathscr{C}^n$ et l'on a $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
  Ainsi, $(f.g)^{(n)}$ est continuement dérivable (comme somme de produits de fonctions continuement dérivables sur I) donc $f.g$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I)$ et

$$\begin{aligned}
(f.g)^{(n+1)} = \left((f.g)^{(n)}\right)' &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} f^{(\ell)} g^{(n-\ell+1)} + \sum_{k=1}^{n} \\
&\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)}
\end{aligned}$$

  [changement d'indice dans la première somme $\ell = k+1$ qu'on note à nouveau k ensuite (indice muet)]

$$\begin{aligned}(f.g)^{(n+1)} &= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)} + f^{(0)}g^{(n+1)}\\ &= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]f^{(k)}g^{(n-k+1)} + f^{(0)}g^{(n+1)}\\ &= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)} + f^{(0)}g^{(n+1)} \quad \text{(formule de Pascal)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$

La proposition (P_{n+1}) est donc vraie. Par récurrence, la proposition est démontrée.

□

Proposition 13.33.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I, g ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Démonstration.
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n : "Si g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et ne s'annule pas, alors g est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur I". Montrons P_n par récurrence.

• Initialisation : c'est le résultat sur la continuité de $\frac{1}{g}$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Soit g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$. g^2 ne s'annule pas et est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. g' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Donc $\left(\frac{1}{g}\right)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\frac{1}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Donc P_{n+1} est vraie.

Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, si g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et ne s'annule pas alors $\frac{1}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

On applique alors le théorème de Leibniz à f et $\frac{1}{g}$. □

Proposition 13.34.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f et g deux fonctions respectivement définies sur les intervalles I et J telles que $f(I) \subset J$, et de classe $\mathscr{C}^n$ sur ces intervalles. La fonction $g \circ f$ est alors de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Démonstration.
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n : "Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et J (respectivement), alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I". Montrons P_n par récurrence sur n.

• Initialisation : P_0 s'obtient par le résultats sur la continuité des composés.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Soient f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, respectivement sur I et J. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g'(f)f'$. g' et f' sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur J et I respectivement. D'après P_n $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$ d'après la proposition précédente.

On en déduit que $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Donc P_{n+1} est vraie.

D'où le résultat par récurrence. □

Proposition 13.35.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. La bijection réciproque f^{-1} de f est également de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Démonstration.
Soit f une bijection dérivable de I dans J tel que f' ne s'annule pas.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, P_n : "Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I". Montrons P_n par récurrence sur n.

• Initialisation : P_1 est la Proposition 13.24 combinée aux résultats sur la continuité des composées et inverses.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. La bijection réciproque f^{-1} de f est alors de classe $\mathscr{C}^n$ sur J par hypothèse de récurrence. Donc $f' \circ f^{-1}$ est classe $\mathscr{C}^n$ d'après la proposition précédente et ne s'annule pas donc $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de $\mathscr{C}^{n+1}$ sur J d'après la Proposition 13.33. □

Corollaire 13.36.

Les sommes, produits, composées, quotients de fonctions de classes $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

Exercice d'application 13.37. La fonction $h : x \longmapsto x^6 \exp(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Calculer sa dérivée septième.

↪ On pose $f : x \longmapsto x^6$ et $g : x \longmapsto \exp(x)$ définies sur $\mathbf{R}$. Alors $h = fg$ et d'après le théorème de Leibniz, on a

$$h^{(7)} = f^{(0)}g^{(7)} + 7f^{(1)}g^{(6)} + 21f^{(2)}g^{(5)} + 35f^{(3)}g^{(4)} + 35f^{(4)}g^{(3)} + 21f^{(5)}g^{(2)} + 7f^{(6)}g^{(1)} + f^{(7)}g^{(0)}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} h^{(7)}(x) &= \big(x^6 + 7 \times 5x^5 + 21 \times 30x^4 + 35 \times 120x^3 + 35 \times 360x^2 + 21 \times 720x + 7 \times 720\big)\exp(x) \\ &= \big(x^6 + 42x^5 + 630x^4 + 4200x^3 + 12600x^2 + 15120x + 5040\big)\,\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

13.4. Propriétés des fonctions dérivables de R dans R

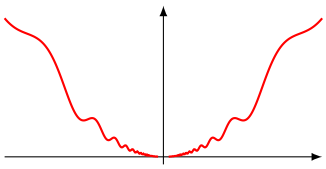
13.4.1. Extrema locaux

Définition 13.38.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.
On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ f(x) \leqslant f(a)$.
On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ f(x) \geqslant f(a)$.

Remarque 13.39.

Il ne faut pas croire que si f admet un minimum local en a alors f est décroissante à gauche de a et croissante à droite de a. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 + x^2 \sin^2(1/x)$ définie sur $\mathbf{R}$ admet un minimum local en 0 et n'est ni croissante à droite de 0 ni décroissante à gauche de 0.



Théorème 13.40.

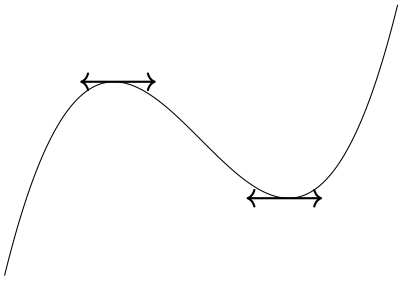
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un point de I **qui n'est pas une extrémité de** I.
Si f admet un extremum local en a, **alors** $f'(a) = 0$.

Démonstration.
Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que f admet un maximum local en a. Soit $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ f(x) \leqslant f(a)$.

Soit $x \in]a-\alpha, a[\cap I$. Alors $f(x) \leqslant f(a)$ et $x < a$. Donc $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Comme f est dérivable en a, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \tau_a(x) \geqslant 0$.

Soit $x \in]a, a+\alpha[\cap I$. Alors $f(x) \leqslant f(a)$ et $x > a$. Donc $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Comme f est dérivable en a, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \tau_a(x) \leqslant 0$.

Finalement, $f'(a) = 0$. □



Remarque 13.41.

1. Graphiquement, la tangente en un extremum est horizontale. En effet pour un maximum, les sécantes ont une pente positive puis négative donc à la position limite, la pente est nulle.

2. Ce théorème ne concerne que les fonctions dérivables. Par exemple la fonction $x \longmapsto |x|$ possède un minimum local en 0 et n'est pas dérivable en 0.

3. Ce théorème ne s'applique pas aux extrema locaux qui sont une extrémité du domaine de définition. Une extrémité peut être un extrémum local d'une fonction sans que la dérivée de cette fonction s'annule. Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ admet un maximum local en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$.

4. Ce théorème n'admet pas de réciproque : si une fonction admet une dérivée nulle en un point a, elle n'admet pas nécessairement un extremum en ce point. Par exemple, $f : x \longmapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée s'annule en 0 et 0 n'est pas un extremum local.

13.4.2. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 13.42 - Théorème de Rolle.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a;b]$.

- Si f est continue sur le segment $[a;b]$,
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$,
- et si $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.
f est continue sur le segment $[a,b]$ donc l'image de $[a,b]$ par f est un segment $[m,M]$ avec $m \leqslant M$ réels. m est donc le minimum de f sur $[a,b]$ et M son maximum.

• Si $m = M$, alors f est constante sur $[a,b]$ donc sa dérivée est nulle sur tout $]a,b[$.

• Si $m < M$:

- Si $m \neq f(a)$, alors f prend la valeur m en un point $c \in]a,b[$ donc f est dérivable en c et f a un extremum local en c donc $f'(c) = 0$.

- Si $m = f(a)$, on a forcément $M \neq f(a)$ donc f prend la valeur M en un point $c \in]a,b[$ donc f est dérivable en c et f a un extremum local en c donc $f'(c) = 0$.

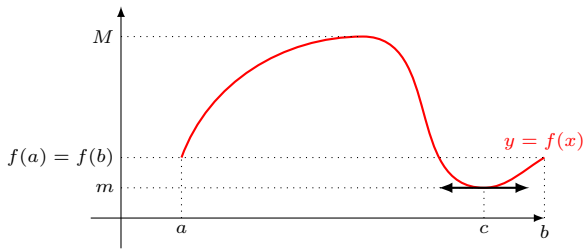
□

Remarque 13.43.

1. Graphiquement, le théorème de Rolle dit que, sous les hypothèses précédentes, le graphe de la fonction f possède au moins une tangente horizontale.

2. En cinématique, le théorème de Rolle nous dit qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a nécessairement vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.

3. Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont indispensables. Si f n'est pas dérivable sur $]a;b[$, le théorème peut être mis en défaut (il suffit de choisir $x \longmapsto |x|$ sur $[-1;1]$). De même, si $f(a) \neq f(b)$, on ne peut pas conclure (considérer $x \longmapsto x$ sur $[0;1]$).



13.4.3. Égalité des accroissements finis

Théorème 13.44 - Théorème des accroissements finis.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle définie sur $[a;b]$.

- Si f est continue sur le segment $[a;b]$,
- et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$,

alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

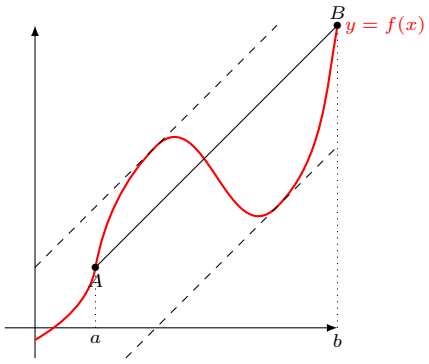
Démonstration.
On considère la fonction $g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (b-a)f(x) - (f(b)-f(a))\,x \end{array}$. D'après les hypothèses sur la régularité de f, g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus

$$g(a) = (b-a)f(a) - (f(b)-f(a))a = b(f(a) - af(b)$$

$$g(b) = (b-a)f(b) - (f(b)-f(a))b = -af(b) + bf(a)$$

Donc, $g(a) = g(b)$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle, qui nous assure de l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a alors :

$$(b-a)f'(c) - (f(b)-f(a)) = 0$$
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



□

Remarque 13.45.

1. Graphiquement, ce théorème signifie que tout arc de la courbe représentative d'une fonction dérivable possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les extrémités de cet arc.

2. Du point de vue cinématique, un mobile se déplaçant sur un axe pendant un intervalle de temps possède au moins une fois une vitesse instantanée égale à sa vitesse moyenne sur cet intervalle. Ainsi si une voiture réalise un parcours à la moyenne de 90 km/h, il existe un instant du trajet où sa vitesse instantanée a été de 90 km/h.

Définition 13.46.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $k \in \mathbf{R}_+$. On dit que f est une fonction k-**lipschitzienne** si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|\,.$$

On dit que f est **lipschitzienne** si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k \geqslant 0$.
On peut interpréter graphiquement que f est k-lipschitzienne : pour tous points M et N distincts sur la courbe représentant f, le coefficient directeur de la droite (MN) est compris entre $-k$ et k.

Exercice d'application 13.47. Les fonctions suivantes sont-elles lipschitziennes ?

1. Les fonctions affines $x \longmapsto ax+b$ sur $\mathbf{R}$.
2. $x \longmapsto |x|$ sur $\mathbf{R}$.
3. $f : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
4. $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbf{R}^+$.

↪

1. Oui, elles sont a-lipschitziennes.
2. Oui, 1-lipschitzienne d'après l'inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.
3. Non, car pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x$, donc n'est pas borné sur $\mathbf{R}^\star$.
4. Non, car pour tout $x > 0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc n'est pas borné sur $\mathbf{R}_+^\star$.

Théorème 13.48 - Inégalités des accroissements finis - Version 1.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a;b]$. Soient m et M deux réels tels que $m \leqslant M$.

- Si f est continue sur le segment $[a;b]$;
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$,
- et si pour tout $x \in]a;b[$, $\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors on a :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Démonstration.
D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Comme $c \in [a,b]$, on a $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$, donc

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

□

Théorème 13.49 - Inégalités des accroissements finis - Version 2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a;b]$. Soit k un réel positif ou nul.

- Si f est continue sur le segment $[a;b]$;
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$,
- et si pour tout $x \in]a;b[$, $|f'(x)| \leqslant k$

alors f est k-lipschitzienne sur $[a;b]$, c'est-à-dire que f vérifie :

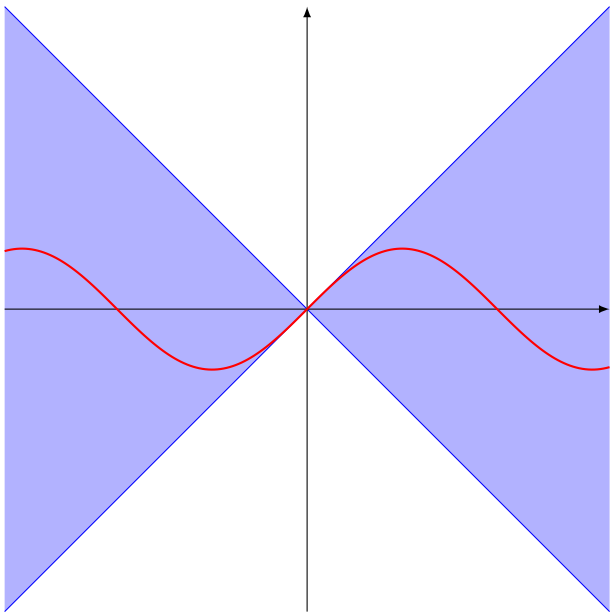
$$\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Démonstration.
Soient x et y dans $[a,b]$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $x \geqslant y$.

- Si $x = y$, alors $|f(x) - f(y)| = 0 = k\,|x-y|$.
- Sinon f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$. Donc, d'après la Version 1 de l'inégalité des accroissements finis,
$$-k(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant k(y-x).$$
On en déduit que $|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$.

Donc f est k-lipschitzienne. □

Exemple 13.50. Comme cos est bornée par 1, sin est 1-lipschitzienne.



Exercice d'application 13.51. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}, \qquad \frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

↪ Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$. Alors ln est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. De plus, pour tout $y \in]x, x+1[$, $f'(y) = \frac{1}{y}$, donc $\dfrac{1}{x+1} \leqslant f'(y) \leqslant \dfrac{1}{x}$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\frac{1}{x+1}(x+1-x) \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}(x+1-x)$$

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

13.4.4. Applications des théorèmes des accroissements finis

Variations d'une fonction dérivable

Théorème 13.52.

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
La fonction f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Démonstration.
Traitons le premier cas, le deuxième s'en déduisant en considérant $-f$.

Si f est supposée croissante sur I, pour tout $x_0 \in I$, le taux d'accroissement de f en x_0 est une fonction positive ou nulle et sa limite est donc positive ou nulle.

Réciproquement, supposons que $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I vérifiant $x_1 < x_2$. Comme, d'après les hypothèses, la fonction f est continue sur $[x_1; x_2]$ et dérivable sur $]x_1; x_2[$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis sur le segment $[x_1; x_2]$: il existe donc un nombre réel c appartenant à $]x_1; x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geqslant 0$ et, par suite, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. La fonction f est donc croissante sur I.

Une fonction est constante sur I si, et seulement si, elle est croissante et décroissante sur I. □

Remarque 13.53.

1. Ce résultat n'est valable **que sur un intervalle**. Si l'on considère par exemple la fonction $f : x \longmapsto 1/x$ sur $\mathbf{R}^\star$, la négativité de la dérivée f' entraine la décroissance de f sur $\mathbf{R}_-^\star$ et sur $\mathbf{R}_+^\star$ mais pas sur $\mathbf{R}^\star$, puisque cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^\star$: $f(-1) \leqslant f(1)$.

2. Si l'on a $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ (respectivement $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$), on peut en déduire que la fonction est strictement croissante mais la réciproque est fausse ! **Il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée n'est pas strictement positive**

(considérer $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbf{R}$).

Corollaire 13.54.

Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I.
f est strictement monotone sur I si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :

i) la dérivée de f est de signe constant ;

ii) il n'existe pas d'intervalle, contenant au moins deux points, inclus dans I sur lequel f' est nulle.

Remarque 13.55. Dans la pratique, on utilise le fait que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I.

Démonstration.
La condition (i) étant équivalente à la monotonie de f sur I, il suffit de montrer que pour une fonction f monotone dérivable, la stricte monotonie est équivalente à la condition (ii).

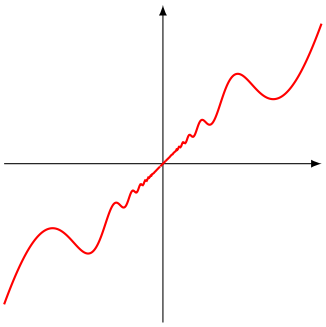
Or, en tant que fonction monotone, f n'est pas strictement monotone si, et seulement si, f est constante sur un intervalle contenant au moins deux points, c'est-à-dire si, et seulement si, f' est nulle sur un tel intervalle. □

Remarque 13.56.

Il ne faut pas croire non plus que la positivité stricte de f' en un point donné suffit à justifier la stricte monotonie de f au voisinage de ce point. Considérons par exemple, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ et pourtant f' ne garde un signe constant dans aucun intervalle autour de 0



Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 13.57 - Théorème de la limite de la dérivée.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.
On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{a\}$,

- si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;
- si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell = +\infty$ ou $-\infty$, alors le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a et f n'est pas dérivable en a. Dans ce cas, la courbe représentative de f présente une tangente verticale au point d'abscisse a.

Démonstration.
Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

D'après l'égalité des accroissements finis, pour tout $x \in I\backslash\{a\}$, il existe c_x strictement compris entre a et x tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$.

Comme c_x est entre a et x, on a $0 < |c_x - a| < |x - a|$. $\lim\limits_{x\to a} |x-a| = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to a} |c_x - a| = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} f'(c_x) = \ell$, et donc que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$

- si $\ell \in \mathbf{R}$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;
- si $\ell = \pm\infty$, alors le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a et f n'est pas dérivable en a. Dans ce cas, la courbe représentative de f présente une tangente verticale au point d'abscisse a.

□

Remarque 13.58.

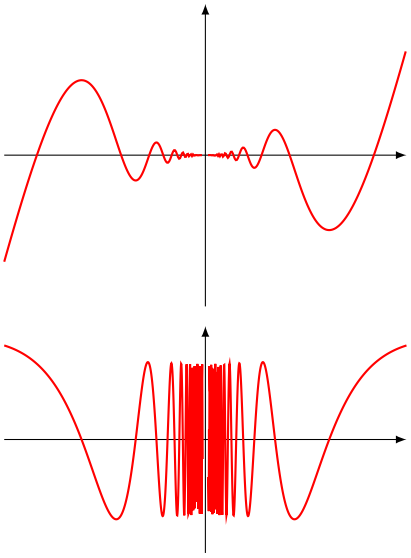
Attention, la proposition précédente n'est qu'une condition suffisante. Il se peut que $f'(a)$ existe sans que la fonction f' soit continue en a. En effet, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ d'après les théorèmes généraux et dérivable en 0 de dérivée nulle car son taux d'accroissement en 0 tend vers 0 en 0 ($\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$).
Or la fonction

$$f' : x \longmapsto \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas continue en 0 car
$\lim\limits_{n\to+\infty} f'\big(1/(2n\pi)\big) = -1 \neq f'(0)$.



13.5. Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

La définition de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes en un point est la même que celle des fonctions à valeurs réelles :

Définition 13.59.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite **dérivable en** $a \in I$ si, et seulement si, la fonction $\tau_a : I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$, appelée **taux d'accroissement** de f en a et définie sur $I\backslash\{a\}$ par

$$\forall t \in I\backslash\{a\}, \qquad \tau_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite (obligatoirement finie) quand t tend vers a. Cette limite est appelé **nombre dérivé** de f en a, et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$. Autrement dit :

$f'(a) = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$.

On définit de même la fonction dérivée :

Définition 13.60.

Lorsque la fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur** I et la fonction à valeurs complexes définie sur I par $t \longmapsto f'(t)$ est appelée **fonction dérivée** de f, et se note f', Df ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

Proposition 13.61.

Soit $f : I \to \mathbf{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a (resp. sur I) si, et seulement si, les deux fonctions à valeurs réelles $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont dérivables en a (resp. sur I). Dans ce cas on a de plus

$$f' = \big(\mathcal{R}\mathrm{e}(f)\big)' + i\,\big(\mathcal{I}\mathrm{m}(f)\big)'$$

Remarque 13.62. En pratique, avec les fonctions à valeurs complexes, on dérive comme dans le cas réel avec les règles habituelles.

Exemple 13.63. Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La fonction $f : t \longmapsto \exp\big((a+ib)t\big)$ est dérivable sur $\mathbf{C}$. En effet, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\exp((a+ib)t) = \exp(at)\cos(bt) + i\exp(at)\sin(bt),$$

donc la partie réelle et imaginaire sont dérivables sur $\mathbf{C}$ et le calcul donne pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f'(t) = (a+ib)\exp\big((a+ib)t\big).$$

Remarque 13.64. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis deviennent faux dans le cas des fonctions à valeurs complexes.

Considérons par exemple la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{ix} \end{array}$ qui est dérivable sur $[0,2\pi]$ donc a fortiori continue sur ce segment et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,2\pi[$. On a $f(0) = f(2\pi) = 1$ et pourtant, pour tout $c \in]0,2\pi[$, $f'(c) = i\mathrm{e}^{ic} \neq 0$!

Remarque 13.65.

D'un point de vue cinématique, cela implique qu'un point mobile dans le plan complexe peut revenir à son point de départ sans que sa vitesse instantanée ne se soit annulée à aucun instant.

Par contre, une certaine forme de l'inégalité des accroissements finis est conservée.

Théorème 13.66.

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ (dérivable à dérivée continue sur $[a,b]$).
S'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que : $\forall t \in [a;b]$, on a $\underbrace{|f'(t)|}_{\text{module}} \leqslant k$, alors pour tout $x, y \in [a;b]$, on a $\underbrace{|f(x)-f(y)|}_{\text{module}} \leqslant k\,\underbrace{|x-y|}_{\text{val. abs.}}$.

Démonstration.
Sera démontré dans le chapitre «Intégration». □

L'une des conséquences immédiates de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes est donnée dans l'énoncé suivant (qui reste valable si f est seulement dérivable sur $[a,b]$).

Corollaire 13.67.

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f' est nulle sur $[a;b]$, alors f est constante sur $[a;b]$.

Chapitre 14

Probabilités sur un univers fini

Se n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir. Autrement dit : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

Devise des Shadoks

14.1. Univers et événements

Définition 14.1.

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on connaît les résultats, appelés **issues**, possibles mais dont on ne peut pas *a priori* prédire lequel va arriver.
On appelle **univers** l'ensemble de toutes les issues possibles. L'univers est souvent noté Ω.

Exemple 14.2.

- On lance un dé à six faces (sous-entendu, les faces portent les numéros 1,2,3,4,5 et 6, et on considère que le résultat de l'expérience est le numéro qui apparaît sur la face du dessus). On peut choisir comme univers l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (on aurait aussi pu choisir $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 42\}$ même si 42 est un résultat qui n'a « aucune chance » d'être obtenu).
- On lance une pièce de monnaie. On peut choisir comme univers $\Omega = \{\text{pile,face}\}$.
- On met en route une machine et on considère le nombre total de jours de fonctionnement de cette machine avant qu'elle ne tombe en panne. Un univers possible est ici $\Omega = \mathbf{N}^\star$.

Remarque 14.3. Dans le troisième exemple, l'univers n'est pas un ensemble fini. Cette année, on ne s'intéressera qu'aux expériences pouvant être modélisées par un univers fini (on parle de probabilités finies). L'année prochaine vous vous intéresserez aux probabilités sur des ensembles dénombrables (par exemple $\Omega = \mathbf{N}$) ; on parle alors de probabilités discrètes. On peut aussi considérez le cas où Ω est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbf{R}$, et dans ce cas on parle de probabilités continues.

Pour toute la suite, on considère un univers Ω fini. On se donne également $n \in \mathbf{N}^\star$.

Définition 14.4.

On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω. À l'issue d'une expérience aléatoire, on dit que l'événement A est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience est un élément de la partie A.

L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 14.5.
- On lance un dé à 6 faces, et on associe à l'expérience l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On considère l'événement $A =$« on obtient un nombre pair ». On a ainsi $A = \{2, 4, 6\}$, qui est bien une partie de Ω.
- On lance simultanément deux dés à 6 faces distinguables (un rouge et un vert, par exemple). Le résultat de l'expérience est le couple (valeur lue sur le dé rouge, valeur lue sur le dé vert). Un univers possible pour cette expérience est $[\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!] = [\![1, 6]\!]^2$. On considère les événements $A =$« la somme des points obtenus vaut 7 » et $B =$« le plus petit des nombres obtenus est 3 ».
  Les événements A et B sont les parties suivantes de Ω :
  $A = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}$ $B = \{(3, 3); (3, 4); (4, 3); (3, 5); (5, 3); (6, 3); (3, 6)\}$.

Définition 14.6.

L'événement Ω est appelé l'événement **certain** (il est toujours réalisé). L'évènement $\varnothing$ est appelé l'événement **impossible** (il n'est jamais réalisé). Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, les singletons $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}$ sont appelés les **événements élémentaires**.

Exemple 14.7. Lors d'un lancer de dé à 6 faces, l'événement $A =$« obtenir 6 » est l'événement élémentaire $A = \{6\}$, l'événement $B =$« obtenir un nombre à la fois pair et strictement inférieur à 2 » est l'événement impossible $B = \varnothing$, et l'événement $C =$« obtenir un nombre pair ou un nombre impair » est l'événement certain $C = \Omega$.

Définition 14.8.

Soient A et B deux événements.
1. $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ est l'**événement contraire** de A.
2. $A \cup B$ est l'événement A **ou** B.
3. $A \cap B$ est l'événement A **et** B.
4. $A \backslash B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$ est l'événement A **mais pas** B.

Exemple 14.9. Dans le lancer de deux dés à 6 faces (avec $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$), on considère à nouveau les événements $A =$« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et $B =$« le plus petit des nombres obtenu est 3 ».

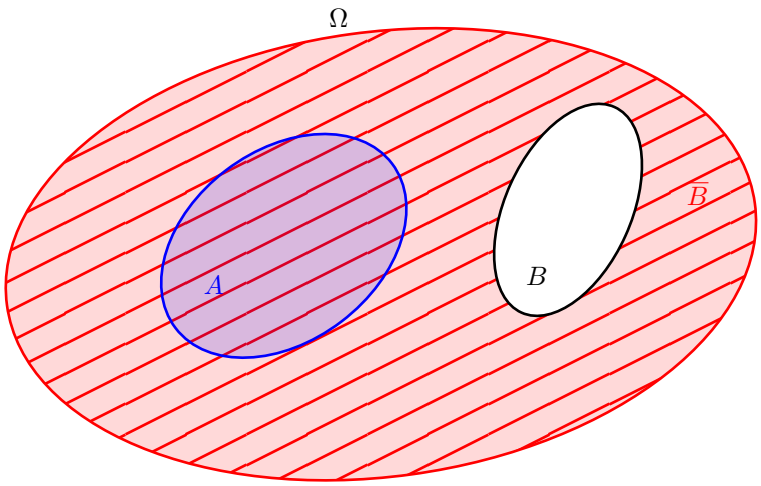
- L'événement $A \cup B$ est « la somme des nombres obtenue est 7 ou le plus petit des deux est 3 »
  $A \cup B = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (3, 5); (5, 3); (6, 3); (3, 6); (3, 3)\}$
- L'événement $A \cap B$ est « la somme des nombres obtenue est 7 et le plus petit des deux est 3 »
  $A \cap B = \{(3, 4); (4, 3)\}$
- L'événement $A \backslash B$ est « la somme des nombres obtenue est 7 mais le plus petit des deux n'est pas 3 »
  $A \cap B = \{(1, 6); (2, 5); (5, 2); (6, 1)\}$

Définition 14.10.

Soient A et B deux événements.
- On dit que A **implique** B lorsque $A \subset B$.
- On dit que A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$. Deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas être tous les deux réalisés à l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemple 14.11.
- Un événement A et son contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.
- Dans le lancer de deux dés à 6 faces, les événements $A =$« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et $C =$« les deux numéros obtenus sont pairs » sont incompatibles car $A \cap C = \varnothing$.

Remarque 14.12. Si deux événements A et B sont incompatibles, A implique $\overline{B}$ et B implique $\overline{A}$.



Définition 14.13.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des événements de Ω. On dit que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ est un **système complet d'événements** lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. les événements E_k (où $k \in [\![1, n]\!]$) sont deux à deux incompatibles :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ \big(i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \varnothing\big)$$
2. $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

Remarque 14.14. Si aucun des événements E_k n'est vide, la notion de système complet d'événements coïncide avec celle de partition de Ω.

Exemple 14.15. Reprenons le lancer de deux dés à 6 faces.

$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. $E_1 =$ { la somme des deux dés est impaire }.

$E_2 =$ { les deux dés sont pairs }.

$E_3 = \{(1,1); (1,3); (3,1); (1,5); (5,1); (3,5); (5,3); (5,5)\}$.

Alors, $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \varnothing$ et $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

Donc (E_1, E_2, E_3) est un système complet d'évènements.

Exemple 14.16.
- Un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.
- L'ensemble $\Big\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}\Big\}$ des événements élémentaires de l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est aussi un système complet d'événements.
- On considère une succession de n lancers d'une pièce à pile ou face. Le résultat de cette expérience est un $n-$uplet constitué d'éléments de {pile,face}. Par exemple, si $n = 4$, le résultat d'une expérience peut être (face,face,pile,face). L'univers est ici $\Omega = \{\text{pile,face}\}^n$.
  Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les événements $E_k =$« j'ai obtenu pile pour la première fois au $k-$ième tirage » et $G =$« j'ai obtenu face à tous les tirages ». On peut dire que l'ensemble $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, G\}$ est un système complet d'événements.

14.2. Probabilités

Pour modéliser une expérience aléatoire, on associe à chaque évènement la « chance » qu'il se réalise.

14.2.1. Espaces probabilisés finis

Définition 14.17.

Soit Ω un univers fini. L'ensemble de tous les événements est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ qu'on notera $\mathcal{T}$ (comme « tribu » des événements, spoiler du cours de spé). Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est qualifié d'**espace probabilisable fini**.

Définition 14.18.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini (où $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$). On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0\,;\,1]$ qui vérifie

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. pour tous événements A et B incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Pour tout événement A, le nombre $\mathbb{P}(A)$ est appelé la « probabilité de A ». Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est qualifié d'**espace probabilisé fini**.

Exemple 14.19. On considère le lancer d'une pièce de monnaie qui donne pile avec une fréquence $p \in [0\,;\,1]$ et face avec une fréquence $1-p \in [0\,;\,1]$. Pour modéliser fidèlement l'expérience, on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{\text{pile,face}\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ \varnothing & \longmapsto & 0 \\ \text{pile} & \longmapsto & p \\ \text{face} & \longmapsto & 1-p \\ \Omega & \longmapsto & 1 \end{array}$. On vérifie aisément que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité.

Remarque 14.20. Dans l'exemple précédent, on a dû donner la probabilité de tous les événements de $\mathcal{T}$. On verra plus loin qu'on peut définir correctement une probabilité $\mathbb{P}$ sans être aussi exhaustif.

14.2.2. Exemple fondamental : la probabilité uniforme

Définition 14.21.

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

Définition 14.22.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini non vide. On appelle **probabilité uniforme** sur Ω l'application

$$\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}. \end{array}$$

Proposition 14.23.

L'application définie ci-dessus est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Démonstration. 1. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $A \subset \Omega$ donc $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(\Omega)$. D'où

$$0 \leqslant \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \leqslant 1.$$

Donc $\mathbb{P}$ est bien à valeurs dans $[0\,;1]$.

2. $\mathbb{P}(\Omega) = \dfrac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(\Omega)} = 1$.
3. Soient A et B incompatibles. Alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$. D'où

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} + \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

□

Remarque 14.24. La définition de la probabilité uniforme donne :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

ce qui signifie que tous les événements élémentaires sont équiprobables. On verra plus loin que c'est la seule probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ qui a cette propriété. On pourra retenir qu'en pratique, pour la probabilité uniforme :

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On utilise cette probabilité lorsque toutes les issues de l'expérience on la même « chance » de se produire. Dans les énoncés, cela se traduit par « choix au hasard », « dé non truqué », pièce « équilibrée ». Les calculs avec la probabilité uniforme font appel aux techniques de dénombrement.

Exercice d'application 14.25. On range au hasard les n tomes ($n \geqslant 1$) d'une encyclopédie sur une étagère. On désire connaître la probabilité que les tomes 1 et 2 soient côte à côte et dans cet ordre.

↪ L'univers Ω est l'ensemble des n-arrangements des n livres. D'après le cours de dénombrement, on sait que $\text{Card}(\Omega) = n!$. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

On note $A = \{\,(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 1 \Rightarrow i < n-1 \text{ et } x_{i+1} = 2\}$. Dénombrons A.

1. On a $n-1$ choix possibles pour l'emplacement du tome 1 (il ne peut être en dernière position, puisque le tome 2 doit être à sa suite).
2. On a un seul choix pour l'emplacement du tome 2 : l'emplacement suivant le tome 1.
3. Pour les $(n-2)$ tomes restants, on peut les placer comme on veut dans les $n-2$ emplacements restants, soit $(n-2)!$ possibilités.

D'après le principe multiplicatif, on a au total $(n-1) \times (n-2)! = (n-1)!$ possibilités. Finalement,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

14.2.3. Propriétés

Proposition 14.26.

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
3. $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
5. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$. On dit que la probabilité est une application croissante pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{T}$.

Démonstration. 1. $A \cup \overline{A} = \Omega$ est une union disjointe donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2. $\varnothing = \overline{\Omega}$ et$\mathbb{P}(\Omega) = 1$, d'où le résultat d'après le premier point.
3. $B = (B \cap A) \cup (B \backslash A)$ est une union disjointe.
4. C'est un cas particulier du cas précédent : si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$.
5. $\mathbb{P}(B \backslash A) \geqslant 0$, donc $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

□

Remarque technique 14.27. La propriété 1. s'appelle le « passage au contraire ». Elle est bien pratique lorsque l'on cherche la probabilité d'un événement qui est décrit par la locution « au moins un » ou « au plus un ».

Exercice d'application 14.28. On lance deux dés à 6 faces discernables et non pipés. Déterminer la probabilité qu'un des deux au moins donne un chiffre pair.

↪ L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On a $\text{Card}(\Omega) = 6^2 = 36$. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

On note A l'évènement « Au moins un des deux dés donne un chiffre pair ».

Ainsi, $\overline{A}$ est l'évènement « Les deux dés donnent un chiffre impair » .

Chaque dé a 3 possibilités d'être impair, donc par le principe multiplicatif, $\text{Card}(\overline{A}) = 3^2 = 9$. D'où $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{A})}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$. Ainsi $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice d'application 14.29. Le jeu de carte Uno™ contient 108 cartes, dont 32 cartes « spéciales ». Lorsqu'on pioche une main de sept cartes au hasard, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une carte spéciale parmi les sept ?

↪ Notons C l'ensemble des 108 cartes. Alors l'univers est $\Omega = \{A \in \mathcal{P}(C), \text{Card}(A) = 7\}$. D'après le cours de dénombrement, $\text{Card}(\Omega) = \binom{108}{7}$.

Soit A l'évènement « La main tirée contient au moins une carte spéciale ». Alors $\overline{A}$ est « La main ne contient aucune carte spéciale ».

En note $S \subset C$ l'ensemble des 76 cartes non-spéciale du paquet, $\overline{A}$ est donc l'ensemble des parties de S à 7 éléments. On sait que son cardinal est $\binom{76}{7}$.

Finalement,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\text{Card}(\overline{A})}{\text{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{\binom{76}{7}}{\binom{107}{7}} \approx 0,92.$$

Proposition 14.30.

Soient A_1, A_2, ..., A_n des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Si les événements A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration.
Le résultat se démontre à l'aide d'une simple récurrence, en utilisant le fait que si A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} sont deux à deux incompatibles $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ et A_{n+1} sont aussi incompatibles. □

Corollaire 14.31.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) = 1$.
2. Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$, autrement dit la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Démonstration. 1. On utilise la proposition précédente, avec $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$.

2. On utilise le fait que les événements élémentaires forment un système complet. □

Proposition 14.32 - Formule de Poincaré.

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration.
$B \subset A \cup B$, donc $\mathbb{P}((A \cup B)\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$ d'après la Proposition 14.26.

Or, $(A \cup B)\backslash B = A\backslash B$, d'où $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$. Toujours d'après la Proposition 14.26, $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$, donc :

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B).$$

□

Corollaire 14.33.

Soit $A_1, ..., A_n$ des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons H_n : « pour tous événements $A_1, ...A_n$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ ».
H_1 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que H_n soit vraie. Soient $A_1, ..., A_n, A_{n+1}$ des événements. Notons $B = A_1 \cup ... \cup A_n$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(B \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) \leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}).$$

Donc H_{n+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure. □

14.2.4. Construction de probabilités sur un univers fini

Proposition 14.34.

Soient $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini et $p_1, \ldots, p_n$ des nombres réels.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$;

(ii) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Le cas échéant, la probabilité $\mathbb{P}$ est unique et on a :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k.$$

Démonstration.

- (i)$\Longrightarrow$(ii). Si une telle probabilité existe, alors les p_k sont positifs ou nuls puisque ce sont des probabilités d'événements, et d'après le Corollaire 14.31, $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$.

- (ii)$\Longrightarrow$(i). Supposons les deux points de la condition vérifiés. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse : Supposons qu'on ait trouvé une telle probabilité $\mathbb{P}$. Soit A un événement. On peut écrire A comme réunion d'événements élémentaires qui sont deux à deux incompatibles :

$$A = \bigcup_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \{\omega_k\}.$$

Puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité, on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k$$

donc pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}$ est définie de manière unique à partir des nombres p_k et donc un tel candidat-probabilité $\mathbb{P}$ est unique.
Synthèse : On définit pour tout $A \in \mathcal{T}$ le nombre $\mathbb{P}(A)$ par $\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k$.

Puisque pour tout $A \in \mathcal{T}$, $0 \leqslant \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} \underbrace{p_k}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, l'application $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in A}} p_k \end{array}$
est correctement définie (l'ensemble d'arrivée est effectivement $[0\,;1]$). Il reste à vérifier qu'elle répond bien aux exigences et que c'est bien une probabilité.
Tout d'abord, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a bien $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \omega_k \in \{\omega_i\}}} p_k = p_i$.

Ensuite, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ \omega_k\in\Omega}} p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Enfin, pour tous événements A et B incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ \omega_k\in A\cup B}} p_k$$

et puisque $A\cap B = \varnothing$, les ensembles $\{k\in[\![1,n]\!] \mid \omega_k\in A\}$ et $\{k\in[\![1,n]\!] \mid \omega_k\in B\}$ sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ \omega_k\in A}} p_k + \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ \omega_k\in B}} p_k = \mathbb{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Finalement, $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{T})$. □

Corollaire 14.35.

Pour définir complètement une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chacun des événements élémentaires.

Exemple 14.36. Soit $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$. L'unique probabilité telle que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega,\mathcal{T})$.

Exercice d'application 14.37. On considère $\Omega = [\![1,n]\!]$. Montrer qu'on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{T})$, en posant, pour tout $k\in\Omega$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

↪ Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}\geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^3}{n^2(n+1)^2} &= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k^3\\ &= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc, par la Proposition 14.34, on peut définir $\mathbb{P}$ telle que proposée dans l'énoncé.

14.3. Probabilités conditionnelles

14.3.1. Définitions et propriétés

Exercice d'application 14.38. Dans un grand lycée, il y a 200 élèves de PCSI, et trois langues sont proposées en LV1. La répartition est donnée dans le tableau ci-après.

LV1	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
Hommes	55	18	17	90
Femmes	58	23	29	110
Total	113	41	46	200

On choisit un élève au hasard parmi les étudiants de PCSI.

1. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une femme germaniste ?
3. On croise une étudiante de PCSI dans le couloir. Quelle est la probabilité qu'elle soit germaniste ?
4. On sélectionne un élève au hasard parmi tous les germanistes. Quelle est la probabilité que cet étudiant soit une femme ?

↪ On note Ω l'ensemble des élèves, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

1. Notons $F =$ « L'élève choisi est une femme ». On a alors $\mathbb{P}(F) = \dfrac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{110}{200} = 0,55$.
2. Notons $A =$ « L'élève choisi apprend l'allemand ». On a $\mathbb{P}(A \cap F) = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{23}{200} = 0,115$.
3. Ici l'expérience aléatoire n'est plus la même que dans les deux questions précédentes. En effet, on *sait* que la personne sélectionnée est une femme, il faut donc calculer la probabilité qu'un élève suive la LV1 allemand *sachant* que c'est une femme. Il faut donc considérer la probabilité uniforme sur l'ensemble des femmes, qu'on note $\mathbb{P}_A$.
   La valeur cherchée est alors $\mathbb{P}_F = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(F)} = \dfrac{23}{110}$.
4. Encore une fois, l'expérience aléatoire change, puisqu'on sait maintenant que l'étudiant est germaniste. On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}_A$ sur l'ensemble des étudiants germanistes.
   La valeur cherchée est alors $\mathbb{P}_A = \dfrac{\text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{23}{41}$.

Définition 14.39.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement A, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant E** et on note $\mathbb{P}_E(A)$ (ou $\mathbb{P}(A \mid E)$) le nombre

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}.$$

Remarque 14.40.
1. $A \mid E$ n'est pas un événement.
2. Si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$, $\mathbb{P}_E$ est la probabilité uniforme sur $(E, \mathcal{P}(E))$ (cf. Exercice d'application 14.38).

⚠ **Attention** ⚠**.** Il ne faut pas confondre $\mathbb{P}_E(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap E)$.

Proposition 14.41.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle.
L'application $\mathbb{P}_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_E(A) \end{array}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ appelée la **probabilité conditionnelle sachant E**.

Démonstration.
$\mathbb{P}_E$ est bien à valeurs dans $[0, 1]$.

$E \subset \Omega$, donc $E \cap \Omega = E$. D'où $\mathbb{P}_E(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E)} = 1$.

Soient A et B des évènements incompatibles de Ω. Alors $(A \cup B) \cap E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$. De plus, $A \cap E$ et $B \cap E$ sont incompatibles. Donc

$$\mathbb{P}_E(A \cup B) = \frac{\mathbb{P}((A \cup B) \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap E) \cup (B \cap E))}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap E) + \mathbb{P}(B \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}_E(B).$$

□

Exercice d'application 14.42. Un homme rend visite a une famille qui compte deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille. Il sonne et un des deux enfants ouvre.

1. Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?
2. C'est une fille qui ouvre à l'homme. Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?
3. Le père rejoint sa fille à l'entrée, et il dit à l'homme : « je vois que vous avez rencontré mon aînée ». Quelle est la probabilité que l'enfant qui n'ouvre pas la porte soit une fille ?

↪ Chaque composition de la famille peut être représentée par le couple (x, y), avec $(x, y) \in \{F, G\}^2$, x représentant l'aîné et y le second enfant. On a donc $\Omega = \{F, G\}^2$, que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On considère les événements :

- $A =$« l'aînée est une fille »$= \{(F, G), (F, F)\}$;
- $B =$« les deux enfants sont des filles »$= \{(F, F)\}$;
- $C =$« il y a au moins une fille ».

1. La probabilité vaut $\dfrac{1}{2}$.
2. On a $\mathbb{P}_C(B) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$.
3. On a $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Corollaire 14.43.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle. Soient A et B deux événements.

1. $\mathbb{P}_E(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_E(A)$.
2. $\mathbb{P}_E(B \backslash A) = \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.
3. $\mathbb{P}_E(A \cup B) = \mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}_E(B) - \mathbb{P}_E(A \cap B)$.

Démonstration.
Tout cela découle immédiatement du fait que $\mathbb{P}_E$ est une probabilité. □

Exercice d'application 14.44. Reprendre la question 2. de l'Exercice d'application 14.42 en modélisant la situation ainsi : on note F_i l'événement « le i-ième enfant est une fille » pour $i \in [\![1, 2]\!]$, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

↪ Si on sait que l'un des deux enfants est une fille, la probabilité que l'autre enfant soit une fille également est donnée par :

$$\mathbb{P}_{F_1 \cup F_2}(F_1 \cap F_2) = \frac{\mathbb{P}((F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cap F_2))}{\mathbb{P}(F_1 \cup F_2)} = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

14.3.2. Conditionnement

Pour évaluer la probabilité de « E et A », il est souvent plus simple d'évaluer la probabilité de E (la « cause ») et la probabilité de A sachant E (la « conséquence ») puis d'utiliser le résultat suivant :

Proposition 14.45.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement A, $\mathbb{P}(E \cap A) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(A)$.

Démonstration.
Cette formule découle directement de la définition de $\mathbb{P}_E(A)$. □

◇◇

Remarque technique 14.46. On utilise cette formule lorsqu'il y a un lien de cause à effet entre E et A (E est une cause qui peut expliquer la réalisation de A, qui en est une conséquence).

Exercice d'application 14.47. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne et on lui ajoute une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

↪ On note N_i (pour $i \in \{1, 2\}$) l'événement « on tire une boule noire au i-ième tirage ». On obtient

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7},$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

◇◇

◇◇

Remarque technique 14.48. Dans de nombreuses situations, on peut rassembler les données de l'énoncé dans un **arbre de probabilité**. Ce qui apparaît au bout de chaque branche d'un tel arbre *doit être un événement.*

Construction d'un arbre de probabilités : on se donne des *événements* $E_1, \ldots, E_n$ et $A_1, \ldots, A_p$, les probabilités des E_k n'étant pas nulles (le plus souvent, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ et $\{A_1, \ldots, A_p\}$ sont des systèmes complets d'événements).

Les événements $E_1, \ldots, E_n$ sont « les causes », et les $A_1, \ldots, A_p$ sont « les conséquences ». Les probabilités conditionnelles écrites sur les branches reliant E_k à A_i s'appellent « **les probabilités de transition** ».

Lorsque $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements, la somme des probabilités sur les branches issues de Ω vaut 1. Lorsque $\{A_1, \ldots, A_p\}$ est un système complet d'événements, la somme des probabilités de transition sur les branches issues d'un même nœud E_k vaut 1 également.

À l'extrémité de chaque branche de l'arbre, on peut obtenir la probabilité $\mathbb{P}(E_k \cap A_i) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}_{E_k}(A_i)$.

Exercice d'application 14.49. Avant de commencer la correction de ses copies, le professeur M. regarde un match de tennis : trois fois sur cinq il regarde Federer, un quart du temps il regarde Djokovic et le reste du temps il regarde Nadal.

Après avoir vu jouer Federer, il est joyeux 9 fois sur 10 ; après avoir vu Djokovic, il est grognon (c'est-à-dire non joyeux) une fois sur 3 ; lorsqu'il se contente de Nadal, il est grognon 4 fois sur 5.

Construire l'arbre illustrant l'énoncé.

↪ On note les évènements suivants :

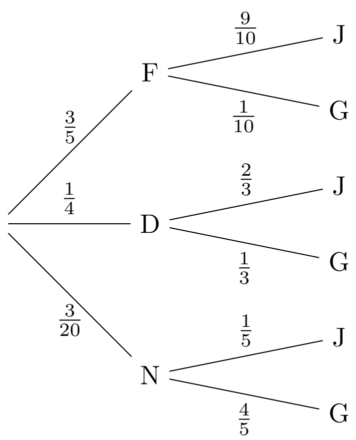
F=« Le professeur M. regarde Federer »

D=« Le professeur M. regarde Djokovic »

N=« Le professeur M. regarde Nadal »

G=« Le professeur M. est grognon »

J=« Le professeur M. est joyeux » $= \overline{G}$.



◇◇

Il se peut que l'arbre de probabilités possède plus de deux générations de branches (imaginez que l'on connaisse la probabilité que le professeur M. soit très sensible à la rédaction lorsqu'on connaît son état (grognon ou joyeux) et ce qu'il vient de regarder).

On utilise alors la formule suivante :

Proposition 14.50 - Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $n \in \mathbf{N}$.
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.
Si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors les événements A_1, $A_1 \cap A_2$, $\dots$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$ sont de probabilité non nulle et

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration.
On procède par récurrence.

L'initialisation est simplement $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose H_n vraie. Montrons H_{n+1}.

Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des évènements. On note $E = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Supposons que $\mathbb{P}(E) \neq 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E \subset A_1 \cap \dots \cap A_i$, donc $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_i) \geqslant \mathbb{P}(E) > 0$.

Alors, $\mathbb{P}(E \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(A_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\mathbb{P}(E \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \times \mathbb{P}_E(A_{n+1}).$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1}).$$

D'où l'hérédité. On conclut par récurrence. □

14.3.3. Formule des probabilités totales

Lemme 14.51 - Formule de filtration.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement. On a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_k).$$

Démonstration.
$\{E_1, \dots, E_n\}$ est un système complet d'événements donc pour tout $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, $E_i \cap E_j = \varnothing$.

$A \cap E_k \subset E_k$ pour tout k, donc $(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = \varnothing$.

Donc $\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k$ est une union disjointe. De plus, $\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) = A \cap \Omega = A$. Donc, en utilisant la Proposition 14.30, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_k).$$

□

Si A est une conséquence possible des causes possibles E_1, E_2, ..., E_n, on calcule chacun des $\mathbb{P}(A \cap E_k)$ en conditionnant par l'événement E_k : $\mathbb{P}(A \cap E_k) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}_{E_k}(A)$. Cela montre la formule des probabilités totales.

Théorème 14.52 - Formule des probabilités totales.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement. On a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$$

en adoptant la convention que le produit $\mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)$ vaut 0 si $\mathbb{P}(E_k) = 0$.

Remarque 14.53. La convention est nécessaire car si $\mathbb{P}(E_k) = 0$, alors $\mathbb{P}_{E_k}(A)$ n'est pas défini.

Exercice d'application 14.54. On reprend l'Exercice d'application 14.49. Calculer la probabilité que le professeur soit grognon.

↪ L'ensemble $\{F, D, N\}$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(G) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{20} \times \frac{4}{5} \\
&= \frac{18 + 25 + 36}{300} \\
&= \frac{79}{300}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 14.55. Soit $(a, b) \in]0\,;\,1[^2$. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbf{N}^\star$), alors il a le probabilité a de toujours fonctionner à la date n ;
- s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbf{N}^\star$), alors il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n

On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.

1. Déterminer p_n pour $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

↪

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminons une relation de récurrence entre p_{n-1} et p_n. On applique la formule des probabilités totales. On a, si $0 < \mathbb{P}(M_{n-1}) < 1$:

$$\mathbb{P}(M_n) = \mathbb{P}_{M_{n-1}}(M_n)\mathbb{P}(M_{n-1}) + \mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(M_n)\mathbb{P}(\overline{M_{n-1}}).$$

Par hypothèse, $\mathbb{P}_{M_{n-1}}(M_n) = a$ et $\mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(\overline{M_n}) = b$, d'où $\mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(M_n) = 1-b$. On obtient donc

$$p_n = ap_{n-1} + (1-b)(1-p_{n-1}) = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b.$$

Cette égalité reste vérifiée si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 0$ (car $\mathbb{P}(M_n \cap M_{n-1}) = 0 = ap_{n-1}$). De même si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 1$.
La suite (p_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Soit $r \in \mathbf{R}$.

$$r = (a+b-1)r + 1 - b \iff (a+b-2)r = b-1 \iff r = \frac{b-1}{a+b-2}$$

car $a+b-2 \neq 0$. Posons $r = \dfrac{b-1}{a+b-2}$. La suite $(p_n - r)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $a+b-1$. On obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_n - r = (a+b-1)^n(p_0 - r)$, *i.e.* $p_n = \dfrac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^n\dfrac{1-a}{2-a-b}$.

2. Comme $a+b-1 \in]-1\,;\,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+b-1)^n = 0$. La suite (p_n) converge vers $\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

14.3.4. Formule de Bayes

On a un système d'événements $\{E_1, \dots, E_n\}$ (les « causes ») et un événement A (une « conséquence »). On connaît les probabilités $\mathbb{P}(E_1), \dots, \mathbb{P}(E_n)$ ainsi que les probabilités de transitions $\mathbb{P}_{E_1}(A), \dots, \mathbb{P}_{E_k}(A)$.

On cherche à savoir, lorsqu'on a observé que A s'est produit, avec quelle probabilité c'est l'événement E_k qui en est à l'origine ; autrement dit, on cherche à calculer $\mathbb{P}_A(E_k)$.

Exercice d'application 14.56. On reprend l'Exercice d'application 14.49. On voit que le professeur M. est grognon. Quelle est la probabilité qu'il ait regardé un match de Nadal ?

↪ Par définition des probabilités conditionnelles, on a $\mathbb{P}_G(N) = \dfrac{\mathbb{P}(G \cap N)}{\mathbb{P}(G)}$.

On a $\mathbb{P}(G \cap N) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G)$. De plus, on peut calculer $\mathbb{P}(G)$ comme on l'a fait avec la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(G)$. D'où

$$\mathbb{P}_G(N) = \frac{\mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G)}{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(G) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(G)} = \frac{12/100}{79/300} = \frac{36}{79}.$$

On retiendra cette technique dont le résultat est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 14.57 - Formule de Bayes.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement tous de probabilité non nulle. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_A(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)}.$$

Exercice d'application 14.58. Dans un pays, une maladie touche 3% de la population. Pour savoir si un individu est atteint par cette maladie, on dispose d'un test. Lorsque ce test est appliqué à un individu malade, le test renvoie un résultat positif dans 90% des cas. S'il est utilisé sur un individu sain, le test renvoie un résultat négatif dans 96% des cas.

Un individu se présente au centre de test. Le résultat de son test se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?

$\hookrightarrow$ On peut modéliser la situation par un univers $\Omega = \{(a, b) \mid a \text{ est un habitant, } b \text{ est le résultat du test}\}$. On note les évènements suivants :

P = « Le test est positif. »

M = « La personne testée est malade. »

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(M) = 0,03$, $\mathbb{P}_M(P) = 0,9$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P}) = 0,96$.

On cherche à calculer $\mathbb{P}_P(M)$. $\{M, \overline{M}\}$ est un système complet d'évènements, donc par la formule de bayes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_P(M) &= \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P)} \\
&= \frac{0,03 \times 0,9}{0,03 \times 0,9 + (1 - 0,03) \times (1 - 0,96)} \\
&= \frac{0,027}{0,027 + 0,0388} \\
&\approx 0,41
\end{aligned}$$

14.4. Indépendance

14.4.1. Indépendance de deux événements

Remarque 14.59. Si les événements A et B sont tous deux de probabilité non nulle, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

Définition 14.60.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements. On dit que les événements A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
On note alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

Remarque technique 14.61.

1. Autrement dit, pour des événements de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la connaissance du fait que l'un des événements est réalisé ne change pas la probabilité que l'autre événement se réalise.

2. L'indépendance de deux événements résulte souvent d'une hypothèse d'indépendance parmi les données du problème et n'est donc pas toujours à démontrer.

3. L'indépendance est une notion liée à la probabilité, contrairement à la notion d'événements incompatibles, qui elle, n'est liée qu'à l'univers et la tribu. En fait, deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants : dans le cas contraire, on aurait $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0$, ce qui est absurde. Intuitivement, deux événements incompatibles sont dépendants l'un de l'autre puisque la place occupée par l'un ne peut pas être occupée par l'autre.

Exercice d'application 14.62. On lance indépendamment l'un de l'autre deux dés à 6 faces, un rouge et un vert. On considère l'événement $A =$« le dé vert affiche le numéro 1 », l'événement $B =$« le dé rouge affiche le numéro 2 » et $C =$« les deux dés affichent le même numéro ». Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

$\hookrightarrow$ L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, dont les éléments sont (valeur du dé vert, valeur du dé rouge). On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Remarquons déjà que $\mathrm{Card}(\Omega) = 36$.

Commençons par calculer les probabilités de chacun de ces trois évènements :

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$A \cap B = \{(1, 2)\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. D'où $A \perp\!\!\!\perp B$.

$A \cap C = \{(1, 1)\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{\mathrm{Card}(A\cap C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$. D'où $A \perp\!\!\!\perp C$.

$B \cap C = \{(2, 2)\}$, donc $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{\mathrm{Card}(B\cap C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$. D'où $B \perp\!\!\!\perp C$.

◇◇

Proposition 14.63.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors on a : $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Démonstration.
Soient A et B des évènements indépendants.

B et $\overline{B}$ sont des évènements incompatibles, donc $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ le sont aussi. D'où

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}(A) & = & \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) & = & \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \end{array}$$

Donc $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. On obtient les autres résultats en échangeant les places de A et B dans cette preuve. □

14.4.2. Indépendance conditionnelle

Définition 14.64.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un événement de probabilité non nulle et A et B deux événements.
On dit que les événements A et B sont **indépendants sachant** E lorsque $\mathbb{P}_E(A \cup B) = \mathbb{P}_E(A) \times \mathbb{P}_E(B)$, c'est-à-dire lorsqu'il sont indépendant relativement à la probabilité $\mathbb{P}_E$.

Exercice d'application 14.65. On reprend l'Exercice d'application 14.62 du lancer de deux dés à 6 faces. Examiner l'indépendance de A et B, et l'indépendance de A et B conditionnellement à C.

$\hookrightarrow$ On a déjà vu que A et B sont indépendants. Étudions leur indépendance conditionnellement à C.

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B \cap C)}{\text{Card}(C)}.$$

Or, $A \cap B \cap C = \varnothing$, donc $\mathbb{P}_C(A \cap B) = 0$.

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(C)} = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}_C(B) = \frac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(C)} = \frac{1}{6}.$$

Donc, $\mathbb{P}_C(A \cap B) \neq \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$, donc A et B ne sont pas indépendants sachant C.

Cela est cohérent avec la situation réelle : si l'on sait que les valeurs des deux dés sont les même (C), alors savoir si l'évènement A est réalisé donne de l'information sur le fait que l'évènement B soit réalisé.

⚠ **Attention** ⚠**.** L'exercice précédent montre que l'indépendance n'entraîne pas l'indépendance conditionnelle.

On voit donc que la notion d'indépendance simple n'est pas suffisante lorsque l'on considère plus de 2 évènements. On a recours au concept d'indépendance mutuelle.

14.4.3. Indépendance mutuelle

Définition 14.66.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements, où $n \geqslant 2$.
On dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque, pour entier $p \in [\![2, n]\!]$ et toute partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ de $[\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_p}).$$

Exemple 14.67. Avec trois événements A, B et C, ceux-ci sont mutuellement indépendants si, et seulement si,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \qquad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

Exercice d'application 14.68. Reprenons l'Exercice d'application 14.62 du lancer des deux dés. On définit les évènements suivants :

$A =$ « Le dé vert donne un nombre pair. »

$B =$ « Le dé rouge donne un nombre impair. »

$C =$ « Les deux dés sont inférieurs ou égaux à 4. »

Étudier l'indépendance mutuelle de A, B et C.

$\hookrightarrow$ On vérifie facilement que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = 18$ et $\text{Card}(C) = 16$, donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \dfrac{4}{9}$.

- $A \cap B = \{\,(a,b) \in [\![1,6]\!] \mid a \text{ pair et } b \text{ impair }\}$. Donc $\text{Card}(A \cap B) = 9$. D'où
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$
- $\text{Card}(A \cap C) = 8$ par principe multiplicatif, donc
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C).$$
- De même, $\text{Card}(B \cap C) = 8$, donc
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C).$$
- Enfin, $A \cap B \cap C = \{(2,1);(2,3);(4,1),(4,3)\}$, donc $\text{Card}(A \cap B \cap C) = 4$ et
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\frac{4}{9} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C).$$

Donc A, B et C sont mutuellement indépendants. C'est à dire que savoir ci certains de ces évènements sont réalisés ne donne aucune information sur les autres.

Exercice d'application 14.69. On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements :

- $A =$« le premier lancer donne un chiffre pair » ;
- $B =$« le deuxième lancer donne un chiffre impair » ;
- $C =$« l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair ».

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.
2. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

$\hookrightarrow$ On a $A = \{2,4,6\} \times [\![1,6]\!]$, $B = [\![1,6]\!] \times \{2,4,6\}$ et $C = \{2,4,6\}^2 \cup \{1,3,5\}^2$.
$$\mathbb{P}(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

1. $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{2,4,6\}^2$, ainsi
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$
Donc les événements A, B et C sont indépendants deux à deux.
2. $A \cap B \cap C = A \cap B$, ainsi
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8},$$
donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

⚠ **Attention** ⚠**.** Le fait que des événements soient mutuellement indépendants entraîne qu'ils sont deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse en général (cf. Exercice d'application précédent).

Proposition 14.70.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A_1, $A_2, \ldots,$ A_n (où $n \geqslant 2$) des événements mutuellement indépendants.

1. En remplaçant des A_i par leur événement contraire, on obtient encore une famille d'événements mutuellement indépendants.
2. Chacun des A_i est indépendant de tout événement B qu'on peut former par intersections, réunions avec des événements A_k où $k \neq i$ ou leur contraire.

Démonstration. 1. On va démontrer que $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants (l'ordre n'a pas d'importance). Soit $p \in [\![2, n]\!]$ et $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ une partie de $[\![1, n]\!]$.

- 1er cas : $n \notin I$
  Comme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, on a bien $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_p})$.
- 2e cas : $n \in I$. Disons que $i_p = n$. Il s'agit alors de montrer que

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) \times \mathbb{P}(\overline{A_n}).$$

  On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) &= \mathbb{P}\Big((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) \backslash A_n\Big) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) - \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}}) \times \mathbb{P}(A_n) \\
&\qquad \text{(par mutuelle indépendance des } A_1, \ldots A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}})(1 - \mathbb{P}(A_n)) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_{p-1}})\mathbb{P}(\overline{A_n})
\end{aligned}$$

  Ceci prouve que $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants.
  On peut alors remplacer A_{n-1} par son contraire et obtenir que les événements $A_1, \ldots, A_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants. Et ainsi de suite.

2. Démonstration technique. Voyons sur un exemple. On suppose que A, B et C sont mutuellement indépendants et montrons que A et $(B \cup C)$ sont indépendants.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
&= \mathbb{P}(A)\left(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\right) \\
&= \mathbb{P}(A)\left(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)\right) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)
\end{aligned}$$

  Donc A et $B \cup C$ sont indépendants.

□

Exercice d'application 14.71. On fait n lancers indépendants d'une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité de faire face est la même : c'est le nombre $p \in]0, 1[$. Calculer la probabilité d'avoir obtenu pile pour la première fois au dernier lancer.

↪ On note $\Omega = \{\text{pile,face}\}^n$. On munit Ω de la probabilité $\mathbb{P}$ correspondant à l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé.

On définit les évènements suivants, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

P_k = « Le k-ième lancer est Pile »

F_k = « Le k-ième lancer est Face »

La probabilité que l'on cherche à obtenir est $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$. Les lancers étant indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) = p^{n-1}(1-p).$$

⚠ **Attention** ⚠**.** Si A et B sont indépendants d'une part et d'autre part A et C sont indépendants, on ne peut rien dire sur l'indépendance des événements A et $B \cap C$ ou A et $B \cup C$. Voir l'exercice d'application suivant.

Exercice d'application 14.72. On dispose d'un dé rouge et d'un dé noir, tous les deux équilibrés. On lance ces deux dés et les numéros obtenus constituent l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Soit A l'événement « la somme des chiffres est 7 », B « le dé rouge a donné 2 », C « le dé noir a donné 5 » et D « le dé rouge donne un chiffre pair » .

1. Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, non mutuellement indépendants, avec $(A, B \cup C)$ et $(A, B \cap C)$ dépendants.
2. Montrer que A et D sont indépendants, mais que les couples $(A, B \cap D)$ et $(A, B \cup D)$ sont constitués d'événements indépendants.

↪

1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36}$, donc (A, B) et (A, C) sont deux couples d'événements indépendants.
   On a $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36}$ et $\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{11}{36}$, mais $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C)$ donc les événements ne sont pas mutuellement indépendants.
   On a $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$. Les couples $(A, B \cup C)$ et $(A, B \cap C)$ sont dépendants.
2. $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap D) = \frac{1}{12}$, donc $A \perp\!\!\!\perp D$.
   De plus, $\mathbb{P}(B \cap D) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B \cup D) = \mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap D) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap D)$ et $\mathbb{P}(A \cap (B \cup D)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup D) = \frac{1}{12}$. Ainsi $A \perp\!\!\!\perp B \cap D$ et $A \perp\!\!\!\perp B \cup D$.

Chapitre 15

Polynômes à une indéterminée

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et l'expression « au-delà du rang N » signifie « à partir du rang $N+1$ inclus ».

15.1. Définitions, opérations, indéterminée, degré

Définition 15.1.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. On dit que u est **presque nulle** si u est nulle au delà d'un certain rang, *i.e.* s'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $i > N$, $u_i = 0$.

Définition 15.2.

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbf{K}$ toute suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ presque nulle d'éléments de $\mathbf{K}$. Les nombres a_i sont appelés **coefficients** du polynôme.
Si P est un tel polynôme, on note $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}} = (a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$. Les nombres a_i sont appelés les **coefficients** du polynôme P.

Par définition, deux polynômes $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $Q = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont **égaux** si, et seulement si, les suites $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont les mêmes, autrement dit, si, et seulement si, tous leurs coefficients sont égaux :

$$P = Q \iff \forall i \in \mathbf{N},\ a_i = b_i.$$

L'ensemble des polynômes, pour l'instant noté $\mathcal{P}_{\mathbf{K}}$, est donc un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ des suites à coefficients dans $\mathbf{K}$:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{K}} = \left\{(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \mid \exists N \in \mathbf{N},\ \forall i > N,\ a_i = 0\right\}.$$

15.1.1. Opérations et propriétés des opérations

On peut définir plusieurs opérations sur l'ensemble des polynômes. L'addition est définie de la même façon que celle sur l'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbf{K}$:

Définition 15.3.

La **somme** des deux polynômes $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $Q = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est définie par

$$P + Q = (a_i + b_i)_{i\in\mathbf{N}}.$$

Dans la définition précédente, si la suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est nulle au-delà du rang N_p et la suite $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ nulle au-delà du rang N_q, alors la suite $(a_i + b_i)$ est nulle au delà du rang $\max(N_p, N_q)$ donc $P+Q$ est bien un polynôme.

On peut également définir le produit par un élément de $\mathbf{K}$ (produit externe) de la même façon que sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$:

Définition 15.4.

Le **produit** d'un polynôme $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ par un *scalaire* $\lambda \in \mathbf{K}$ est défini par

$$\lambda \cdot P = (\lambda a_i)_{i\in\mathbf{N}}.$$

Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est nulle au-delà du rang N, alors la suite $(\lambda a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est nulle aussi au-delà du rang N donc $\lambda \cdot P$ est bien un polynôme.

Enfin, on peut définir le produit de deux polynômes (produit interne). Cette multiplication n'est pas définie comme celle de deux suites numériques quelconques.

Définition 15.5 - Produit de Cauchy.

Le **produit** des deux polynômes $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $Q = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est défini par

$$P \times Q = (c_i)_{i\in\mathbf{N}} \qquad \text{où} \quad \forall i \in \mathbf{N}, \quad c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = \sum_{\substack{k,\ell\geqslant 0 \\ k+\ell=i}} a_k b_\ell.$$

Cette opération est appelée **produit de Cauchy**.

Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est nulle au-delà du rang N_p et si la suite $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est nulle au delà du rang N_q, alors la suite $(c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est nulle au delà du rang $N_p + N_q$. En effet, si $i > N_p + N_q$, alors

$$c_i = \sum_{k=0}^{N_p} a_k \underbrace{b_{i-k}}_{\substack{=0 \\ \text{car } i-k>N_q}} + \sum_{k=N_p+1}^{i} \underbrace{a_k}_{=0} b_{i-k} = 0$$

donc $P \times Q$ est bien un polynôme et la multiplication ainsi définie est opération interne sur $\mathcal{P}_{\mathbf{K}}$ (qui n'est pas le produit « classique » des deux suites $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$).

- On peut vérifier que :
  - l'addition est une opération associative et commutative,
  - le polynôme nul 0 est l'élément neutre de l'addition,
  - tout polynôme $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ possède un opposé noté $-P$ et l'on a

$$-P = (-a_i)_{i\in\mathbf{N}} = -1 \cdot P$$

On dit que $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}}, +)$ est un groupe commutatif.

- On vérifie aussi facilement que :
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ \forall P \in \mathcal{P}_{\mathbf{K}},\ (\alpha + \beta) \cdot P = \alpha \cdot P + \beta \cdot P$,
  - $\forall \alpha \in \mathbf{K},\ \forall P, Q \in \mathcal{P}_{\mathbf{K}},\ \alpha \cdot (P + Q) = \alpha \cdot P + \alpha \cdot Q$,
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ \forall P \in \mathcal{P}_{\mathbf{K}},\ \alpha \cdot (\beta \cdot P) = (\alpha\beta) \cdot P$,
  - $\forall P \in \mathcal{P}_{\mathbf{K}},\ 1 \cdot P = P$.

  Ces quatre propriétés de la multiplication externe, combinées avec le fait que $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}}, +)$ est un groupe commutatif, confèrent à $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}}, +, \cdot)$ une structure d'espace vectoriel.
- On a par ailleurs :
  - la multiplication interne (produit de Cauchy) est associative,
  - la multiplication interne est commutative : soit $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $Q = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ deux polynômes ; on pose $P \times Q = (c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $Q \times P = (d_i)_{i\in\mathbf{N}}$, alors pour tout $i \in \mathbf{N}$,

    $$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} \underset{k'=i-k}{=} \sum_{k'=0}^{i} a_{i-k'} b_{k'} = \sum_{k'=0}^{i} b_{k'} a_{i-k'} = d_i$$

    donc $P \times Q = Q \times P$.
  - le polynôme unité $1 = (1, 0, 0, \dots) = (u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est élément neutre pour la multiplication interne.
  - la multiplication interne est distributive par rapport à l'addition : pour tous polynômes P, Q et R, on a $(P + Q) \times R = P \times R + Q \times R$ et $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

  Enfin, la multiplication externe est associative et commutative, distributive par rapport à l'addition, d'élément neutre le polynôme unité $1 = (1, 0, 0, \dots)$.
  Ces propriétés, combinées avec le fait que $(\mathcal{P}_{\mathbf{K}}, +)$ soit un groupe commutatif, confère à $(\mathcal{P}, +, \times)$ une structure d'anneau commutatif.

On a $P \times 0 = 0 \times P = 0$ pour tout polynôme P, la notation P^0 désigne le polynôme 1 (unité pour la multiplication) et l'on a $P \times 1 = 1 \times P = P$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, P^n désigne le polynôme $\underbrace{P \times P \times \dots P}_{n \text{ facteurs}}$.

15.1.2. Indéterminée

On note X le polynôme $X = (0, 1, 0, 0, \dots) = (v_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

- X^0 est le **polynôme unité** : $X^0 = 1 = (1, 0, 0, \dots)$.
- $X^1 = X = (0, 1, 0, 0, \dots)$.
- Déterminons X^2.

  On sait que $X^2 = X \times X = (c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ où, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $c_i = \sum_{k=0}^{i} v_k v_{i-k}$.

  $c_0 = v_0 v_0 = 0, \quad c_1 = v_0 v_1 + v_1 v_0 = 0, \quad c_2 = v_0 v_2 + v_1 v_1 + v_2 v_0 = 0 + 1 + 0 = 1$ et comme la suite définissant X est nulle au delà du rang 1, on sait qu'au delà du rang $1+1 = 2$ (cf définition du produit interne plus haut) les termes au delà du rang 1 de la suite X^2 sont nuls.
  Ainsi, $X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.
- Par récurrence, on peut montrer que pour tout $i \in \mathbf{N}$, X^i est le polynôme $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ où le 1 est en position i (en commençant la numérotation à 0 comme en Python).

Soit $P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ un polynôme. On sait qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $i > n,\ a_i = 0$.

Alors

$$\begin{aligned} P &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \\ &= a_0 \cdot (1, 0, 0, \dots) + a_1 \cdot (0, 1, 0, \dots) + \dots + a_n \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &= a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n \end{aligned}$$

Proposition 15.6.

Tout polynôme P à coefficients dans $\mathbf{K}$ peut s'écrire sous la forme

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$

où $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$. Le polynôme X est appelé l'**indéterminée** du polynôme P. On dit que P est un polynôme à une indéterminée.

⚠ **Attention** ⚠**.** X est le polynôme (0,1,0..) et n'est pas un nombre.

On n'écrira donc JAMAIS : « je pose $X = 5$... » car ÇA N'A AUCUN SENS.

Notation 7. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ d'indéterminée X est noté $\mathbf{K}[X]$.

Définition 15.8.

On appelle **monôme** tout polynôme de la forme a_iX^i où $i \in \mathbf{N}$ et $a_i \in \mathbf{K}$.
Les polynômes de la forme a_0 sont appelés les **polynômes constants**.

On peut réécrire les opérations définies précédemment. Soit $p, q \in \mathbf{N}$, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ et $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$.

- Quitte à rajouter des coefficients nuls, on peut écrire P et Q sous la forme

  $$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n = \sum_{i=0}^{n} b_iX^i$$

  où $n = \max(p, q)$. Alors

  $$\begin{aligned} P + Q &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)X^i \end{aligned}$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$,

  $$\begin{aligned} \lambda \cdot P &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + \cdots + (\lambda a_n)X^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda a_iX^i \end{aligned}$$

- $$P \times Q = \sum_{i=0}^{p+q} \Big(\sum_{\substack{k+\ell=i \\ k\in\{0,\ldots,p\} \\ \ell\in\{0,\ldots,q\}}} a_kb_\ell \Big) X^k.$$

On dit que :

1. $(\mathbf{K}[X], +)$ est un groupe abélien,
2. $(\mathbf{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif,
3. $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exemple 15.9.

$$\begin{aligned} &(X^5 + 2X - i) + (X^3 - X^2 - X + i) = X^5 + X^3 - X^2 + X, \\ &(3X^3 - 4X + 1) + (-3X^3 + X^2 + 1) = X^2 - 4X + 2, \\ &(X + 1) \cdot (-iX^2 + X + 2) = -iX^3 + (1 - i)X^2 + 3X + 2. \end{aligned}$$

15.1.3. Composition des polynômes

Définition 15.10.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et Q deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$.
On définit le **polynôme composé** $P \circ Q$, noté aussi $P(Q)$ par

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

Exemple 15.11. Si $P = X^2 + 2X - 1$ et $Q = X + 3$, alors

$$P \circ Q = (X+3)^2 + 2(X+3) - 1 = X^2 + 6X + 9 + 2X + 6 - 1 = X^2 + 8X + 14$$

et

$$Q \circ P = (X^2 + 2X - 1) + 3 = X^2 + 2X + 2.$$

Exercice d'application 15.12. Soit $A \in \mathbf{K}[X]$. On dit que A est un **polynôme pair** si $A(X) = A(-X)$. Montrer que si A est pair , alors il existe $B \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = B(X^2)$.

$\hookrightarrow$ Soit $A \in \mathbf{K}[X]$. Notons $a_0, ..., a_n \in \mathbf{K}$ les coefficients de A. On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = A(X) = A(-X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-X)^k.$$

donc, par identification (puisque deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux), pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = (-1)^k a_k$. En particulier, pour tout $p \in [\![0, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]\!]$, $a_{2p+1} = -a_{2p+1}$, donc $a_{2p+1} = 0$, donc en posant $B = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p} X^p$. Ainsi $A = B(X^2)$.

Remarque 15.13. Dans le cas particulier où $Q = X$, le polynôme $P \circ Q = P(Q) = P(X)$ est égal à P. On peut donc aussi bien utiliser la notation $P(X)$ que la notation P pour désigner le polynôme P.

15.1.4. Degré d'un polynôme

Définition 15.14.

Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$. L'ensemble $\{ i \in \mathbf{N} \mid a_i \neq 0 \}$ possède un plus grand élément d. Le nombre entier d est appelé le **degré** du polynôme P et noté $\deg(P)$.
Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Démonstration.
Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$.

$\{ i \in \mathbf{N} \mid a_i \neq 0 \}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ non vide (car P est supposé non nul) et majoré (car la suite $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est nulle au-delà d'un certain rang), donc il possède un plus grand élément. □

Exemple 15.15. $\deg(3X^5 - X + 1) = 5$.

Remarque 15.16. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls.

Proposition 15.17.

- Si un polynôme P s'écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors son degré est inférieur ou égal à n.
- Tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ où $a_d \neq 0$ est de degré d.

Définition 15.18.

- Tout polynôme P non nul de degré $d \geqslant 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{K}^{d+1}$ et $a_d \neq 0$. Le coefficient a_d est appelé le **coefficient dominant** de P.
- Un polynôme non nul est **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Proposition 15.19.

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}^\star$.

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
   De plus, on peut préciser que si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
   Si P et Q ne sont pas nuls, si $\deg(P) = \deg(Q)$ et que les coefficients dominants de P et Q ne sont pas opposés, alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) = \deg(P) = \deg(Q)$.
2. $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

(toutes les opérations ont lieu dans $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$.)

Démonstration.
Soit P et Q deux polynômes de degrés respectifs d et d' où $d, d' \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\}$.

1. - Si $P = 0$, alors $P + Q = Q$ donc $\deg(P+Q) = \deg(Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
   - Si $Q = 0$, alors $P + Q = P$ donc $\deg(P+Q) = \deg(P) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
   - Supposons maintenant que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Donc P et Q s'écrivent $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{d'} b_i X^i$ où $a_0, \ldots, a_d, b_0, \ldots, b_{d'} \in \mathbf{K}$ et $a_d \neq 0$ et $b_{d'} \neq 0$.
     - Cas où $d < d'$: on a
     $$P + Q = \sum_{i=0}^{d} (a_i + b_i) X^i + \sum_{i=d+1}^{d'} b_i X^i = \sum_{i=0}^{d'} s_i X^i$$
     où pour tout $i \in [\![0, d']\!]$, $s_i = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i \leqslant d \\ b_i & \text{si } i > d \end{cases}$. Puisque $s_{d'} = b_{d'} \neq 0$, le polynôme $P + Q$ est de degré d' donc $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
     - De même, si $d' < d$ alors le polynôme $P + Q$ est de degré d donc $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
     - Cas où $d = d'$. On a $P + Q = \sum_{i=0}^{d} (a_i + b_i) X^i$. Si $a_d + b_d \neq 0$, alors $\deg(P+Q) = \deg(d) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ et sinon, $\deg(P+Q) < \deg(d)$ donc $\deg(P+Q) < \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.

Dans tous les cas, on constate que $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.

2. Notons a_n le coefficient dominant de P. Alors le coefficient dominant de λP est λa_n et $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
3.
   - Si $P = 0$ ou $Q = 0$, alors $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(Q) = -\infty$, et $P \times Q = 0$ donc
   $$\deg(P \times Q) = -\infty = \deg(P) + \deg(Q).$$
   - On suppose que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Alors P et Q s'écrivent $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{d'} b_i X^i$ où $a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_{d'} \in \mathbf{K}$ et $a_d \neq 0$ et $b_{d'} \neq 0$. On a
   $$P \times Q = \sum_{i=0}^{d+d'} \Big(\sum_{\substack{k+\ell=i \\ k\in\{0,\dots,d\} \\ \ell\in\{0,\dots,d'\}}} a_k b_\ell \Big) X^k..$$
   Dans la somme précédente, le coefficient devant $X^{d+d'}$ est $a_d b_{d'}$ qui n'est pas nul. Donc
   $$\deg(P \times Q) = d + d' = \deg(P) + \deg(Q).$$

□

Exemple 15.20. Soit $P = 3X^2 + X + 1$, $Q = -X^3 + 1$ et $R = X^3 + X^2 + 1$. Alors, $\deg(P) = 2$, $\deg(Q) = 3$ et $\deg(R) = 3$. De plus, $P + Q = -X^3 + 3X^2 + X + 2$, $Q + R = X^2 + 2$ et $P \times Q = -3X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 + X + 1$.
On constate que $\deg(P+Q) = 3 = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$, $\deg(Q+R) = 2 < \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ et $\deg(P \times Q) = 5 = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque 15.21. Soit P et Q tels que $P \times Q = 1$. Alors $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ donc $\deg(P) \geqslant 0$ et $\deg(Q) \geqslant 0$. Or $0 = \deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ donc $\deg(P) = \deg(Q) = 0$. Donc P et Q sont des polynômes constants non nuls. Donc si un polynôme P possède un inverse pour la multiplication, alors P est un polynôme constant non nul. Réciproquement, tout polynôme constant non nul possède un inverse pour la multiplication (si $P = a$ où $a \in \mathbf{K}$ et $a \neq 0$, alors $P \times \frac{1}{a} = 1$). Les polynômes **inversibles** sont donc les polynômes constants non nuls.

Cela signifie qu'un objet comme $\frac{1}{X^2 + 3X + 9}$ n'est pas un polynôme.

Exercice d'application 15.22. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P = (X^2 + 1)^n - (X^2 - 1)^n$.

↪ On obtient $\deg(P) \leqslant 2n$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on observe que :
- le coefficient en X^{2n} est nul ;
- le coefficient en X^{2n-1} est nul (P est pair, donc il n'apparaît que des puissances paires de X dans P) ;
- le coefficient en X^{2n-2} est
$$nX^{2n-2} - (-nX^{2n-2}) = 2nX^{2n-2}.$$

Donc $\deg(P) = 2n - 2$ et le coefficient dominant de P est $2n$.

◇◇

Remarque technique 15.23. Si on cherche un ensemble de polynômes vérifiant une certaine contrainte, l'utilisation du degré peut permettre de restreindre le champ de recherche (dans un raisonnement par analyse-synthèse par exemple).

Exercice d'application 15.24. Déterminer les couples (A, B) de polynômes tels que $B^2 = X \times A^2$.

↪ *Analyse*. On suppose qu'il existe un couple (A, B) solution. On a $\deg(B^2) = \deg(XA^2)$, donc $2\deg(B) = 1 + 2\deg(A)$. Or $\deg(A), \deg(B) \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\}$. Si $(\deg(A), \deg(B)) \in \mathbf{N}^2$, l'égalité est impossible, donc $A = 0$ ou $B = 0$. Dans tous les cas, on obtient $A = B = 0$.

Synthèse. $0^2 = X \times 0^2$.
Conclusion. Ainsi l'unique couple solution est $(0, 0)$.

Exercice d'application 15.25. Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifiant $P \circ P = P$.

$\hookrightarrow$ *Analyse.* Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P \circ P = P$. Supposons $P \neq 0$, notons $n = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_k \neq 0$. Alors $P \circ P = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k$. Le terme de plus au degré de ce dernier polynôme est $a_n^n X^{n^2}$ avec $a_n^n \neq 0$, d'où $\deg(P \circ P) = n^2$. Ainsi, $n^2 = n$ puis $n \in \{0, 1\}$.
Synthèse.

- $P = 0$ est solution du problème.
- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ avec $\deg(P) = 0$. Il existe $a_0 \in \mathbf{R}^\star$ tel que $P = a_0$. Alors $P \circ P = a_0 = P$. Donc P est solution du problème.
- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ avec $\deg(P) = 1$. Il existe $(a_0, a_1) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\star$ tel que $P = a_0 + a_1 X$. Alors $P \circ P = a_0 + a_1(a_0 + a_1 X) = a_0(1 + a_1) + a_1^2 X$. Donc P est solution si et seulement si
$$\begin{cases} a_0(1+a_1) & = & a_0 \\ a_1^2 & = & a_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \end{cases}$$
Dans ce cas seul X est solution.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\{0, X\} \cup \{\lambda \,:\, \lambda \in \mathbf{R}^\star\}$.

◇◇

Proposition 15.26.

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. Si $\deg(Q) \geqslant 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Notation 27. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n (autrement dit, $\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}$).

Exemple 15.28. $\mathbf{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \mid (a, b, c) \in \mathbf{K}^3\}$. L'ensemble $\mathbf{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants (y compris le polynôme nul).

Proposition 15.29.

Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ est stable par addition et multiplication externe par un scalaire, autrement dit :
$$\forall P, Q \in \mathbf{K}_n[X],\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad P + Q \in \mathbf{K}_n[X] \text{ et } \lambda P \in \mathbf{K}_n[X].$$

Démonstration.
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On sait que
$$\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) \leqslant n$$
et $\deg(\lambda P) \leqslant n$. □

Remarque 15.30. $\mathbf{K}_n[X]$ n'est pas stable par produit en général. Il est stable par produit si et seulement si $n = 0$.

Théorème 15.31.

Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$.
$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Démonstration.
Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$.
Réciproquement, supposons que $AB = 0$. Alors $\deg(AB) = -\infty$, *i.e.* $\deg(A) + \deg(B) = -\infty$. Or $\deg(A), \deg(B) \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\}$, donc $\deg(A) = -\infty$ ou $\deg(B) = -\infty$, *i.e.* $A = 0$ ou $B = 0$. □

Remarque 15.32. Le théorème précédente signifie que $(\mathbf{R}[X], +, \times)$ est un anneau intègre.

Exemple 15.33. Soit $(P, Q, R) \in \mathbf{K}[X]^3$. $PR = PQ \iff P = 0$ ou $R = Q$

15.1.5. Fonctions polynomiales

Définition 15.34.

- On appelle **fonction polynomiale** sur $\mathbf{K}$ toute application f de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$ telle qu'il existe un entier n et des éléments $a_0, \dots, a_n$ de $\mathbf{K}$ tels que
$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$
- À tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on associe une fonction polynomiale que l'on note $\widetilde{P}$, définie par :
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P} : & \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}$$
Cette fonction polynomiale est la **fonction polynomiale associée** au polynôme P.

Remarque 15.35. Si f est une fonction polynomiale, il existe évidemment un polynôme P de $\mathbf{K}[X]$ telle que $f = \widetilde{P}$. Nous verrons plus loin que le polynôme P est unique (car on utilise $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

Si l'on travaillait avec des polynômes à coefficients dans un autre *corps* que $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, alors l'unicité n'aurait pas été assurée.

On distinguera dans tout ce cours un polynôme P de sa fonction polynomiale en notant cette dernière $\widetilde{P}$ (même nom que le polynôme avec un tilde). Il faut faire attention car cette notation n'est pas officielle (on utilise souvent le même nom pour le polynôme et sa fonction polynomiale, ce qui constitue un abus de langage toléré).

Proposition 15.36.

Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
1. $\widetilde{\lambda A} = \lambda \widetilde{A}$.
2. $\widetilde{A + B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$.
3. $\widetilde{A \times B} = \widetilde{A} \times \widetilde{B}$.
4. $\widetilde{A \circ B} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B}$.

Pour évaluer en x une fonction polynomiale $\tilde{P} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, il suffit de faire n additions et n multiplications suivant le parenthésage ci-dessous (en commençant par la parenthèse la plus intérieure) :

$$P(x) = ((\cdots((p_n x + p_{n-1})x + p_{n-2})x + \cdots)x + p_1)x + p_0.$$

Cette méthode, appelée **algorithme de Hörner**, est la méthode la plus efficace pour évaluer une fonction polynomiale en un point x.

Exercice d'application 15.37. Évaluer $P = 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 1$ en -2 grâce à l'algorithme de Hörner.

$\hookrightarrow$ On a $P = ((2X-1)X+3)X^2 - 1$, donc

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(-2) &= ((2\times(-2)-1)\times(-2)+3)\times(-2)^2-1\\ &= ((-5)\times(-2)+3)\times(-2)^2-1\\ &= 13\times(-2)^2-1\\ &= 52-1\\ &= 51\end{aligned}$$

On peut implémenter cet algorithme en Python. On choisit de stocker les coefficients du polynôme dans un tableau.

```
def horner(P, x):
    n = len(P)
    y = P[n-1]
    for k in range(1, n):
        y = y*x + P[n-k-1]
    return y
```

Exemple d'appel :

```
>>> horner([-1,0,3,-1,2], -2)
51
```

15.1.6. Dérivées

Définition 15.38.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbf{N}$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$, on définit son **polynôme dérivé** P' par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) a_{\ell+1} X^{\ell}.$$

Le polynôme P' est défini de sorte que, lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, la fonction polynôme associée à P' soit la dérivée de la fonction polynôme associée à P. La dérivation des polynômes possède donc les mêmes propriétés que la dérivation des fonctions, à savoir

$$(P+Q)' = P'+Q', \quad (\lambda P)' = \lambda P', \quad (P\circ Q)' = Q'\times P'\circ Q \quad \text{et} \quad (PQ)' = P'Q + PQ',$$

pour tous $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

On peut évidemment itérer le processus de dérivation. Comme dans le cas des fonctions, on utilise alors les notations P'', P''' et $P^{(\ell)}$ pour désigner respectivement les dérivées seconde, troisième et ℓ-ième de P. Plus précisément, si $D : \begin{array}{ccc}\mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P'\end{array}$, alors

$$P^{(\ell)} = (\underbrace{D\circ D\circ\cdots\circ D}_{\ell \text{ fois}})(P).$$

Par convention, on pose $P^{(0)} = P$.

On a alors,
$$(P+Q)^{(\ell)} = P^{(\ell)} + Q^{(\ell)}, \quad (\lambda P)^{(\ell)} = \lambda P^{(\ell)}.$$
pour tous $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, $\lambda \in \mathbf{K}$, $\ell \in \mathbf{N}$.

Exemple 15.39. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2}$.

Proposition 15.40.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On a
$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } P \text{ n'est pas constant,} \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant.} \end{cases}$$
Plus généralement, si P n'est pas nul, pour tout entier naturel $\ell \leqslant \deg(P)$, on a $\deg(P^{(\ell)}) = \deg(P) - \ell$ et pour tout entier naturel $\ell \geqslant \deg(P) + 1$, on a $P^{(\ell)} = 0$.

Démonstration.
Le premier point est évident avec la définition.

On suppose que P n'est pas nul.

Pour tout $\ell \in [\![0, \deg(P)]\!]$, on note $\mathcal{H}_\ell$ la propriété : $\deg(P^{(\ell)}) = \deg(P) - \ell$.

- $\mathcal{H}_0$ est clairement vérifiée.
- Soit $\ell \in [\![0; \deg(P) - 1]\!]$. On suppose que la propriété $\mathcal{H}_\ell$ est vraie. Le polynôme $P^{(\ell)}$ a pour degré $\deg(P) - \ell \geqslant 1$ donc il n'est pas constant et l'on a
$$\deg(P^{(\ell+1)}) = \deg\left(\left(P^{\ell}\right)'\right) = \deg(P^{(\ell)}) - 1 = \deg(P) - (\ell + 1)$$
donc la propriété $\mathcal{H}_{\ell+1}$ est vraie.

Le principe de récurrence finie assure que le résultat est vrai pour tout $\ell \in [\![0; \deg(P)]\!]$.

Le polynôme $P^{(\deg(P))}$ est un polynôme constant donc d'après le premier point, les dérivées suivantes de P sont toutes nulles.

□

Exemple 15.41.
$$P = X^3 + X + 1 \qquad P' = 3X^2 + 1 \qquad P^{(2)} = 6X \qquad P^{(3)} = 6 \quad \text{et} \quad \forall \ell \geqslant 4,\ P^{(\ell)} = 0.$$

Proposition 15.42.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $\ell \in [\![0; n]\!]$,
$$(X^n)^{(\ell)} = n(n-1)\dots(n-\ell+1)X^{n-\ell} = \frac{n!}{(n-l)!}X^{n-\ell}$$
et pour tout $\ell \geqslant n+1$, $(X^n)^{(\ell)} = 0$.

Démonstration.
La deuxième partie du résultat est évidente d'après la proposition précédente. Pour la première partie, on raisonne par récurrence finie : pour tout entier $\ell \in [\![0; n]\!]$, on note $\mathcal{P}_\ell$ la propriété : $(X^n)^{(\ell)} = n(n-1)\dots(n-\ell+1)X^{n-\ell} = \frac{n!}{(n-l)!}X^{n-\ell}$.

- La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie (facile).
- Soit $\ell \in [\![0; \underline{n-1}]\!]$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}_\ell$ est vraie. Alors

$$(X^n)^{(\ell+1)} = \left((X^n)^{(\ell)}\right)' = \left(\frac{n!}{(n-\ell)!}X^{n-\ell}\right)' = \frac{n!}{(n-\ell)!}(n-\ell)X^{n-(\ell+1)} = \frac{n!}{(n-(\ell+1))!}X^{n-(\ell+1)}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_{\ell+1}$ est vraie.

Par récurrence finie, on obtient que pour tout $\ell \in [\![0; n]\!]$, $(X^n)^{(\ell)} = n(n-1)\dots(n-\ell+1)X^{n-\ell} = \dfrac{n!}{(n-l)!}$. □

Proposition 15.43 - Formule de Leibniz.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbf{K}[X]$ et tout entier naturel n, on a

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Même démonstration que celle faite dans le chapitre « Dérivation des fonctions d'une variable réelle ».

15.1.7. Formule de Taylor

Théorème 15.44 - Formule de Taylor.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}_n[X]$.

1. Formule de Taylor en 0. $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
2. Formule de Taylor en $a \in \mathbf{K}$. $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

Démonstration. 1. Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$.

$$P^{(\ell)} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)^{(\ell)} = \sum_{k=\ell}^{n} a_k \frac{k!}{(k-\ell)!} X^{k-\ell}$$

car $\left(X^k\right)^{(\ell)} = 0$ si $k < \ell$ et $\left(X^k\right)^{(\ell)} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!}X^{k-\ell}$ si $k \geqslant \ell$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^{(\ell)}(0) &= \sum_{k=\ell}^{n} a_k \frac{k!}{(k-\ell)!} 0^{k-\ell} \\ &= a_\ell \frac{\ell!}{(\ell-\ell)!} \qquad \text{car } 0^{k-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k-\ell > 0 \\ 1 & \text{si} \quad k-\ell = 0 \end{cases} \\ &= a_\ell \, \ell! \end{aligned}$$

Donc $a_\ell = \dfrac{\widetilde{P}^{(\ell)}(0)}{\ell!}$ et ensuite $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

2. Soit $a \in \mathbf{K}$ et $Q = P(X+a)$. On peut démontrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q^{(k)} = P^{(k)}(X+a)$.
On applique ensuite la formule de Taylor en 0 à Q.

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{Q}^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

Or $P = Q(X-a)$ donc $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$. □

Corollaire 15.45.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$,

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = \frac{\widetilde{P}^{(k)}(0)}{k!}$$

15.2. Arithmétique des polynômes

15.2.1. Diviseurs et multiples

Définition 15.46.

Soit A et B deux polynômes. On dit que A est un **diviseur** de B ou que A divise B ou encore que B est un **multiple** de A si et seulement si il existe un polynôme K tel que $B = KA$.
On note alors $A \mid B$.

Exemple 15.47.
1. Pour tout $A \in \mathbf{K}[X]$, $1 \mid A$ et $A \mid 0$.
2. Si $0 \mid A$, alors $A = 0$.
3. Si $\lambda \in \mathbf{K}^\star$, alors $\lambda \mid A$.
4. $X - 1 \mid X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
5. $2X^2 - 2 \mid X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = \frac{1}{2}(2X^2 - 2)$.

Exercice d'application 15.48. Montrer que pour tout $(a,n) \in \mathbf{K} \times \mathbf{N}^\star$, $X - a \mid X^n - a^n$.

↪ Soit $a \in \mathbf{K}$. On a

$$X^n - a^n = (X - A) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} X^k.$$

Proposition 15.49.

Soit $P, Q \in \mathbf{K}[X]$.

$$(P \mid Q \text{ et } Q \mid P) \iff \exists\, k \in \mathbf{K}^\star,\ P = kQ.$$

Démonstration.
Si $P \mid Q$ et $Q \mid P$, alors il existe K_1 et K_2 dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $Q = K_1 P$ et $P = K_2 Q$. Donc $Q = K_1 K_2 Q$.

Si $Q = 0$, alors $P = K_2 Q = 0$ et la propriété est vraie.

Si $Q \neq 0$, alors $K_1 K_2 = 1$ et donc K_1 et K_2 sont des polynômes constants non-nuls, donc il existe $k \in \mathbf{K}^\star$ tel que $K_2 = k$ et $P = kQ$.

Le sens réciproque est évident. □

Si la condition de la proposition précédente est satisfaite, on dit que les polynômes P et Q sont **associés** .

Proposition 15.50.

Soit $A, B, C, D \in \mathbf{K}[X]$.

1. Si $A \mid B$ et $B \mid C$, alors $A \mid C$.
2. Si $A \mid B$ et $A \mid C$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $A \mid \lambda B + \mu C$.
3. Si $A \mid B$ et $C \mid D$, alors $AC \mid BD$.

Démonstration. 2. Supposons que $A \mid B$ et $A \mid C$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Il existe $P_1, P_2 \in \mathbf{K}[X]$ tels que $B = AP_1$ et $C = AP_2$. Ainsi,

$$A = \lambda B + \mu C = A(\underbrace{\lambda P_1 + \mu P_2}_{\in \mathbf{K}[X]}),$$

donc $A \mid \lambda B + \mu C$.
Les autres points sont laissés en exercice. □

Proposition 15.51.

Soient P, Q deux polynômes avec $Q \neq 0$. Si $P \mid Q$, alors $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$.

Démonstration.
Si $P \mid Q$, alors il existe $K \in \mathbf{K}[X]$ tel que $PK = Q$. Donc $\deg(PK) = \deg(Q)$.

Donc $\deg(P) + \deg(K) = \deg(Q)$.

Comme Q est non-nul, K est non-nul donc $\deg(K) \leqslant 0$ et donc $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$. □

15.2.2. Division euclidienne de deux polynômes

Théorème 15.52 - Division euclidienne.

Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $A = QB + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
Cette écriture est la **division euclidienne** de A par B, avec Q le **quotient** et R le **reste**.

Démonstration. • *Unicité.* Soit $(Q_1, R_1) \in \mathbf{K}[X]^2$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbf{K}[X]^2$ tels que $A = BQ_1 + R_1$ et $A = BQ_2 + R_2$. On a donc $BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ d'où $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$.
En prenant le degré de ces polynômes, on obtient :

$$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B).$$

Donc $\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) < \deg(B)$ et donc $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$. On en déduit que $Q_1 - Q_2$ est le polynôme nul et que $Q_1 = Q_2$
Comme $R_2 - R_1 = B(Q_1 - Q_2) = B \times 0 = 0$ on a aussi que $R_1 = R_2$.
Ainsi $(Q_1, R_1) = (Q_2, R_2)$.

- *Existence.* On fait une récurrence sur le degré. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « pour tout polynôme A tel que $\deg(A) < n$, il existe $Q, R \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = BQ+R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ ».
Notons $d = \deg(B)$. Puisque $B \neq 0$, $d \geqslant 0$. Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ avec $\deg(A) < d$. alors $A = B \times 0 + A$. Ainsi H_k est vraie pour tout $k \leqslant d$.
Soit $n \geqslant d$ tel que H_n soit vraie. Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ avec $\deg(A) < n+1$. Notons $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Notons b_d le coefficient dominant de B. Considérons
$$A_1 = A - \frac{a_n}{b_d} X^{n-d} \times B.$$
Le coefficient de X^n dans $\frac{a_n}{b_d} X^{n-d} \times B$ est $\frac{a_n}{b_d} \times b_d = a_n$. Ainsi $\deg(A_1) \leqslant n-1 < n$. D'après H_n, il existe $Q_1, R_1 \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A_1 = BQ_1 + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(B)$. Ainsi,
$$B\left(Q_1 + \frac{a_n}{b_d} X^{n-d}\right) + \underbrace{R_1}_{\deg(R_1)<\deg(B)}$$
ce qui prouve H_{n+1}.
Le principe de récurrence permet de conclure. □

$(\mathbf{K}[X], +, \times)$ est un anneau euclidien (*i.e.* un anneau sur lequel on peut définir une division euclidienne). Par conséquent, le théorème de Bézout, le lemme d'Euclide, la notion de PGCD et de PPCM existent aussi pour les polynômes.

◇◇◇

Remarque technique 15.53. En pratique, on peut poser la division en faisant disparaître les monômes de plus haut degré successivement. Par exemple, considérons $A = X^4 + 3X^2 - 5X + 1$ et $B = X^2 - 3X$ et détaillons le calcul.

1. On soustrait à A un multiple de B de sorte que X^4 disparaisse.
$$\begin{array}{rrrr|l} X^4 & & +3X^2 & -5X+1 & X^2 - 3X \\ \cline{5-5} -X^4 & +3X^3 & & & X^2 \\ \cline{1-2} & 3X^3 & +3X^2 & & \end{array}$$
On note $A_1 = 3X^3 + 3X^2$ le nouveau polynôme obtenu.
2. On soustrait à A_1 un multiple de B de sorte que $3X^3$ disparaisse.
$$\begin{array}{rrrrr|l} X^4 & & +3X^2 & -5X & +1 & X^2 - 3X \\ \cline{6-6} -X^4 & +3X^3 & & & & X^2 + 3X \\ \cline{1-2} & 3X^3 & +3X^2 & & & \\ & -3X^3 & +9X^2 & & & \\ \cline{2-3} & & 12X^2 & -5X & & \end{array}$$
On note $A_2 = 12X^2 - 5X$ le nouveau polynôme obtenu.
3. On soustrait à A_2 un multiple de B de sorte que $12X^2$ disparaisse.
$$\begin{array}{rrrrr|l} X^4 & & +3X^2 & -5X & +1 & X^2 - 3X \\ \cline{6-6} -X^4 & +3X^3 & & & & X^2 + 3X + 12 \\ \cline{1-2} & 3X^3 & +3X^2 & & & \\ & -3X^3 & +9X^2 & & & \\ \cline{2-3} & & 12X^2 & -5X & & \\ & & -12X^2 & +36X & & \\ \cline{3-4} & & & 31X & +1 & \end{array}$$
Le reste est de degré 1 donc on ne peut plus poursuivre. Finalement, $A = B(X^2 + 3X + 12) + (31X + 1)$.

◇◇◇

Exemple 15.54. 1. Effectuons la division euclidienne de $A = X^3 + 3X + 2$ par $B = X^2 + X$.

$$\begin{array}{rl|l} X^3 + 3X^2 & +2 & X^2 + X \\ \cline{3-3} -X^3 - X^2 & & X + 2 \\ \cline{1-1} 2X^2 & & \\ -2X^2 - 2X & & \\ \cline{1-1} -2X + 2 & & \end{array}$$

Donc $A = B(X + 2) - (2X + 2)$.

2. Effectuons la division euclidienne de $A = X^7 - 3X + 1$ par $B = X^2 + 1$.

$$\begin{array}{rl|l} X^7 & -3X + 1 & X^2 + 1 \\ \cline{3-3} -X^7 - X^5 & & X^5 - X^3 + X \\ \cline{1-1} -X^5 & & \\ X^5 + X^3 & & \\ \cline{1-1} X^3 - 3X & & \\ -X^3 - X & & \\ \cline{1-1} -4X + 1 & & \end{array}$$

Donc $A = B(X^5 - X^3 + X) + (-4X + 1)$.

3. Effectuons la division euclidienne de $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$ par $B = X^3 + X^2 + 2$.

$$\begin{array}{rl|l} X^5 + X^4 - X^3 & +X - 1 & X^3 + X^2 + 2 \\ \cline{3-3} -X^5 - X^4 - 2X^2 & & X^2 - 1 \\ \cline{1-1} -X^3 - 2X^2 + X - 1 & & \\ X^3 + X^2 + 2 & & \\ \cline{1-1} -X^2 + X + 1 & & \end{array}$$

4. Effectuons la division euclidienne de $A = 2X^4 - 3X^2 + 5$ par $B = X^2 - 2X + 3$.

$$\begin{array}{rl|l} 2X^4 - 3X^2 & +5 & X^2 - 2X + 3 \\ \cline{3-3} -2X^4 + 4X^3 - 6X^2 & & 2X^2 + 4X - 1 \\ \cline{1-1} 4X^3 - 9X^2 & & \\ -4X^3 + 8X^2 - 12X & & \\ \cline{1-1} -X^2 - 12X + 5 & & \\ X^2 - 2X + 3 & & \\ \cline{1-1} -14X + 8 & & \end{array}$$

5. Effectuons la division euclidienne de $A = 2X^5 + 5X^3 + 6X + 2$ et $B = X^2 + X + 2$.

$$\begin{array}{rl|l} 2X^5 + 5X^3 & +6X + 2 & X^2 + X + 2 \\ \cline{3-3} -2X^5 - 2X^4 - 4X^3 & & 2X^3 - 2X^2 + 3X + 1 \\ \cline{1-1} -2X^4 + X^3 & & \\ 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 & & \\ \cline{1-1} 3X^3 + 4X^2 + 6X & & \\ -3X^3 - 3X^2 - 6X & & \\ \cline{1-1} X^2 + 2 & & \\ -X^2 - X - 2 & & \\ \cline{1-1} -X & & \end{array}$$

Exercice d'application 15.55. Soit $n \in \mathbf{N}$, $\theta \in \mathbf{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

$\hookrightarrow$ Par le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q, R) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)Q(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < 2$. Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $R = \lambda X + \mu$. En évaluant X^n en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda e^{i\theta} + \mu &= e^{in\theta} \\ \lambda e^{-i\theta} + \mu &= e^{-in\theta} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= \frac{e^{-in\theta}}{e^{2i\theta}-1}(e^{2in\theta+i\theta} - e^{i\theta}) \\ \mu &= -\frac{e^{-in\theta}}{e^{2i\theta}-1}(e^{2in\theta} - e^{2i\theta}) \end{cases}$$

Finalement, $R = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} X - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Remarque 15.56. Soit $A, B \in \mathbf{R}[X]$. S'il existe $Q, R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$, alors $Q, R \in \mathbf{R}[X]$. En particulier, si $A \mid B$ dans $\mathbf{C}[X]$ et $A, B \in \mathbf{R}[X]$, alors $A \mid B$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Proposition 15.57.

Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Notons R le reste de la division euclidienne de A par B.

$$B \mid A \iff R = 0.$$

15.3. Racines d'un polynôme

15.3.1. Définitions

Proposition 15.58.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est $\widetilde{P}(\alpha)$.

Démonstration.
Soit Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$.
On a $P = (X - \alpha)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X - \alpha)$. Or $\deg(X - \alpha) = 1$, donc $\deg(R) < 1$
Donc R est un polynôme constant, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $R(X) = \lambda$.
On obtient $\widetilde{P}(\alpha) = (\alpha - \alpha)\widetilde{Q}(\alpha) + \widetilde{R}(\alpha)$ donc $\widetilde{P}(\alpha) = \lambda$ donc $R = \widetilde{P}(\alpha)$. □

Définition 15.59.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
On dit que α est une **racine** de P si et seulement si $(X - \alpha) \mid P$ (si et seulement si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ d'après la proposition précédente).

Définition 15.60.

Soit $P \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. On dit que α est une racine de **multiplicité** n de P si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $(X - \alpha)^n \mid P$;
(b) $(X - \alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

Définition 15.61.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$. On dit que α est une racine

- **simple** si et seulement si α est une racine de multiplicité 1 de P.
- **multiple** si et seulement si α est une racine de multiplicité $\geqslant 2$ de P. Plus particulièrement, si une racine de multiplicité 2 (resp. 3) est dite **racine double** (resp. **triple**).

Exemple 15.62. 1. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{K}^\star \times \mathbf{K}^2$. P a une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$.

2. Soit $P = 2X^4 - 7X^3 + 6X^2 + X - 2$. On a $\widetilde{P}(1) = 0$, donc 1 est racine de P et, après division euclidienne, $P = (X-1)(2X^3 - 5X^2 + X + 2)$. Or 1 est racine de $2X^3 - 5X^2 + X + 2$, donc on obtient via une division euclidienne $P = (X-1)^2(2X^2 - 3X - 2)$. Enfin, 1 n'est pas racine de $2X^2 - 3X - 2$. En résumé, $(X-1)^2 \mid P$ et $(X-1)^3$ ne divise pas P, donc 1 est racine double de P.

Proposition 15.63.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. α est une racine de multiplicité n de P si et seulement si

$$\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{P}'(\alpha) = ... = \widetilde{P}^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{P}^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. • Sens direct. On suppose que α est une racine de multiplicité n de P, *i.e.* $(X-\alpha)^n \mid P$ et $(X-\alpha)^{n+1}$ de divise pas P.
Il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^n Q$ et $(X-\alpha)$ de divise pas Q. Ainsi, α n'est pas une racine de Q et donc $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$.
Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$.

$$P^{(\ell)} = [(X-\alpha)^n Q]^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} [(X-\alpha)^n]^{(k)} \, Q^{(\ell-k)} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X-\alpha)^{n-k} \, Q^{(\ell-k)}$$

car $k \leqslant \ell \leqslant n$. Ensuite,

$$\widetilde{P}^{(\ell)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (\alpha-\alpha)^{n-k} \, \widetilde{Q}^{(\ell-k)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} 0^{n-k} \, \widetilde{Q}^{(\ell-k)}(\alpha).$$

◦ Si $\ell < n$, alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $0^{n-k} = 0$ car $n - k \neq 0$ et donc $\widetilde{P}^{(\ell)} = 0$.

◦ Si $\ell = n$, alors

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![0, \ell-1]\!], \quad 0^{n-k} = 0 \\ 0^{n-\ell} = 0^0 = 1 \end{cases}$$

et donc $\widetilde{P}^{(\ell)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 + \binom{n}{n} \frac{n!}{(n-n)!} \widetilde{Q}^{(0)}(\alpha) = n! \, \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$

• Sens réciproque. On suppose que $\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{P}'(\alpha) = ... = \widetilde{P}^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $\widetilde{P}^{(n)} \neq 0$. On note d le degré de P.
On utilise la formule de Taylor :

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k + \sum_{k=n}^{d} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k.$$

On peut faire ce découpage car $n \leqslant d$ (puisque $P^{(n)} \neq 0$). Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k = 0$$

donc

$$P = \sum_{k=n}^{d} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

puis

$$P = (X-\alpha)^n \sum_{k=n}^{d} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^{k-n}$$

et on note $P = (X-\alpha)^n Q$. On vient de montrer que $(X-\alpha)^n \mid P$.
De plus,

$$\widetilde{Q}(\alpha) = \sum_{k=n}^{d} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (\alpha-\alpha)^{k-n}$$

avec $k-n=0$ si $k=n$ et $k-n \neq 0$ si $k>n$, d'où

$$\widetilde{Q}(\alpha) = \frac{\widetilde{P}^{(n)}(\alpha)}{n!} \times 1 + \sum_{k=n+1}^{d} 0 = \frac{\widetilde{P}^{(n)}(\alpha)}{n!} \neq 0.$$

Ainsi $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P. □

Proposition 15.64.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}^\star$. α est une racine de multiplicité au moins n si et seulement si

$$(X-\alpha)^n \mid P \quad \text{ou} \quad \widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{P}'(\alpha) = ... = \widetilde{P}^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Exemple 15.65. Considérons $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$. On a $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P'}(1) = \widetilde{P''}(1) = 0$. Donc 1 est racine de P de multiplicité au moins 3. Notons que puisque $\widetilde{P^{(3)}}(1) = 6$, 1 est racine de multiplicité 3.

15.3.2. Factorisation d'un polynôme

Proposition 15.66.

Soit $r \in \mathbf{N}^\star$, $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbf{K}$ des scalaires deux à deux distincts et $m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est racine de P de multiplicité au moins m_i ;

(ii) $\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} \mid P$.

Démonstration. • (i)⟹(ii). Pour tout $r \in \mathbf{N}^\star$, on pose H_r : « pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{K}$, si $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont des racines distinctes de multiplicités respectives au moins égales à $m_1, \ldots, m_r$, alors $\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} \mid P$ ».
Soit α_1 une racine de multiplicité au moins m_1 de P. Alors $(X-\alpha_1)^{m_1}$ divise P par définition de la multiplicité, donc H_1 est vraie.
Soit $r \in \mathbf{N}^\star$ tel que H_r soit vraie. Soit $\alpha_1, ..., \alpha_{r+1}$ des racines distinctes de P de multiplicités respectives au moins égales à $m_1, ..., m_{r+1}$. Via H_r, il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} Q$.
Alors

$$\widetilde{P}(\alpha_{r+1}) = \underbrace{\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}}_{\neq 0} \widetilde{Q}(\alpha_{r+1}).$$

Or $\widetilde{P}(\alpha_{r+1}) = 0$ car α_{r+1} est racine de P, donc $\widetilde{Q}(\alpha_{r+1}) = 0$, *i.e.* α_{r+1} est une racine de Q. Notons m l'ordre de multiplicité de α_{r+1} en tant que racine de Q. On sait alors qu'il existe $Q_1 \in \mathbf{K}[X]$ tel que

$$Q = (X - \alpha_{r+1})^m Q_1 \quad \text{et} \quad Q_1(\alpha_{r+1}) \neq 0.$$

Ensuite,

$$P = (X - a_{r+1})^m \underbrace{Q_1 \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}}_{=Q_2}.$$

On a alors $Q_2(\alpha_{r+1}) = Q_1(\alpha_{r+1}) \times \prod_{k=1}^{r} (\alpha_{r+1} - \alpha_k)^{m_k} \neq 0$. Ainsi α_{r+1} est racine de P d'ordre de multiplicité exactement m. Par suite, $m_{r+1} \leqslant m$ et $\prod_{k=1}^{r+1} (X - \alpha_k)^{m_k}$ divise $(X - \alpha_{r+1})^m \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$ et donc aussi P. D'où H_{r+1}.
Le principe de récurrence permet de conclure.

- (ii)$\Longrightarrow$(i). Puisque $(X-\alpha_1)^{m_1} \dots (X-\alpha_r)^{m_r}$ divise P, on a en particulier que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $(X - \alpha_i)^{m_i}$ divise P. On conclut avec la Proposition 15.64. □

Exemple 15.67. $P^n - 1$ possède n racines simples, à savoir $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi,

$$\underbrace{\prod_{k=1}^{n} (X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}})}_{\text{degré } n} \mid \underbrace{X^n - 1}_{\text{degré } n}.$$

Donc le quotient de ces deux polynômes est de degré 0, ce qui entraîne l'existence de $\lambda \in \mathbf{C}^\star$ tel que

$$\underbrace{X^n - 1}_{\text{coeff. dominant : 1}} = \lambda \times \underbrace{\prod_{k=1}^{n} (X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}})}_{\text{coeff. dominant : 1}}.$$

Donc $\lambda = 1$.

On peut généraliser la méthode développée dans l'exemple précédent. On obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 15.68.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha_1, ..., \alpha_r$ des racines de P de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star$ où $r \in \mathbf{N}^\star$.

1. $m_1 + ... + m_r \leqslant \deg(P)$
2. Si $m_1 + ... + m_r = \deg(P)$, alors
   - $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines de P.
   - $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$ où λ est le coefficient dominant de P.

Exemple 15.69. $P = 2X^4 - 7X^3 + 6X^2 + X - 2$ possède une racine double (1) et deux racines simples (2 et $\frac{1}{2}$). Ainsi le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est 4. De plus, puisque le coefficient de P est 2, on obtient

$$P = 2(X-1)^2(X-2)\left(X - \frac{1}{2}\right).$$

Le corollaire assure en particulier qu'un polynôme de degré $n \geqslant 0$ a au plus n racines distinctes. On en déduit le corollaire suivant, très important en pratique car il permet d'identifier deux fonctions polynomiales égales sur une partie infinie.

Corollaire 15.70.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Si P est de degré au plus n et possède $n+1$ racines, alors $P = 0$. En particulier, si $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ coïncident sur une partie infinie de $\mathbf{K}$, alors $P = Q$.

Démonstration.
La première partie du corollaire est une conséquence directe du corollaire précédente. Soit $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, soit $E \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ infinie telle que pour tout $x \in E$, $\widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(x)$. Alors $P - Q$ possède une infinité de racines, donc $P - Q = 0$. □

Corollaire 15.71.

L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$ est bijective, où

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \;\middle|\; \exists n \in \mathbf{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n,\ \forall x \in \mathbf{K},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}.$$

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{E}$. Il existe $n \in \mathbf{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. En posant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $\Phi(P) = f$. Ainsi Φ est surjective.
Soit $P_1, P_2 \in \mathbf{K}[X]$ tels que $\Phi(P_1) = \Phi(P_2)$. Alors $\Phi(P_1 - P_2) = 0$, donc $x \longmapsto \widetilde{P_1}(x) - \widetilde{P_2}(x)$ est nulle, ce qui entraîne que $P_1 - P_2$ admet une infinité de racines puis $P_1 = P_2$. Ainsi Φ est injective. □

Le corollaire précédent justifie l'identification faite entre les polynômes et les fonctions polynomiales.

Définition 15.72.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non nul. On dit que P est **scindé** sur $\mathbf{K}$ si et seulement si

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbf{K},\ \exists m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star,\ \exists \lambda \in \mathbf{K}, \quad P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha)^{m_k}.$$

Autrement dit, P est scindé sur $\mathbf{K}$ si et seulement P est produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Proposition 15.73.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non constant. P est scindé si et seulement si il possède $\deg(P)$ racines comptées avec leur multiplicité.

Exemple 15.74.

1. $2X^4 - 7X^3 + 6X^2 + X - 2 = 2(X-1)^2(X-2)(X-\frac{1}{2})$ est scindé sur $\mathbf{R}$.
2. $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé sur $\mathbf{C}$, mais par sur $\mathbf{R}$ car ce polynôme n'a pas de racines réelles.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. $X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}})$ est scindé sur $\mathbf{C}$.

Proposition 15.75.

Soit A et B deux polynômes. Si A est scindé, alors toutes les racines de A sont des racines de B avec une multiplicité au moins égale si et seulement si $A \mid B$.

Exemple 15.76. Les racines de $X^4 - 1$ sont les racines 4-ièmes de l'unité. Elles sont aussi racines 12-ièmes donc $X^4 - 1$ divise $X^{12} - 1$.

Proposition 15.77.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha_1, ..., \alpha_r$ des racines de P de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star$ où $r \in \mathbf{N}^\star$.
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, si $m_k \geqslant 2$, alors α_k est une racine de P' de multiplicité $m_k - 1$.

Démonstration.
Immédiat grâce à la Proposition 15.64. □

15.4. Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$

15.4.1. Polynômes irréductibles

Tout le cours d'arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$ évolue en parallèle avec le cours d'arithmétique dans $\mathbf{Z}$. Ceci tient entre autres dans le fait qu'il existe dans $\mathbf{Z}$ (muni des opérations $+$ et $\times$) et dans $\mathbf{K}[X]$ (muni des opérations $+$ et $\times$) une division euclidienne. Le théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbf{Z}$ dit que tout entier n supérieur ou égal à 2 se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de nombres premiers. La notion de nombre premier dans $N^\star$ a son analogue dans $\mathbf{K}[X]$: la notion de polynôme irréductible sur $\mathbf{K}$. De même que, dans $\mathbf{N}^\star$, le nombre 1 ne fait pas partie de la liste des nombres premiers pour assurer l'unicité de la décomposition, un polynôme de degré 0 ne fera pas partie de la liste des polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$ pour assurer l'unicité de la décomposition dans $\mathbf{K}[X]$.

Définition 15.78.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On dit que P est **irréductible** si et seulement si $\deg(P) \geqslant 1$ et

$$\forall (A, B) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad P = AB \Longrightarrow \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0.$$

Remarque 15.79. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1.
P est irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les produits de P par une constante non nulle. Sous cette forme, on comprend plus facilement l'analogie avec la notion de nombre premier sur $\mathbf{Z}$.

Exemple 15.80. On a $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ dans $\mathbf{C}[X]$, donc $X - i \mid X^2 + 1$. Par ailleurs, $\deg(X - i) \neq 0$ et $\deg(X - i) \neq \deg(X^2 + 1)$, donc $X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbf{C}[X]$.

Montrons que $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$. Soit $P \in \mathbf{R}[X] \backslash \{0\}$ tel que $P \mid X^2 + 1$. Alors $\deg(P) \leqslant \deg(X^2 + 1)$, puis $\deg(P) \in \{0, 1, 2\}$.
Supposons $\deg(P) = 1$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}$ tel que $P = aX + b$. Puisque $aX + b \mid X^2 + 1$, on obtient que $-\frac{b}{a}$ est une racine de $X^2 + 1$, ce qui est absurde.
Supposons $\deg(P) = 2$: il existe $\lambda \in \mathbf{K}^\star$ tel que $X^2 + 1 = \lambda P$, donc $P = \frac{1}{\lambda}(X^2 + 1)$.

Exercice d'application 15.81. Montrer qu'un polynôme réel de degré $n \geqslant 3$ impair n'est jamais irréductible.

$\hookrightarrow$ Notons $n = \deg(P)$ et a_n le coefficient dominant de P. On a $\widetilde{P}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$ et $\widetilde{P}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n$, et en particulier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $\widetilde{P}$ sont infinies de signe contraire. A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on peut en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\widetilde{P}(\alpha) = 0$. Donc $(X - \alpha) \mid P$, et donc P n'est pas irréductible.

⚠ **Attention ⚠.** Un polynôme qui n'a pas de racine dans $\mathbf{K}$ n'est pas nécessairement irréductible sur $\mathbf{K}$. Considérons par exemple le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{R}[X]$. P n'a pas de racine sur $\mathbf{R}$ puisque pour tout x réel, $\tilde{P}(x) = x^4 + x^2 + 1 > 0$. Pourtant,

$$P = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1),$$

et le polynôme n'est pas irréductible sur $\mathbf{R}$.

Proposition 15.82.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Si $\deg(P) \geqslant 2$ et si P possède une racine $\alpha \in \mathbf{K}$, alors P n'est pas irréductible sur $\mathbf{K}$.

Démonstration.
Soit $\alpha \in \mathbf{K}$ une racine de P. Il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$. On obtient $\deg(Q) = \deg(P) - 1 \geqslant 1$. □

⚠ **Attention ⚠.** La réciproque est fausse. $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbf{R}$ et n'a pas de racines réelles.

Théorème 15.83.

Les polynômes de degré 1 sont irréductibles sur $\mathbf{K}$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ avec $\deg(P) = 1$. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $P = AB$. On a $1 = \deg(P) = \deg(A) + \deg(B)$, d'où $(\deg(A), \deg(B)) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$. Ainsi P est irréductible. □

15.4.2. Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$

Commençons par présenter le « théorème fondamental de l'algèbre ».

Théorème 15.84 - Théorème de D'Alembert-Gauss.

Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ possède au moins une racine.

Démonstration.
Admis (difficile). □

La propriété énoncée dans le théorème de D'Alembert-Gauss signifie que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

Par exemple, l'équation $z^6 + z^4 + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbf{C}$. On note que le théorème ne fournit aucun procédé pour l'obtenir et de fait, personne au monde ne sait donner la valeur exacte d'une solution. Au degré 2, on dispose de formule fournissant les solutions en fonction des coefficients de l'équation (avec le discriminant). Une telle formule existence encore au degré 3 (formules de Cardan,

qui contient entre autres des racines carrées et des racines cubiques) et au degré 4 (formules de Ferrari). Mais il a été démontré qu'il n'est plus possible d'obtenir de telles formules pour les équations de degré supérieur ou égal à 5 : « l'équation polynomiale générale de degré supérieur ou égal à 5 n'est pas résolution par radicaux ». Ceci n'empêche pas de savoir résoudre, ponctuellement, certaines équations de degré 5 (comme $z^5 - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ par exemple).

Corollaire 15.85.

Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 de $\mathbf{C}[X]$ est scindé sur $\mathbf{C}$.
Plus précisément, pour tout élément P de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, il existe $\lambda \in \mathbf{C}^\star$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ tel que

$$P = \lambda(X - a_1)\ldots(X - a_n).$$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose H_n : « tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré n est scindé sur $\mathbf{C}$ ».

Tout élément de $\mathbf{C}[X]$ de degré 1 est produit d'un polynôme de degré, donc H_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n+1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, comme $n + 1 \geqslant 1$, P admet au moins une racine $a \in \mathbf{C}$. Alors $(X - a)$ divise P et il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$. Or $\deg(Q) = n$ donc H_n fournit que Q est scindé. Il s'ensuit qu'il existe $(\lambda, a_1, ..., a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que

$$Q = \lambda(X - a_1)\cdots(X - a_n).$$

Ainsi $P = \lambda(X - a)(X - a_1)\cdots(X - a_n)$ est scindé donc H_{n+1} est vraie.

Finalement le principe de récurrence permet de conclure. □

Théorème 15.86.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration.

- Le Théorème 15.83 assure que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Le théorème de D'Alembert-Gauss assure que P possède une racine et la Proposition 15.82 permet de conclure. □

Théorème 15.87 - Décomposition des polynômes à coefficients dans C.

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. P se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k},$$

avec

- λ le coefficient dominant de P ;
- $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbf{C}$ les racines complexes distinctes de P ;
- $m_1, ..., m_r \in \mathbf{N}^\star$ les ordres de multiplicité respectifs de $\alpha_1, ..., \alpha_r$.

Ainsi tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ se décompose de manière unique, à l'ordre des facteurs près, en produit de polynôme irréductibles de $\mathbf{C}[X]$.

Démonstration.
L'unicité de la décomposition vient du fait que nécessairement λ est le coefficient dominant de P,

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont nécessairement les racines deux à deux distinctes de P et $m_1, \ldots, m_k$ leurs ordres de multiplicités respectifs.

D'après le Corollaire 15.85, P est scindé sur $\mathbf{C}[X]$, d'où l'existence d'une telle factorisation. □

Exemple 15.88.

1. $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. $X^4 - 1 = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i)$.

◇◇

Remarque technique 15.89. Pour factoriser un polynôme dans $\mathbf{C}[X]$, on cherche toutes ses racines.

Exercice d'application 15.90. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $X^4 + 1$.

↪ Pour $z \in \mathbf{C}$, $z^4 = -1 \iff z^4 = e^{i\pi} \iff \exists k \in [\![0,3]\!],\ z = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$. Ainsi

$$X^4 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{i\frac{5\pi}{4}})(X - e^{i\frac{7\pi}{4}}).$$

Exercice d'application 15.91. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $X^6 + X^3 + 1$.

↪ Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} z^6 + z^3 + 1 = 0 &\iff (z^3)^2 + (z^3) + 1 = 0 \\ &\iff z^3 = j \text{ ou } z^3 = j^2 \\ &\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ z = e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})} \text{ ou } z = e^{i(\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})} \end{aligned}$$

Finalement,

$$P = (X - e^{i\frac{2\pi}{9}})(X - e^{i\frac{8\pi}{9}})(X - e^{i\frac{14\pi}{9}})(X - e^{i\frac{10\pi}{9}})(X - e^{i\frac{16\pi}{9}})(X - e^{i\frac{4\pi}{9}}).$$

◇◇

15.4.3. Polynôme conjugué

Définition 15.92.

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ dont on note n le degré. Il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On appelle **polynôme conjugué** de P et on note $\overline{P}$ le polynôme $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$.

Il s'agit d'une « conjugaison formelle » (on a conjugué les coefficients). Les propriétés usuelles de cette conjugaison formelle sont donnée ci-après.

Proposition 15.93.

Soit $A, B \in \mathbf{C}[X]$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}$.

1. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.
2. $\overline{\lambda \cdot A} = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}$.
3. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
4. $\overline{\overline{A}} = A$.
5. $A \in \mathbf{R}[X] \iff \overline{A} = A$.
6. $\overline{A(z)} = \overline{A}(\overline{z})$.

Démonstration.
Notons $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, où a_k, b_k sont des complexes éventuellement nuls.

1. $\overline{A+B} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k + b_k} X^k = \sum_{k=0}^{n} (\overline{a_k} + \overline{b_k}) X^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k + \overline{b_k} X^k = \overline{A} + \overline{B}$.
2. $\overline{\lambda \cdot P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda a_k} X^k = \sum_{k=0}^{n} (\overline{\lambda} \cdot \overline{a_k}) X^k = \overline{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}$.
3. $\overline{A \times B} = \sum_{k=0}^{2n} \overline{\left(\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p} \right)} X^k = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{p=0}^{k} \overline{a_p} \cdot \overline{b_{n-p}} \right) X^k = \overline{A} \times \overline{B}$.
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k \right)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\overline{a_k}} X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = A$.
5. $A \in \mathbf{R}[X] \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k \in \mathbf{R} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ \overline{a_k} = a_k \iff \overline{A} = A$.
6. $\overline{A(z)} = \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \overline{z}^k = \overline{A}(\overline{z})$. □

Proposition 15.94.

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Soit $z \in \mathbf{C}$.
z est une racine de P si et seulement si $\overline{z}$ est racine de P. Le cas échéant, z et $\overline{z}$ ont même ordre de multiplicité.

Démonstration.
On suppose que z est racine de P. Notons $k \in \mathbf{N}^\star$ l'ordre de multiplicité de z. Alors il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X - z)^k Q$ et $Q(z) \neq 0$. En conjuguant cette égalité, on obtient que $\overline{P} = (X - \overline{z})^k \overline{Q}$ (puisque $\overline{P} = P$). Donc $\overline{z}$ est racine de multiplicité au moins k. Par ailleurs, $\overline{Q}(\overline{z}) = \overline{Q(z)} \neq 0$, donc $\overline{z}$ est racine de P de multiplicité exactement k. □

15.4.4. Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$

Théorème 15.95.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Démonstration.
- Le Théorème 15.83 assure que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 2 sans racines réelles. Soit $A, B \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P = AB$. Alors $2 = \deg(A) + \deg(B)$, donc $(\deg(A), \deg(B)) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$. Supposons que $\deg(A) = 1$ et $\deg(B) = 1$. Il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}$ tel que $A = aX + b$. Ainsi $aX + b \mid P$ et $-\frac{b}{a}$ est racine de P, ce qui est contradictoire.
- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3. Le théorème de d'Alembert-Gauss que P admet une racine $\alpha \in \mathbf{C}$.
  Si $\alpha \in \mathbf{R}$, la Proposition 15.82 permet de conclure.
  Si $\alpha \notin \mathbf{R}$, $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P (avec $\alpha \neq \overline{\alpha}$). Ainsi P est divisible par $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = (X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\alpha) X + |\alpha|^2) \in \mathbf{R}[X]$. Ainsi il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = Q(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$. En considérant les degrés, on obtient que $\deg(Q) = \deg(P) - 2 \geqslant 1$, ce qui montre que P n'est pas irréductible. □

Remarque 15.96. Si P est de degré 2 à coefficients réels, les assertions « P est irréductible sur $\mathbf{R}$ » et « P n'a pas de racine réelle » sont équivalentes. Ce résultat est faux dans le cas général. On a par exemple constaté ci-avant que le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle et pourtant n'est pas irréductible sur $\mathbf{R}$.

Exercice d'application 15.97. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Soit $A = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. A quelle condition nécessaire et suffisante A est-il irréductible sur $\mathbf{R}$?

$\hookrightarrow$ A est irréductible sur $\mathbf{R}$ si et seulement si son discriminant est strictement négatif. Or

$$\cos^2(\theta) - 1 < 0 \iff -\sin^2(\theta) < 0.$$

Finalement, P est irréductible si et seulement si θ n'est pas multiple de π.
Notons qu'on peut déterminer la décomposition de P sur $\mathbf{C}[X]$.

$$X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (X - \cos\theta - i\sin\theta)(X - \cos\theta + i\sin\theta) = (X - \mathrm{e}^{i\theta})(X - \mathrm{e}^{-i\theta}).$$

De plus, $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{-i\theta} \iff \mathrm{e}^{2i\theta} = 1 \iff 2\theta \in 2\pi\mathbf{Z} \iff \theta \in \pi\mathbf{Z}$: on retrouve la condition nécessaire et suffisante obtenue avant (les racines sont ici conjuguées ; elles sont donc complexes si et seulement si elles sont distinctes). On peut ainsi obtenir la décomposition de P sur $\mathbf{R}[X]$.

- Si $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$, $A = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.
- Si $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$, $A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
- Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbf{Z}$, $A = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$.

On peut maintenant se diriger vers la factorisation sur $\mathbf{R}[X]$ à partir du théorème de décomposition sur $\mathbf{C}[X]$ (on considère $\mathbf{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ et l'« inclusion » $\mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X]$).

Soit P un élément de $\mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Notons λ le coefficient dominant de P, $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les r racines réelles de P (avec $r \in \mathbf{N}$) de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r$, $\omega_1, ..., \omega_s$ les s racines complexes de partie imaginaire strictement positives (avec $s \in \mathbf{N}$) de multiplicités respectives $n_1, ..., n_s$. On obtient, avec la Proposition 15.94, que $\overline{\omega_1}, ..., \overline{\omega_s}$ sont exactement les racines complexes de partie imaginaire strictement négative, de multiplicités respectives $n_1, ..., n_s$. Ainsi, le théorème de décomposition sur $\mathbf{C}[X]$ donne

$$P = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{s} (X - \omega_k)^{n_k} (X - \overline{\omega_k})^{n_k} \right).$$

En regroupant les facteurs conjugués et en utilisant que pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) = X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\omega_k)X + |\omega_k|^2$, on obtient

$$P = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{s} (X^2 + b_k X + c_k)^{n_k} \right).$$

où $b_k = -2\,\mathfrak{Re}(\omega_k)$ et $c_k = |\omega_k|^2$ sont deux réels. On a par ailleurs, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $b_k^2 - 4c_k < 0$, puisque, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, les racines de $X^2 + b_k X + c_k$ sont les complexes non réels ω_k et $\overline{\omega_k}$.

Théorème 15.98 - Décomposition des polynômes à coefficients dans R.

Tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{s} (X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\omega_k)X + |\,\omega_k\,|^2)^{n_k},$$

où

- λ le coefficient dominant de P ;
- pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, α_k est une racine réelle de P de multiplicité m_k (il y a exactement r racines réelles) ;
- pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, ω_k, $\overline{\omega_k}$ sont des racines complexes non réelles de P, de multiplicité n_k (il y a exactement $2s$ racines complexes).

Ainsi tout polynôme de $\mathbf{R}[X]$ se décompose de manière unique, à l'ordre des facteurs près, en produit de polynôme irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

◇◇

Remarque technique 15.99. Pour décomposer dans $\mathbf{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$, on peut chercher des racines évidentes α, déterminer leur multiplicité m à l'aide de polynômes dérivés puis factoriser par $(X-\alpha)^m$. S'il reste des polynômes de degré 2 dans la factorisation obtenue, il faudra bien vérifier que le discriminant de ces trinômes est négatif avant de conclure.

Exercice d'application 15.100. Décomposer $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$.

↪ On remarque que $\widetilde{P}(1) = 0$ donc 1 est une racine de P. De plus, $P' = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 2$, puis $\widetilde{P'}(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0$ donc 1 est une racine au moins double de P. Ainsi, il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X-1)^2\, Q$. Une division euclidienne permet de déterminer Q :

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2} -X^4 + 2X^3 - X^2 \qquad\qquad & X^2 + 1 \\ \cline{1-1} X^2 - 2X + 1 & \\ -X^2 + 2X - 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi, $P = (X-1)^2(X^2+1)$.
$X^2 + 1$ est un polynôme de second degré et ne possède pas de racines réelles donc il s'agit de la décomposition de P dans $\mathbf{R}[X]$.
La décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ est $P = (X-1)^2(X-i)(X+i)$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 15.101. Si on connaît la décomposition d'un polynôme dans $\mathbf{C}[X]$, on peut facilement le factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ en regroupant les expressions conjuguées.

Exercice d'application 15.102. Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^3 - 1$.

↪ On a obtenu dans $\mathbf{C}[X]$, $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$, d'où dans $\mathbf{R}[X]$, $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$.

Notons qu'on aurait aussi pu remarquer que 1 était racine simple évidente, puis conclure avec une division euclidienne. On sait également factoriser toute expression du type $a^n - b^n$, où $(a, b, n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$, ce qui nous aurait permis de conclure en une ligne.

Exercice d'application 15.103. Factoriser $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

↪ A partir de la décomposition dans $\mathbf{C}[X]$:

$$\begin{aligned} X^6 + X^3 + 1 &= (X - e^{i\frac{2\pi}{9}})(X - e^{-i\frac{2\pi}{9}})(X - e^{i\frac{2\pi}{8}})(X - e^{-i\frac{8\pi}{9}})(X - e^{i\frac{14\pi}{9}})(X - e^{-i\frac{14\pi}{9}}) \\ &= (X^2 - 2\cos(\tfrac{2\pi}{9})X + 1)(X^2 - 2\cos(\tfrac{8\pi}{9})X + 1)(X^2 - 2\cos(\tfrac{14\pi}{9})X + 1). \end{aligned}$$

◇◇

Exercice d'application 15.104. Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$, $X^4 + 1$.

↪ *Méthode 1.* On utilise la décomposition obtenue dans $\mathbf{C}[X]$,

$$X^4 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{5\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{5\pi}{4}}) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Méthode 2. Moins calculatoire, mais plus astucieuse.

$$X^4 + 1 = (X^2)^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Exercice d'application 15.105. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer la factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ de $X^n - 1$.

↪ On a obtenu la décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ suivante :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right).$$

- Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k$ et, en regroupant les termes complexes conjugués,

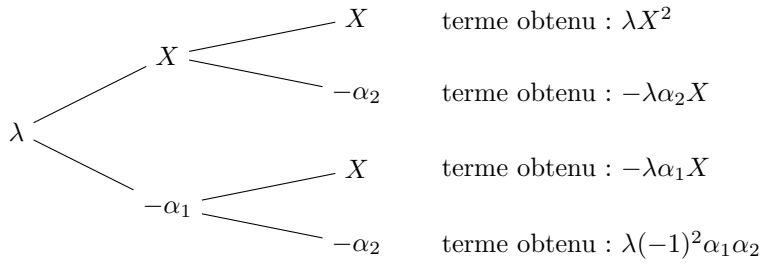
$$\begin{aligned} X^{2k}-1 &= (X-1)(X+1)\prod_{p=1}^{k-1}\left(X-\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-i\frac{2p\pi}{n}}\right) \\ &= (X-1)(X+1)\prod_{p=1}^{k-1}\left(X-2\cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)+1\right). \end{aligned}$$

- Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k+1$ et de même qu'avant,

$$\begin{aligned} X^{2k+1}-1 &= (X-1)\prod_{p=1}^{k}\left(X-\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-i\frac{2p\pi}{n}}\right) \\ &= (X-1)\prod_{p=1}^{k}\left(X-2\cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)+1\right). \end{aligned}$$

15.5. Relations coefficients-racines

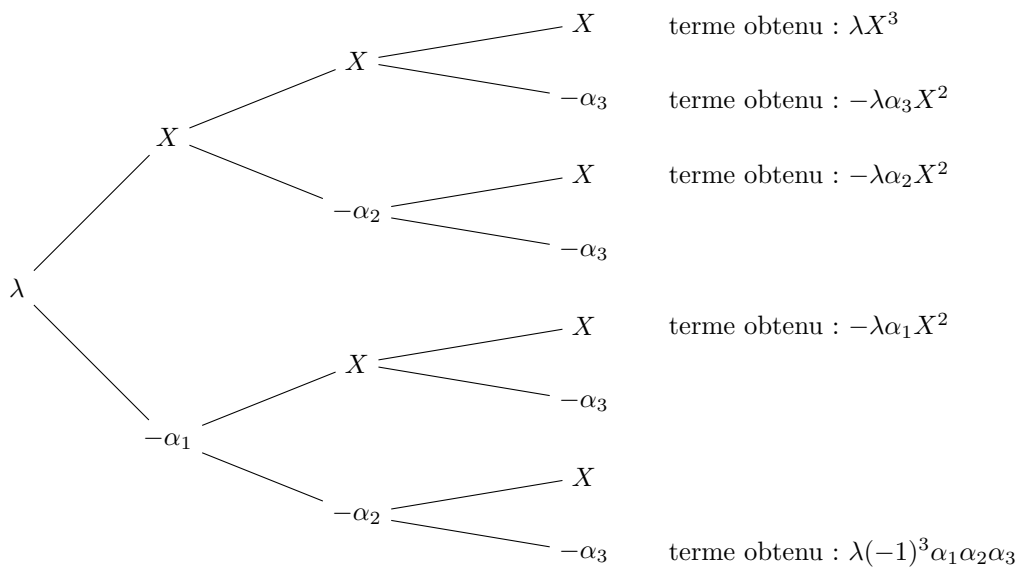
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme scindé de degré 2 qu'on note $P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k$. Notons de plus α_1, α_2 ses racines. Développons $\lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$:



En identifiant, on obtient que $a_2 = \lambda$, $a_1 = \lambda(-\alpha_1 - \alpha_2)$ et $a_0 = \lambda(-1)^2\alpha_1\alpha_2$ et on retrouve les relations coefficients-racines déjà mentionnées :

$$\sum_{k=1}^{2}\alpha_k = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{2}\alpha_k = (-1)^2\frac{a_0}{a_2}.$$

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme scindé de degré 3 qu'on note $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$. Notons de plus $\alpha_1\alpha_2$, α_3 ses racines. Développons $\lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$:



En identifiant, on obtient que $a_3 = \lambda$, $a_2 = \lambda(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ et $a_0 = \lambda(-1)^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et ainsi :

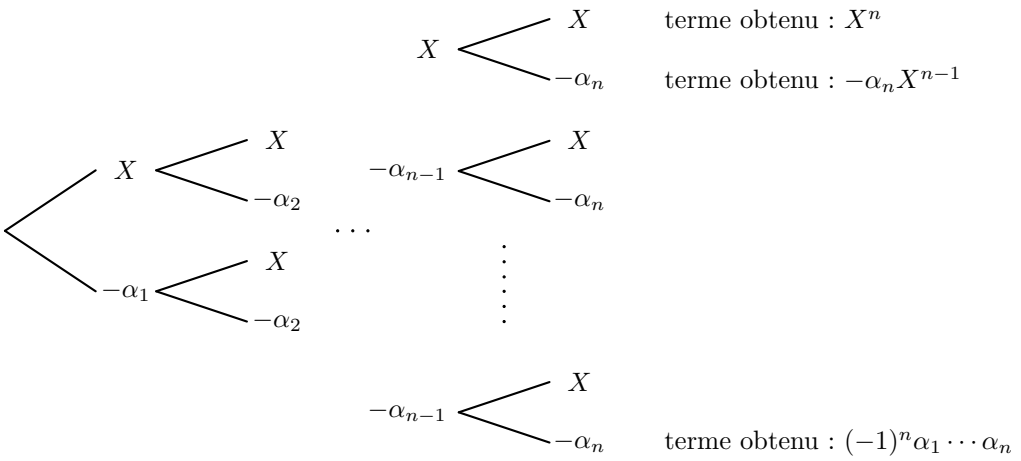
$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k = -\frac{a_1}{a_3} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{3} \alpha_k = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3}.$$

Proposition 15.106 - Relations de Viète.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme scindé. Notons $n = \deg(P)$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les racines de P. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Démonstration.
En développant $\lambda(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n)$ (où $\lambda \in \mathbf{C}$ est le coefficient dominant de P), on obtient que



$$P = \lambda(X^n + (-\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n)X^{n-1} + \cdots + (-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_n)$$

En identifiant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

□

Exemple 15.107. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}})$. Les relations coefficients-racines s'écrivent

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = -\frac{0}{1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n+1}.$$

Chapitre 16

Variables aléatoires finies

Dans tout ce cours, $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé **fini**.

16.1. Variables aléatoires

16.1.1. Définition

Définition 16.1.

On appelle **variable aléatoire** définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E toute application définie sur Ω et à valeur dans E. Lorsque $E = \mathbf{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

Exemple 16.2. 1. On considère l'expérience qui consiste à lancer 6 fois une pièce de monnaie équilibrée et à noter la succession des pile/face. Dans ce cas, $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^6$, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} X : & \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \omega & \longmapsto & \text{nombre de « pile » dans } \omega \end{array}$$

X est une variable aléatoire réelle qui donne donc le nombre de « pile » obtenus lors de l'expérience. Par exemple, $X((\text{pile}, \text{pile}, \text{face}, \text{pile}, \text{face}, \text{face})) = 3$.

On considère maintenant l'application

$$Y : \Omega \longrightarrow \{\text{entrée}, \text{fromage}, \text{dessert}\}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} \text{entrée} & \text{si les « pile » sont majoritaires dans } \omega \\ \text{fromage} & \text{s'il y a le même nombre de « pile » que de « face » dans } \omega \\ \text{dessert} & \text{si les « face » sont majoritaires dans } \omega \end{cases}$$

Y est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{\text{entrée}, \text{fromage}, \text{dessert}\}$.

Par exemple $Y((\text{pile}, \text{pile}, \text{face}, \text{pile}, \text{face}, \text{face})) = \text{fromage}$.

2. On considère l'expérience qui consiste à lancer trois dés distinguables à 6 faces.

Ici, $\Omega = [\![1; 6]\!]^3$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω.

On considère la variable aléatoire S qui à tout issue de l'expérience associe la somme des trois nombres obtenus.

$$\begin{array}{rccl} S : & [\![1; 6]\!]^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \omega = (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{array}$$

Définition 16.3.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$ et à valeurs dans un ensemble E. On appelle **univers image** de X l'ensemble $X(\Omega)$ c'est-à-dire

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \ : \ \omega \in \Omega\}.$$

Remarque 16.4.

1. $X(\Omega)$ représente l'ensemble des valeurs prises par $X(\omega)$ lorsque ω parcourt Ω.
2. Vu que Ω est un ensemble fini, il en est de même pour $X(\Omega)$.

Exemple 16.5. Dans les exemples précédents, les univers images sont

$X(\Omega) = [\![0;6]\!]$, $Y(\Omega) = \{\text{entrée}, \text{fromage}, \text{dessert}\}$, $S(\Omega) = [\![3;18]\!]$.

Notation 6. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$ à valeurs dans l'ensemble E. Soit A une partie de E et $a \in E$.

- On note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par :

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

- On note $\{X = a\}$ ou $(X = a)$ l'événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini par

$$\{X = a\} = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}.$$

- Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note $\{X \leqslant a\}$ ou $(X \leqslant a)$ l'événement

$$\{X \leqslant a\} = X^{-1}(]-\infty;a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}.$$

Attention, comme dans la théorie des ensembles, ici, X^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de X, qui n'est pas nécessairement bijective. X^{-1} tout seul n'a donc pas de sens, seul $X^{-1}(A)$ où A est un ensemble est licite.

Exemple 16.7. Avec la variable aléatoire S des exemples précédents,

$$\{S = 3\} = \{(1;1;1)\} \qquad \{S = 4\} = \{(2;1;1);(1;2;1);(1;1;2)\}$$

$$\{S \geqslant 17\} = \{(6;6;6);(5;6;6);(6;5;6);(6;6;5)\}$$

Proposition 16.8.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$ à valeurs dans E.
On note $X(\Omega) = \{x_1;\ldots;x_n\}$.
Les événements $\{X = x_1\}$,... , $\{X = x_n\}$ forment un système complet d'événements.

Démonstration.
Ces événements sont clairement deux à deux incompatibles (un élément de Ω ne peut avoir deux images différentes) et leur réunion fait $X(\Omega)$. □

16.1.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 16.9.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E. On appelle **loi de probabilité de** X ou plus simplement **loi de** X, la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Proposition 16.10.

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration.
Notons $X(\Omega) = \{x_1; ...; x_n\}$. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) \geqslant 0$ (puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité). Par ailleurs, puisque les événements $\{X = x_1\}, ..., \{X = x_n\}$ forment un système complet d'événements, on a $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Ainsi $\mathbb{P}_X$ est une probabilité.

Autre démonstration.
On a $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega))^2$ avec $A \cap B = \varnothing$. On a $\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}((X \in A) \cup (X \in B))$. Or $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$ donc $(X \in A) \cap (X \in B) = \varnothing$ car $A \cap B = \varnothing$. Il s'ensuit $\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)$.
Donc $\mathbb{P}_X$ est bien une probabilité sur $X(\Omega)$. □

Exemple 16.11. Avec le premier exemple de ce cours,

$$\mathbb{P}_X([\![2; 4]\!]) = \mathbb{P}(X \in [\![2; 4]\!]) = \mathbb{P}(\text{« on a obtenu entre 2 et 4 "pile" »})$$

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On pose $X(\Omega) = \{x_1; \ldots; x_n\}$.

Puisque $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(X(\Omega); \mathcal{P}(X(\Omega)))$, elle est entièrement déterminée par la donnée des valeurs des probabilités des événements élémentaires de $X(\Omega)$ c'est-à-dire par la donnée des valeurs de $\mathbb{P}_X(\{x_k\}) = \mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. On rappelle qu'on alors peut retrouver la probabilité de n'importe quel événement A avec $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}_X(\{x\})$.

Quand on demande la loi de la variable aléatoire X, il suffit de donner $X(\Omega) = \{x_1; \ldots, x_n\}$ et les valeurs des $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. En général, on donne ces informations dans un tableau :

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Exemple 16.12. Soit $A \subset \Omega$. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire réelle, à valeurs dans $\{0, 1\}$ et sa loi de probabilité est donnée par

x	0	1
$\mathbb{P}(\mathbf{1}_A = x)$	$\mathbb{P}(\overline{A})$	$\mathbb{P}(A)$

Exercice d'application 16.13. On considère un joueur qui lance deux fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie équilibrée. À chaque fois qu'il obtient « pile », il gagne un euro et à

chaque fois qu'il obtient « face », il perd deux euros.
On note X le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de X.

$\hookrightarrow$ Ici $\Omega = \{\text{pile}; \text{face}\}^2$ muni de la probabilité uniforme sur Ω et on a

ω	{pile; pile}	{pile; face}	{face; pile}	{face; face}
$X(\omega)$	2	-1	-1	-4

d'où

x_k	2	-1	-4
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice d'application 16.14. On lance deux dés équilibrés et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X.

$\hookrightarrow$ Toutes les issues sont équiprobables et $\text{Card}(\Omega) = 6^2$. La variable aléatoire X est à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $\text{Card}(\{X \leqslant k\}) = k^2$ (les deux dés doivent tomber sur des chiffres de $[\![1, k]\!]$) donc

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \frac{k^2}{36}.$$

Puisque $\{k \leqslant k+1\}$ est la réunion disjointe de $\{X \leqslant k\}$ et $\{X = k+1\}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant k+1) = \mathbb{P}(X = k+1) + P(X \leqslant k) \text{ puis } \mathbb{P}(X = k+1) = \mathbb{P}(X \leqslant k+1) - \mathbb{P}(X \leqslant k) = \frac{2k+1}{36}$$

On en déduit que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

16.1.3. Loi image

Définition 16.15.

Soit E, F deux ensembles finis, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : E \longrightarrow F$. Alors $f \circ X$ définit une variable aléatoire sur Ω, notée $f(X)$ et appelée **loi image**.

Proposition 16.16.

Soit E, F deux ensembles finis, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. Posons $Y = f(X)$. La loi de Y est donnée par

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration.
Soit $y \in Y(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} \{Y = y\} &= \{f(X) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = y\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\right\} \\ &= \left\{X \in f^{-1}(\{y\})\right\} \\ &= \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}. \end{aligned}$$

Or les événements $\{X = x\}$ avec $x \in f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux incompatibles. On en déduit le résultat attendu. □

◇◇

Remarque technique 16.17. On reprend les notations précédentes. Pour déterminer la loi de Y à partir de celle de X, on peut procéder en deux étapes.

1. On détermine l'univers image de Y.
   Si $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$, alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(x_1); \dots; f(x_n)\}$. On fera attention au fait que dans ce dernier ensemble, certains éléments peuvent être égaux.
2. Pour chaque $y \in Y(\Omega)$:
   - on note $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ tous les éléments de $X(\Omega)$ tels que $f(x_i) = y$, de sorte que
     $$\{Y = y\} = \{X = x_{i_1}\} \cup \cdots \cup \{X = x_{i_k}\}.$$
   - On calcule $\mathbb{P}(Y = y)$ grâce à :
     $$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x_{i_1}) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_{i_k}),$$
     les événements étant deux à deux incompatibles.

Exercice d'application 16.18. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-après

x	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

$\hookrightarrow$ On a $Y = f(X)$, avec $f : x \longmapsto x^2$. De plus, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$, donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.
Puisque $\{Y = 0\} = \{X = 0\}$, $\{Y = 1\} = \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ et $\{Y = 4\} = \{X = 2\}$, on a :

y	0	1	4
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice d'application 16.19. On reprend l'Exercice d'application 16.13. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = 2X + X^2$.

$\hookrightarrow$ On a $Y = f(X)$, avec $f : x \longmapsto x^2 + 2x$. On a $f(2) = 8$, $f(-1) = -1$ et $f(-4) = 8$, donc $Y(\Omega) = \{-1, 8\}$.
Puisque $\{Y = -1\} = \{X = -1\}$, on a $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$.
De plus, $\{Y = 8\} = \{X = 2\} \cup \{X = -4\}$, d'où $\mathbb{P}(Y = -4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = -4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Finalement,

y	-1	8
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

◇◇

16.2. Lois usuelles

16.2.1. Loi uniforme

Définition 16.20.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et X variable aléatoire sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.
On dit que X suit la **loi uniforme** sur $X(\Omega)$, notée $\mathscr{U}(X(\Omega))$, lorsque tous les événements du système complet d'événements $\Big\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}\Big\}$ sont équiprobables, autrement dit, lorsque

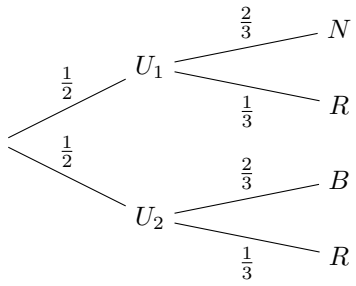
$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Cela revient à dire que $\mathbb{P}_X$ est la probabilité uniforme sur $\Big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\Big)$.
On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(X(\Omega))$.

Exemple 16.21. On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. On pose $X = 1$ si « pile » sort, et $X = 0$ si « face » sort. Alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ donc X suit la loi $\mathscr{U}(\{0; 1\})$.

Exercice d'application 16.22. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent 3 boules chacune. L'urne U_1 contient deux boules noires et une boule rouge. L'urne U_2 contient deux boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance une pièce équilibrée. S'il obtient « pile » il effectue un tirage d'une boule dans l'urne U_1, sinon il tire une boule dans l'urne U_2. Il perd 1€ si la boule est noire, ne gagne rien si la boule est rouge et gagne 1€ si la boule est blanche. On note X le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de X.

↪ On peut modéliser l'expérience à l'aide d'un arbre, en notant U_1 (resp. U_2) : « on tire la boule dans l'urne U_1 (resp. U_2) » et N (resp. R, B) : « la boule tirée est noire (resp. rouge, bleue) ».



On a $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}_{U_1}(N) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. De plus, $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}_{U_1}(R) + \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}_{U_2}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Ainsi $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(R) = \frac{1}{3}$. Finalement, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(\{-1, 0, 1\})$.

Exercice d'application 16.23. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des chiffres obtenus. On pose $Y = |X - 7|$. Déterminer la loi de X et celle de Y.

↪ $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ est muni de la probabilité uniforme et $X(\Omega) = \{2, 12\}$. On a par ailleurs

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ainsi $Y(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ et :

y	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

16.2.2. Loi de Bernoulli

Définition 16.24.

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0\,;\,1]$, notée $\mathscr{B}(p)$, lorsque

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Remarque 16.25.

- $\mathscr{B}(0)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 0.
- $\mathscr{B}(1)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 1.
- $\mathscr{B}(1/2)$ est la loi uniforme sur $\{0; 1\}$.

Situation d'apparition de la loi de Bernoulli. La loi $\mathscr{B}(p)$ apparaît dans les expériences avec seulement deux issues : échec (0) et succès (1). Le nombre p est la probabilité d'obtenir un succès.

Exemple 16.26. On considère une urne opaque contenant une proportion $p \in [0;1]$ de boules rouges et une proportion $q = 1-p$ de boules blanches. On tire une boule dans cette urne. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si la boule tirée est blanche.

$$X(\Omega) = \{0;1\}, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p, \qquad \mathbb{P}(X=1) = p$$

donc X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Exemple 16.27. Soit A un événement de l'univers probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et $p = \mathbb{P}(A)$. Alors $\mathbf{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
Réciproquement, si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ où $p \in [0\,;\,1]$, alors $X = \mathbf{1}_A$ avec $A = \{X = 1\}$.

16.2.3. Loi binomiale

Définition 16.28.

Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0;1]$. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n;p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0;n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q = 1-p.$$

Démonstration.
Ceci définit bien une probabilité sur $[\![0;n]\!]$ puisque pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant 0$ et d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

□

Remarque 16.29. Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 1 et p suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Situation d'apparition de la loi binomiale. La loi $\mathscr{B}(n,p)$ est celle du nombre de succès dans une suite de n expériences identiques et indépendantes ayant chacune deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$.

En effet, notons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ l'événement A_k : « le résultat de la k-ième épreuve de Bernoulli est un succès ». X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, puisque les événements A_k sont indépendants les uns des autres :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{E \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(E)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in E} A_i \cap \bigcap_{k \notin E} \overline{A_k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{E \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(E)=k}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

car il y a $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k.

Exemple 16.30. On considère une urne qui contient une proportion p de boules rouges et $(1-p)$ de boules blanches. On effectue n tirages avec remise dans cette urne. On note X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue des n tirages. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 16.31. On joue n fois à pile ou face avec la même pièce donnant « pile » avec probabilité p. On compte le nombre X de fois où on a obtenu « pile ». Alors X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Remarque 16.32. Si une variable aléatoire X sui la loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors $n-X$ suit la loi $\mathscr{B}(n,1-p)$.

Exercice d'application 16.33. On lance trois fois une pièce équilibrée et note X le nombre de « pile » obtenus. On pose $Y=|X-2|$. Donner la loi de Y.

$\hookrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{B}(3,\frac{1}{2})$, donc $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$ et

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ainsi $Y(\Omega)=\{0,1,2\}$ et :

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

16.3. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Pour connaître une variable aléatoire, on cherche sa loi. Mais pour résumer les caractéristiques de cette loi, on s'intéresse entre autres à un paramètre de position, l'espérance de la variable aléatoire. On étudiera un peu plus loi un des paramètres de dispersion, qui sont la variance et l'écart-type.

16.3.1. Définition et propriétés

Définition 16.34.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
On note $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$. On appelle **espérance** de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbb{P}(X=x_k)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x).$$

Remarque 16.35. $\mathbb{E}(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X pondérée par les $P(X=x)$. En particulier, s'il existe $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tels que $a\leqslant X(\omega)\leqslant b$ pour tout $\omega\in\Omega$, alors $a\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant b$.

Lorsque X dénote le gain obtenu d'une expérience aléatoire, $\mathbb{E}(X)$ est le gain que l'on peut espérer de l'expérience.

Remarque 16.36.
- L'espérance d'une variable aléatoire réelle ne dépend que de sa loi. En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$ et différentes (c'est-à-dire s'il existe au moins un $\omega\in\Omega$ tel que $X(\omega)\neq Y(\omega)$) mais que X et Y ont la même loi, alors $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$.
- Si X s'exprime selon une unité, son espérance a la même unité.

Définition 16.37.

Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite **centrée**.

Exemple 16.38. Si X est une variable aléatoire constante, disons $X=C$ où $C\in\mathbf{R}$, alors $\mathbb{E}(X)=C$.

Exercice d'application 16.39. Reprenons l'Exercice d'application 16.13. Donner l'espérance du gain X de ce jeu, puis l'espérance de Y.

↪ En utilisant les lois de probabilités déterminées de X et de Y déterminées avant, on a

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{4} = -1\,€ \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Lemme 16.40 - Formule d'atomisation.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Démonstration.
On pose $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} \{\omega\} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \Big(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big) && \text{car les événements élementaires sont deux à deux incompatibles} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x_k}} x_k \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 16.41.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.

1. Linéarité. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. Positivité. Si $X \geqslant 0$ (*i.e.* pour tout $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. Croissance. Si $X \geqslant Y$ (*i.e.* pour tout $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant Y(\omega)$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.
4. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant X \leqslant b$, alors $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.

Démonstration. 1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X(\omega) + Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \lambda X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

2. Supposons $X \geqslant 0$. Alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$ car pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$ (par hypothèse) et $\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$ (car $\mathbb{P}$ est une probabilité).

3. Supposons $X \geqslant Y$. Alors $\mathbb{E}(X - Y) \geqslant 0$ d'après 2. et ensuite $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) \geqslant 0$ d'après 1.

4. Supposons $a \leqslant X \leqslant b$. On a $\sum_{\omega\in\Omega} a\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant b\sum_{\omega\in\Omega} b\mathbb{P}(\{\omega\})$, d'où $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$ puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité. □

Proposition 16.42.

Soit X une variable aléatoire réelle. La variable aléatoire réelle $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Démonstration.
On a $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$ en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}$ et l'espérance d'une constante. □

16.3.2. La formule de transfert

Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle $Y = g \circ X = g(X)$, où X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$, on peut commencer par chercher la loi de Y puis calculer

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\ \mathbb{P}(Y = y).$$

Mais connaissant la loi de X, il est plus efficace d'utiliser la formule suivante :

Théorème 16.43 - Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$.

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration.

D'après la formule d'atomisation,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{\omega\in\Omega} g\circ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} g\circ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} g(x_k)\mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} \mathbb{P}(\{\omega\})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} \{\omega\}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x_k\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mathbb{P}(X=x_k).
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 16.44. Reprenons l'Exercice d'application 16.13. Donner l'espérance de Y sans utiliser la loi de Y.

↪ On a, en notant $g : x \longmapsto 2x + x^2$,

$$\mathbb{E}(Y) = g(2)\times\frac{1}{4} + g(-1)\times\frac{1}{2} + g(-4)\times\frac{1}{4} = 8\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 8\times\frac{1}{4} = \frac{7}{2}.$$

Remarque 16.45. L'espérance de $g(X)$ ne dépend que de la loi de X.

16.4. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

On cherche à mesurer la façon dont une variable aléatoire X s'écarte de sa moyenne, *i.e.* son espérance, que l'on note m. On pourrait s'intéresser à $\mathbb{E}(X-m)$, mais cette quantité est toujours nulle (cf. Proposition 16.42). On considère donc plutôt $\mathbb{E}((X-m)^2)$.

16.4.1. Variance

Définition 16.46.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$. On appelle **variance** de X le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, défini par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-m)^2\right)$ où l'on a posé $m = \mathbb{E}(X)$.

$\mathbb{V}(X)$ est la moyenne pondérée des carrés des distances de X à sa moyenne pondérée ; elle mesure la dispersion quadratique de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$.

Remarque 16.47.

- Si X a une unité, $\mathbb{V}(X)$ a la même unité au carré.
- Le nombre $\mathbb{V}(X)$ ne dépend que de la loi de X.

Exemple 16.48. Si X est une variable aléatoire réelle constante, alors $\mathbb{V}(X) = 0$. En effet, on a alors $X = \mathbb{E}(X)$ et donc $\mathbb{V}(X)$ est l'espérance d'une variable réelle nulle.

Proposition 16.49 - Formule de Kœnig - Huygens.

Soit X une variable aléatoire réelle. On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Démonstration.
Notons $m = \mathbb{E}(X)$. En utilisant la linéarité de $\mathbb{E}$ et l'espérance d'une constante, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-m)^2) = \mathbb{E}(X)^2 - 2m\mathbb{E}(X) + 2m^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2m^2 + m^2$$

d'où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - m^2$. □

Exercice d'application 16.50. On reprend l'Exercice d'application 16.13. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

↪ On a, avec la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (-4)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2},$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{11}{2} - (-1)^2 = \frac{9}{2}.$$

Proposition 16.51.

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$.
   On obtient par conséquent : $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X + \mu) = \mathbb{V}(X)$.

Démonstration.
1. Puisque $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$ et par positivité de $\mathbb{E}$, on a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)^2) \geqslant 0$.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Par linéarité de $\mathbb{E}$,

$$\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \mathbb{E}((\lambda X + \mu - (\lambda \mathbb{E}(X) + \mu))^2) = \mathbb{E}((\lambda(X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(\lambda^2 (X - \mathbb{E}(X))^2) = \lambda^2 \mathbb{V}(X).$$

□

Remarque 16.52. Lorsqu'on rajoute une constante à une variable aléatoire réelle X, il est normal que sa variance ne bouge pas, puisque ses valeurs sont distribuées de la même façon que celles de X par rapport à leur moyenne. Autrement dit, sa moyenne change, mais pas les écarts à la moyenne.

Remarque 16.53. Il n'y a pas de forme pour la variance d'une somme de variables aléatoires de manière générale.

16.4.2. Écart-type

Définition 16.54.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **écart-type** de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, et défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X.

Remarque 16.55. 1. $\sigma(X)$ est correctement définie car $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$ par positivité de l'espérance.
2. Si X est exprimée dans une certaine unité, l'écart-type de X a la même unité.
3. L'écart-type d'une variable aléatoire constante est nul.

Exemple 16.56. En reprenant les notations de l'Exercice d'application 16.13, on a $\mathbb{V}(X) = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Définition 16.57.

Une variable aléatoire réelle de variance ou d'écart-type égal à 1 (c'est la même chose), est dite **réduite**.

Proposition 16.58.

Soit X une variable aléatoire réelle.
1. $\sigma(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $\sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda|\sigma(X)$.
   On obtient par conséquent : $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$ et $\sigma(X + \mu) = \sigma(X)$.
3. La variable aléatoire $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ où $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$ est une variable aléatoire centrée et réduite.

Démonstration. 1. Immédiat avec la Proposition 16.51.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. D'après la Proposition 16.51, on a
$$\sigma(\lambda X + \mu) = \sqrt{\mathbb{V}(\lambda X + \mu)} = \sqrt{\lambda^2 \mathbb{V}(X)} = |\lambda|\sigma(X).$$
3. Par linéarité de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$, donc Y est centrée.
   Via 1. et 2., $\sigma(Y) = \frac{1}{|\sigma|}\sigma(X) = \frac{1}{\sigma}\sigma = 1$, donc Y est réduite. □

16.5. Espérance et variance des lois usuelles

16.5.1. Variables aléatoires constantes

Soit c un nombre fixé et X une variable aléatoire égale à c.
$$\mathbb{E}(X) = C \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = 0.$$

16.5.2. Loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$

Proposition 16.59.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. Alors
$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Démonstration. • $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

- On a, avec la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

□

Exercice d'application 16.60. Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a \leqslant b$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y suivant une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$

$\hookrightarrow$ Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, b-a+1]\!])$, alors $X+a-1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ et ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X+a-1) = \mathbb{E}(X) + a - 1 = \frac{b-a+1+1}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$$

et

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

16.5.3. Variable aléatoire de Bernoulli

Proposition 16.61.

Soit $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On note $q = (1-p)$.

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = pq.$$

Démonstration.
On a $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) = p$.
Avec la formule de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) = p$, donc $\mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$. □

Exemple 16.62. Soit A un événement de $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On a vu que $\mathbf{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$, d'où

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A) = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A)).$$

16.5.4. Loi binomiale

Proposition 16.63.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0\,;\,1]$. On note $q = 1-p$.

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = npq$$

Démonstration. • On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or, d'après la formule du capitaine, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell+1}(1-p)^{n-1-\ell}\\ &= np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-1-\ell}\\ &= np(p+1-p)^{n-1}\\ &= np.\end{aligned}$$

- Pour calculer la variance, il reste à déterminer $\mathbb{E}(X^2)$, mais il est plus aisé de calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$. D'après la formule du transfert,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![0,2]\!]$. Alors

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell+2}(1-p)^{n-\ell-2}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-2-\ell}\\ &= n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}\\ &= n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np$. Finalement,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

□

Exercice d'application 16.64. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$.

$\hookrightarrow X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ donc, d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}p)^k(1-p)^k = (1-p+\mathrm{e}p)^n.$$

16.6. Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

Lemme 16.65 - Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration.
Notons $p = \mathbb{P}(X \geqslant a)$. Puisque $\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}) = p$. Donc

$$a\mathbb{P}(X \geqslant a) = a\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}) = \mathbb{E}(a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}).$$

Soit $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in \{X \geqslant a\}$, alors $X(\omega) \geqslant a$ et ainsi $a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}(\omega) = a \leqslant X(\omega)$. Si $\omega \notin \{X \geqslant a\}$, alors $a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}(\omega) = 0 \leqslant X(\Omega)$. Donc $a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}} \leqslant X$.
Par croissance de l'espérance, on en déduit que $\mathbb{E}(a\mathbf{1}_{\{X\geqslant a\}}) \leqslant \mathbb{E}(X)$, donc $a\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(X)$ puis, puisque $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$. □

Remarque 16.66. Ce lemme n'est intéressant que si a est grand et plus précisément lorsque $a > \mathbb{E}[X]$.

Théorème 16.67 - Inégalité de Bienaymé - Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ non nul. Pour tout $d > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ avec $a = \varepsilon^2$.Alors

$$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2}$$

donc

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

car l'événement $\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right\}$ est égal à l'événement $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$. □

Remarque 16.68. Cette propriété n'a d'intérêt que si $\varepsilon > \sigma$. Elle explique que la probabilité que X soit « loin » de sa moyenne est petite et décroît au delà de σ en $\mathrm{O}\big(1/d^2\big)$ (ε étant un minorant de la distance de X à sa moyenne).

Exercice d'application 16.69. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On lance n fois un dé équilibré et on note Y_n la fréquence d'apparition du chiffre 6. Donner une valeur de n telle que la probabilité que Y_n soit comprise entre $\frac{1}{6} - \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{100}$ est-elle strictement supérieure à $0,95$?

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On remarque que

$$\mathbb{P}\left(\left(\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) > 0,95 \iff \mathbb{P}\left(\left(\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) \leqslant 0,05.\right.\right.$$

Notons X_n le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers. On a $X_n \hookrightarrow (n, \frac{1}{6})$. De plus, $Y_n = \frac{X_n}{n}$, donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_n) = \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{5n}{36n^2} = \frac{5}{36n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geqslant 0,01) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{0,01^2} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{5 \times 10^4}{36n}.$$

Pour pouvoir affirmer que $\mathbb{P}\big(\big|Y_n - \frac{1}{6}\big| < \frac{1}{100}\big) > 0,95$, il suffit donc que $\frac{5\times 10^4}{36n} \leqslant 0,05$, *i.e.* $n \geqslant \frac{10^6}{36}$.

16.7. Couple de variables aléatoires

16.7.1. Présentation

Soit $(\Omega;\mathcal{P}(\omega);\mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Alors

$$\begin{array}{rccc}(X,Y):&\Omega&\longrightarrow&R^2\\&\omega&\longmapsto&(X(\omega),Y(\omega))\end{array}$$

est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

Remarque 16.70.
1. Définir un couple de variables aléatoires, c'est se donner deux variables aléatoires relatives à la même expérience.
2. On peut définir l'univers image d'un couple (X,Y) de variables aléatoires par
$$(X,Y)(\Omega)=\big\{\big(X(\omega),Y(\omega)\big)\mid\omega\in\Omega\big\}.$$
3. Dans la pratique, on préfère parfois travailler avec le produit cartésien $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ plutôt que sur l'univers image $(X,Y)(\Omega)$, même si $(X,Y)(\Omega)$ n'est qu'une partie du produit cartésien $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Exemple 16.71. On tire simultanément au hasard deux nombres distincts dans l'intervalle d'entiers $[\![1;n]\!]$. L'univers ici est $\Omega=\big\{\{i,j\}\mid i\in[\![1;n]\!],\ j\in[\![1;n]\!]\text{ et }i\neq j\big\}$. On considère les variables aléatoires X et Y où X est la valeur du plus petit nombre tiré et Y la valeur du plus grand. On a

$$X(\Omega)=[\![1;n-1]\!],\ Y(\Omega)=[\![2;n]\!]\text{ donc }\ X(\Omega)\times Y(\Omega)=\big\{(x,y)\mid x\in[\![1;n-1]\!]\text{ et }y\in[\![2;n]\!]\big\}$$

ce qui n'est pas exactement l'univers image $(X,Y)(\Omega)=\Big\{(x,y)\in[\![1;n]\!]^2\mid 1\leqslant x<y\leqslant n\Big\}$.

Notation 72. On utilise les mêmes notations que pour les variables aléatoires. Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires tel que X soit à valeurs dans E et Y à valeurs dans F, pour toute partie A de $E\times F$, on note $\{(X,Y)\in A\}$ l'événement

$$\{(X,Y)\in A\}=\{w\in\Omega\mid(X(\omega),Y(\omega))\in A\}.$$

Proposition 16.73 - Systèmes complets d'événements associés à un couple de v.a..

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires.
1. La collection d'événements $\big\{\{X=x\text{ et }Y=y\}\mid(x,y)\in(X,Y)(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements.
2. La collection d'événements $\big\{\{X=x\text{ et }Y=y\}\mid(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements.

Démonstration.
Ces événements sont clairement incompatibles deux à deux et leur réunion fait Ω. Dans la deuxième collection, certains événements sont l'événement impossible. □

16.7.2. Loi conjointe et lois marginales d'un couple de variables aléatoires

Théorème 16.74.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
La **loi conjointe** du couple (X,Y) est la probabilité $\mathbb{P}_{(X,Y)}$, qui est définie sur $\Big((X,Y)(\Omega);\mathcal{P}((X,Y)(\Omega))\Big)$ par :

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{P}_{(X,Y)}: & \mathcal{P}((X,Y)(\Omega)) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in A\}\big).\end{array}$$

Démonstration.
C'est bien une probabilité :

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}\big((X,Y)(\Omega)\big)=\mathbb{P}(\Omega)=1$$

et pour toutes parties disjointes A et B de $(X,Y)(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X,Y)}(A\cup B)&=\mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in A\cup B\}\big)\\&=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega\mid (X(\omega),Y(\omega))\in A\cup B\}\big)\\&=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega\mid (X(\omega),Y(\omega))\in A\}\cup\{\omega\in\Omega\mid (X(\omega),Y(\omega))\in B\}\big)\\&=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega\mid (X(\omega),Y(\omega))\in A\}\big)+\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega\mid (X(\omega),Y(\omega))\in B\}\big)\\&\qquad\text{car les deux événements sont incompatibles}\\&=\mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in A\}\big)+\mathbb{P}\big(\{(X,Y)\in B\}\big)\\&=\mathbb{P}_{(X,Y)}(A)+\mathbb{P}_{(X,Y)}(B).\end{aligned}$$

□

Remarque 16.75.

1. Pour définir complètement $\mathbb{P}_{(X,Y)}$, il suffit de se donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\})$ pour tout $(x,y)\in(X,Y)(\Omega)$. On préfère parfois donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\})$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, sachant que $\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\})=0$ lorsque $(x,y)\notin(X,Y)(\Omega)$. On rassemble généralement les résultats dans un tableau.

2. On a toujours $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\})=1.$

Définition 16.76.

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$, alors les probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ de X et Y sont appelées **lois marginales**.

Proposition 16.77.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$. Pour $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(X\in A)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(\{X\in A \text{ et } Y=y\})=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}((X,Y)\in A\times\{y\})$$

$$\text{et } \mathbb{P}_Y(B)=\mathbb{P}(Y\in B)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y\in B\})=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}((X,Y)\in\{x\}\times B)$$

En particulier,

$$\forall x\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}_X(\{x\})=\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\})$$

$$\text{et}\quad \forall y\in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}_Y(\{y\})=\mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\}).$$

Remarque technique 16.78. Dans le tableau qui donne la loi du couple (X,Y), on obtient la loi de X et la loi de Y dans les marges (d'où le nom de « loi marginales »).

Exercice d'application 16.79. Une urne contient 2 boules bleues, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules bleues obtenues et Y le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X,Y).

$\hookrightarrow$ On a $X(\Omega)=[\![0,2]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![0,3]\!]$. De plus,

$$(X,Y)(\Omega)=\{\,(x,y)\in[\![0,2]\!]\times[\![0,3]\!]\mid 3-(x+y)\in[\![0,2]\!]\}$$

car la donnée des valeurs de $(X(\omega),Y(\omega))$ déterminer l'issue ω dans laquelle on a tiré $X(\omega)$ boules bleues, $Y(\omega)$ boules rouges et $3-(X(\omega)+Y(\omega))$ boules rouges.
Par conséquent, pour tous $k\in[\![0,2]\!]$, $\ell\in[\![0,3]\!]$ tels que $3-(k+\ell)\in[\![0,2]\!]$,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(k,\ell)=\frac{\binom{2}{k}\times\binom{3}{\ell}\times\binom{2}{3-(k+\ell)}}{\binom{7}{3}}.$$

Notons les résultats dans un tableau :

ℓ \ k	0	1	2	$\mathbb{P}(Y=\ell)$
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{4}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{12}{35}$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	$\frac{1}{35}$
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

On lit ainsi les lois marginales $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

ℓ	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=\ell)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

⚠ **Attention ⚠.** La Proposition 16.77 assure que la loi du couple permet d'obtenir les lois marginales. Mais attention, la connaissance des lois marginales ne permet pas de connaître la loi conjointe.

Exercice d'application 16.80. On lance un dé rouge et un dé bleu. On note X le résultat du dé rouge, Y le résultat du dé bleu et $Z = 7 - X$.
Donner les lois conjointes et marginales de (X, Y) et (X, Z).

$\hookrightarrow$ $\Omega = [\![1, 6]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. $X(\Omega) = [\![1, 6]\!] = Y(\Omega) = Z(\Omega)$. On a :

$\ell \backslash k$	0	1	2	4	5	6	$\mathbb{P}(Y = \ell)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

et

$\ell \backslash k$	0	1	2	4	5	6	$\mathbb{P}(Y = \ell)$
1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On remarque que dans cet exemple, les couples (X, Y) et (X, Z) ont les mêmes lois marginales mais pas les mêmes lois conjointes.

16.7.3. Lois conditionnelles

Définition 16.81.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la **loi conditionnelle** de X sachant $\{Y = y\}$ est la probabilité

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_{\{Y=y\}} : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0;1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X \in A) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)} \end{array}$$

De même, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle** de Y sachant $\{X = x\}$ est la probabilité

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_{\{X=x\}} : & \mathcal{P}(Y(\Omega)) & \longrightarrow & [0;1] \\ & B & \longmapsto & \mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y \in B) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y \in B\})}{\mathbb{P}(X = x)} \end{array}$$

En particulier, avec les notations de la définition, $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y) = \dfrac{\mathbb{P}(Y = y \text{ et } X = x)}{\mathbb{P}(X = x)}$.

Notation 82. On rencontre parfois la notation $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$.

Proposition 16.83.

Avec les notations de la définition, $\mathbb{P}_{\{X=x\}}$ est une probabilité.

Exercice d'application 16.84. On reprend l'Exercice d'application 16.79. Déterminer $\mathbb{P}_{\{X=1\}}$.

↪ On a $\dfrac{\frac{2}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{1}{10}$, $\dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{\frac{6}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{3}{10}$, d'où

ℓ	0	1	2	3
$\mathbb{P}_{\{X=1\}}(Y = \ell)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	0

16.7.4. Loi image

On se donne un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs réelles définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et une fonction g de **deux** variables à valeurs réelles dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

On considère la nouvelle variable aléatoire

$$\begin{array}{rccl} g(X,Y) : & \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \omega & \longmapsto & g(X(\omega), Y(\omega)). \end{array}$$

On cherche à obtenir la loi de cette variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ quand on connaît la loi du couple (X, Y).

- **Première étape :** On détermine $Z(\Omega)$.

$$Z(\Omega) = \{g(x, y) \mid (x, y) \in (X, Y)(\Omega)\}$$

- **Deuxième étape :** Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on cherche les antécédents de z par g dans $(X,Y)(\Omega)$. Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_m\}$, on cherche tous les couples (x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), … , (x_{i_r}, y_{j_r}) dans $(X,Y)(\Omega)$ tels que

$$g(x_{i_1}, y_{j_1}) = g(x_{i_2}, y_{j_2}) = \cdots = g(x_{i_r}, y_{j_r}) = z$$

de sorte que $\{Z = z\}$ soit la réunion des événements deux à deux incompatibles :

$$\{Z = z\} = \bigcup_{k=1}^{r} \{X = x_{i_k} \text{ et } Y = y_{j_k}\}.$$

- **Dernière étape :** On calcule $\mathbb{P}(Z = z)$ de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\{X = x_{i_k} \text{ et } Y = y_{j_k}\}).$$

Exercice d'application 16.85. On reprend l'Exercice d'application 16.79. Déterminer la loi de $Z = XY$.

↪ On rappelle $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$. Donc $XY(\Omega) \subset \{0,1,2,3,4,6\}$.
On a $XY = 0 \iff (X,Y) \in \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3) + (1,0) + (2,0)\}$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY=0) &= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = 0) + \sum_{\ell=1}^{3} \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = \ell) \\ &= \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{3}{35} + \frac{6}{35} + \frac{1}{35} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

De plus, $XY = 1 \iff X = 1$ et $Y = 1$, d'où

$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{12}{35}.$$

En poursuivant de même, on obtient

$$\mathbb{P}(XY=2) = \frac{3}{35} + \frac{6}{35} = \frac{9}{35}, \quad \mathbb{P}(XY=3) = 0, \quad \mathbb{P}(XY=4) = 0, \quad \mathbb{P}(XY=6) = 0$$

Finalement,

x	0	1	2
$\mathbb{P}(XY = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$

16.7.5. Variables aléatoires indépendantes

Définition 16.86.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont indépendants c'est-à-dire lorsque

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Notation 87. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on notera $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 16.88.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. Si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(\{X = x \text{ et } Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y),$$

alors X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
Soient $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \{X = a \text{ et } Y = b\}\Big) \\
&= \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \mathbb{P}(\{X = a \text{ et } Y = b\}) \qquad \text{(événements deux à deux incompatibles)} \\
&= \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \mathbb{P}(X = a) \times \mathbb{P}(Y = b) \\
&= \sum_{b\in B} \left(\sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a) \times \mathbb{P}(Y = b) \right) \\
&= \sum_{b\in B} \left(\mathbb{P}(Y = b) \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a) \right)
\end{aligned}$$

Or $\sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a)$ ne dépend pas de b dans la somme en b, donc on peut le sortir de la somme en b pour obtenir :

$$\mathbb{P}(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}) = \left(\sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a) \right) \left(\sum_{b\in B} \mathbb{P}(Y = b) \right) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

□

Remarque 16.89. Les variables X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)$. Autrement dit, il y a indépendance de X et Y lorsque le fait de savoir que $Y = y$ n'apporte rien sur la probabilité de $\{X = x\}$.

Exemple 16.90.

1. Dans l'Exercice d'application 16.79, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Dans l'Exercice d'application 16.80, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors que les variables aléatoires X et Z ne le sont pas.
   Puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$, les événements A : « X est paire » et B : « Y est un multiple de 3 » sont indépendants. On en déduit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Exercice d'application 16.91. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{U}(\{0; 1\})$.

On pose $Z = |X - Y|$. Montrer que X et Z sont indépendantes.

$\hookrightarrow$ On a $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0) = \dfrac{1}{2}$. De plus, si $\alpha \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = \alpha \text{ et } Z = 1) = \mathbb{P}(X = \alpha \text{ et } Y = |1 - \alpha|) = \mathbb{P}(X = \alpha) \times \mathbb{P}(Y = |1 - \alpha|) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

et $\mathbb{P}(X = \alpha) \times \mathbb{P}(Z = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. De même,

$$\mathbb{P}(X = \alpha \text{ et } Z = 0) = \mathbb{P}(X = \alpha \text{ et } Y = \alpha) = \mathbb{P}(X = \alpha) \times \mathbb{P}(Y = \alpha) = \frac{1}{4}$$

et $\mathbb{P}(X = \alpha) \times \mathbb{P}(Z = 0) = \dfrac{1}{4}$. Finalement $X \perp\!\!\!\perp Z$.

Proposition 16.92.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit f et g deux applications à valeurs réelles, f étant définie au moins sur $X(\Omega)$ et g étant définie au moins sur $Y(\Omega)$.
Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple 16.93. On reprend l'Exercice d'application 16.80. On a vu que $X \perp\!\!\!\perp Y$ et on rappelle que $Z = 7 - X$. On obtient alors que Z et Y sont indépendantes (car $Z = f(X)$, avec $f : x \longmapsto 7 - x$).

16.7.6. Indépendance mutuelle

Définition 16.94.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.
On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $A_1 \in X_1(\Omega), \ldots, A_n \in X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 16.95.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et $A_1 \in X_1(\Omega), \ldots, A_n \in X_n(\Omega)$. On a

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

et en particulier si $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$ alors

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Démonstration.
Conséquence de la définition d'événements mutuellement indépendants. □

Proposition 16.96.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
$X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Démonstration.
Admis. □

Proposition 16.97.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et $g_1, \dots g_n$ des applications respectivement définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$.
Les variables aléatoires $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.
Plus généralement, toutes variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_k$, définies à partir de $X_1, \dots, X_n$ de sorte que chaque X_i n'intervient que dans au plus une des variables aléatoires Y_j, sont mutuellement indépendantes.

Exemple 16.98. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Les variables aléatoires $X + Y^2$ et $3Z + 1$ sont mutuellement indépendantes.

16.7.7. Somme de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes

Proposition 16.99.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$.
Alors la variable aléatoire $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation. Une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ compte le nombre de succès dans n expériences aléatoires indépendantes où la probabilité de succès de chaque expérience est p.

Démonstration.
On a clairement $S(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On note $E_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0; 1\}^n \mid x_1 + \cdots + x_k = n\}$. Avec cette notation

$$\{S = k\} = \{X_1 + \cdots + X_n = k\} = \bigcup_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$$

Les événements intervenant dans cette réunion sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1, X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)\\ &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x_2)\cdots\mathbb{P}(X_n=x_n) \quad \text{par indépendance mutuelle}\\ &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_1=x_2)\cdots\mathbb{P}(X_1=x_n) \quad \text{car } X_1,\dots,X_n \text{ ont la même loi.}\end{aligned}$$

Dans chacun des termes de la somme précédente, on trouve un produit de facteurs valant $\mathbb{P}(X_1=0)$ ou $\mathbb{P}(X_1=1)$. Puisque $x_1+\cdots+x_n=k$, il y a exactement k fois le facteur $\mathbb{P}(X_1=1)$ et $n-k$ fois le facteur $\mathbb{P}(X_1=0)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1=1)^k\mathbb{P}(X_1=0)^{n-k}\\ &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} p^k(1-p)^{n-k}\\ &= p^k(1-p)^{n-k}\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} 1\\ &= p^k(1-p)^{n-k}\,\mathrm{Card}(E_k)\\ &= \binom{k}{n}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

et donc S suit une loi binomiale de paramètres n et p. □

Remarque 16.100. En reprenant les notations de la définition, on peut retrouver l'espérance de $S \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$:

$$\mathbb{E}(S)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=\sum_{k=1}^{n}p=np.$$

16.7.8. Espérance et variance pour des variables aléatoires indépendantes

Proposition 16.101.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.
Notons $Z=XY$ et pour tout $z\in Z(\Omega)$, on note $E_z=\{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\mid xy=z\}$.

$$\mathbb{P}(Z=z)=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{(x,y)\in E_z}\underbrace{\{X=x \text{ et } Y=y\}}_{\substack{\text{événements deux à}\\ \text{deux incompatibles}}}\Big)=\sum_{(x,y)\in E_z}\mathbb{P}(\{X=x \text{ et } Y=y\})=\sum_{(x,y)\in E_z}\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

où la dernière égalité découle de l'indépendance de X et de Y. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z=z) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\Big(\sum_{(x,y)\in E_z} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \Big(\sum_{(x,y)\in E_z} z\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big) \\
&= \underbrace{\sum_{z\in Z(\Omega)} \Big(\sum_{(x,y)\in E_z}}_{\substack{\text{on regroupe tous les couples } (x,\,y) \\ \text{par valeurs de leur produit } xy}} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big) \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\Big) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\ \mathbb{P}(Y=y)\Big) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(Y)\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \\
&= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 16.102.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);\mathbb{P})$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.
Voir TD. □

Remarque 16.103. On peut très bien avoir $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ sans que X et Y soient indépendants.

Exemple 16.104. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$ et $Y=\mathbf{1}_{X=0}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= -1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0 \\
\mathbb{E}(Y) &= 0\times\mathbb{P}(Y=0)+1\times\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(x=0)=\frac{1}{3} \\
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X=0})=\mathbb{E}(0)=0
\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et pourtant X et Y ne sont pas indépendantes.
En effet, $\mathbb{P}(\{X=1 \text{ et } Y=1\})=\mathbb{P}(\{X=1 \text{ et } X=0\})=0$ et $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\neq 0$.

Proposition 16.105.

Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors,

$$\mathbb{E}(X_1X_2\cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\cdots\mathbb{E}(X_n)$$

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + \cdots + \mathbb{V}(X_n).$$

Démonstration.
On utilise une récurrence sur n, la Proposition 16.101 et le Corollaire 16.102. □

Remarque 16.106. On peut ainsi retrouver la variance d'une loi binomiale de paramètre n et p (où $(n,p) \in \mathbf{N}^\star \times [0\,;\,1]$). Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Posons $S = X_1 + \cdots + X_n$. D'après ce qui précède, $S \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

Chapitre 17

Intégration sur un segment

17.1. Intégrale d'une fonction en escalier

Dans toute cette section a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Définition 17.1.

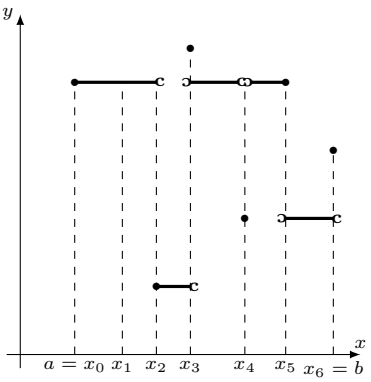
On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute famille finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ strictement croissante d'éléments de $[a, b]$ c'est-à-dire telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Définition 17.2.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$. On dit que la fonction f est **en escalier** si, et seulement si, il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Une telle subdivision est dite adaptée à la fonction f. On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier.

Remarque 17.3.

1. Les valeurs de f aux points x_i n'ont pas d'importance.
2. Il n'existe pas qu'une subdivision adaptée à f : dans cet exemple, la subdivision obtenue en enlevant le point x_1 reste adaptée à f. De même, il est toujours possible d'ajouter des points à la subdivision. Pour une fonction en escalier f donnée, on peut former une subdivision minimale (qui contient le moins de points possibles) adaptée à f.



3. Pour deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ données, il existe toujours une subdivision de $[a, b]$ adaptée aux deux fonctions. Cela permet de justifier que les combinaisons linéaires et les produits de fonctions en escalier est une fonction en escalier. De même, il est clair que si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a, b]$.

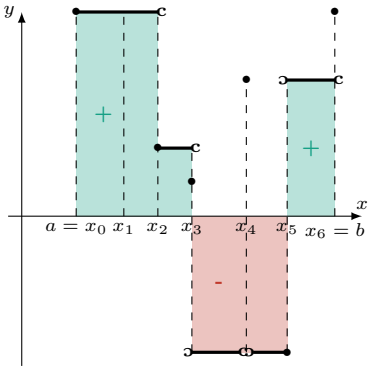
Définition 17.4.

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Il est clair que la quantité $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ et l'on note $\int_{[a,b]} f$ le réel

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i.$$

Remarque 17.5.

1. Géométriquement, $(x_{i+1} - x_i)\, y_i$ est égal à l'aire du rectangle limité par l'axe (Ox), les droites d'équations $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$ et la droite d'équation $y = y_i$, affectée du signe + si ce rectangle est au dessus de (Ox) et du signe - dans le cas contraire.
2. Pour se persuader que la somme de dépend pas de la subdivision choisie, il suffit de considérer la subdivision « minimale » associée à f. Il est alors simple de voir que la somme ne change pas lorsque l'on rajoute un point à cette subdivision.



Proposition 17.6 - Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

1. Linéarité : pour toutes fonctions f et g en escalier sur $[a,b]$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,
$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$
2. Positivité : si f est une fonction en escalier positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
3. Croissance : si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $f \leqslant g$, alors
$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$$
4. Additivité des intervalles : soit $c \in]a,b[$ et f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont des fonctions en escalier et
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration.
Il suffit à chaque fois de revenir à la définition avec une subdivision adaptée. □

17.2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

17.2.1. Définition

Dans cette section et la suivante, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

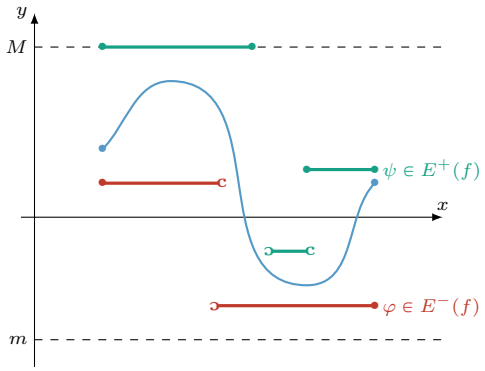
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Puisque f est continue sur un segment, elle est bornée sur ce segment : il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in [a,b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

On note $E^-(f)$ (resp $E^+(f)$) l'ensemble des fonctions en escalier inférieures (resp. supérieures) à f sur $[a,b]$:

$$E^-(f) = \left\{\varphi \in \mathcal{E}_{[a,b]} : \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leqslant f(x)\right\}$$

et $$E^+(f) = \left\{\psi \in \mathcal{E}_{[a,b]} : \forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \psi(x)\right\}.$$



L'ensemble $E^-(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante égale à m. De même $E^+(f)$ est non vide car il contient la fonction constante égale à M.

Pour tout $\varphi \in E^-(f)$, on a $\varphi \leqslant M$, donc l'ensemble de nombres réels $\left\{\int_{[a,b]} \varphi,\ \varphi \in E^-(f)\right\}$ est non vide et majoré par $M(b-a)$. Il possède donc une borne supérieure. De même, pour tout $\psi \in E^+(f)$, on a $m \leqslant \psi$, donc l'ensemble de nombres réels $\left\{\int_{[a,b]} \psi,\ \psi \in E^+(f)\right\}$ est non vide et minoré par $m(b-a)$. Il possède donc une borne inférieure.

Or, pour tout $\varphi \in E^-(f)$ et tout $\psi \in E^+(f)$, on a $\varphi \leqslant \psi$ donc $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$, donc

$$\sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi,\ \varphi \in E^-(f)\right\} \leqslant \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi,\ \psi \in E^+(f)\right\}.$$

On admet que la continuité de f implique que cette inégalité est en fait une égalité :

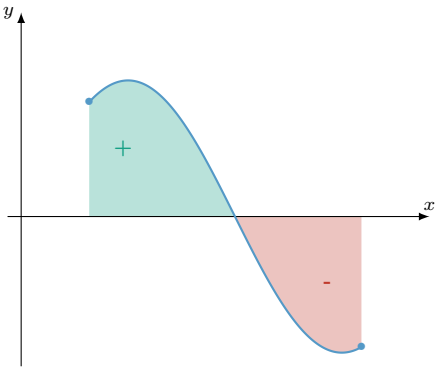
$$\sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi,\ \varphi \in E^-(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi,\ \psi \in E^+(f)\right\}.$$

Définition 17.7.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui minorent f est égale à la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui majorent f. Leur valeur commune, notée $\int_{[a,b]} f$ est appelée **intégrale** de f sur $[a,b]$.

Remarque 17.8. 1. Il est clair qu'une fonction constante sur $[a,b]$ est à la fois en escalier et continue sur $[a,b]$. Pour une telle fonction constante f, les deux définitions de l'intégrale de f sur $[a,b]$ (intégrale d'une fonction en escalier et intégrale d'une fonction continue) donnent la même valeur.

2. On admet que comme pour les fonctions en escalier, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe (Ox), la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, en affectant d'un signe $+$ les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et d'un signe $-$ les parties situées en dessous.



17.2.2. Propriétés

Les propriétés listées dans cette partie découlent des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier. Certaines démonstrations sont techniques et ne sont pas exigibles. On ne les donnera pas dans ce cours.

Proposition 17.9 - Linéarité de l'intégrale.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f \end{array}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, autrement dit, pour toutes fonctions f et g continues sur $[a,b]$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Proposition 17.10 - Positivité de l'intégrale.

Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors son intégrale sur $[a,b]$ est positive, autrement dit,

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \geqslant 0.$$

Démonstration.
La fonction identiquement nulle sur $[a,b]$ est une fonction en escalier qui minore f ce qui donne immédiatement le résultat. □

Proposition 17.11 - Croissance de l'intégrale.

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Démonstration.
Sous ces hypothèses, la fonction $g - f$ est continue et positive sur $[a,b]$. Par positivité de l'intégrale sur $[a,b]$, on obtient $\int_{[a,b]} (g-f) \geqslant 0$. Or par linéarité, $\int_{[a,b]} (g-f) = \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f$ d'où le résultat. □

Corollaire 17.12.

Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$,

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Démonstration.
Ceci est une conséquence immédiate de l'inégalité $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. □

Proposition 17.13 - Additivité des intervalles.

Soit $c \in]a,b[$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. On a $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

17.2.3. La notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Définition 17.14.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous $a,b \in I$, on définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Remarque 17.15.

i) La variable x qui apparait dans l'intégrande est une variable muette. Les deux notations $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représentent la même intégrale.

ii) Si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas l'intégrale de f sur un segment : certaines propriétés de l'intégrale ne « passent » pas avec cette notation, en particulier, les propriétés de positivité et de croissance ne sont pas conservées. En conséquence, dans la pratique, si $a > b$, il est conseillé d'utiliser $\displaystyle-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ à la place de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsqu'on veut majorer ou minorer une telle intégrale.

iii) On peut aussi noter $\displaystyle\int_a^b f$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Il faut alors faire attention de ne pas faire apparaître la variable d'intégration sous l'intégrale.

La propriété d'additivité des intervalles se prolonge avec cette notation :

Proposition 17.16 - Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

et ce quel que soit l'ordre des réels a, b et c.

À partir de maintenant, lorsque dans l'énoncé d'une proposition apparaît le segment $[a, b]$, c'est que l'on a supposé que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Définition 17.17.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 17.18.

La valeur moyenne μ de f est égale à la valeur de la fonction constante sur $[a, b]$ qui a la même intégrale que f sur $[a, b]$. Autrement dit, c'est la longueur du côté du rectangle dont l'autre côté est $[a, b]$ et qui a même aire que l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

17.2.4. Fonctions d'intégrale nulle

Remarque 17.19. L'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction nulle sur $[a, b]$ vaut 0.

Théorème 17.20.

Si f est une fonction

- continue sur $[a, b]$,
- de signe constant sur tout le segment $[a, b]$,
- telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,

alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

Démonstration.
On fait la démonstration dans le cadre d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

On raisonne par contraposition : on suppose que f n'est pas partout nulle sur $[a, b]$ et l'on démontre qu'alors f n'est pas d'intégrale nulle sur $[a, b]$.

Supposons que f ne soit pas partout nulle sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b],\ |x - c| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}.$$

En posant $\nu = \min(\eta, \dfrac{b-a}{2})$, l'un au moins des segments $[c-\nu, c]$ et $[c, c+\nu]$ est inclus dans $[a,b]$ et sur ce segment que l'on notera $[\alpha, \beta]$, on a $f \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{puisque les deux autres termes sont positifs} \\ &\geqslant (\beta-\alpha)\frac{f(c)}{2} > 0.\end{aligned}$$

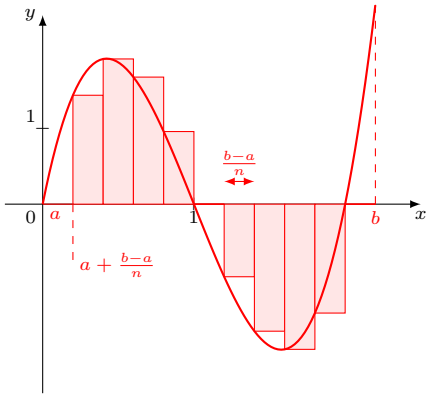
Ainsi l'intégrale de f est non nulle. Le théorème est démontré. □

17.3. Sommes de Riemann

Définition 17.21.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et n un entier strictement positif. Si on partage le segment $[a,b]$ en n intervalles de même longueur à l'aide de la subdivision $\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$, on appelle somme de Riemann correspondant à cette subdivision la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right).$$



Remarque 17.22.

i) On peut également choisir pour somme de Riemann la somme $S'_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$,

ce qui revient à choisir l'extrémité de droite de chacun des segments de longueur $\dfrac{b-a}{n}$ pour tracer les rectangles.

ii) Dans chaque cas, une somme de Riemann est l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Théorème 17.23.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a,b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a,b]$, autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour toute fonction f continue sur le segment $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 17.24. La convergence vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a lieu aussi pour la suite (S'_n).

Démonstration du théorème dans le cas particulier où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f\Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\,\mathrm{d}x$$

donc en utilisant ce qui précède et la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f\Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} \Big[f(x) \;-\; f\Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x\right| \qquad \text{(linéarité de l'intégrale).}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire puis la majoration classique de la valeur absolue d'une intégrale, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} \Big[f(x) \;-\; f\Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} \left|f(x) \;-\; f\Big(a+i\frac{b-a}{n}\Big)\right|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La fonction f' étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée sur ce segment et il existe donc $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leqslant M$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que $|f'| \leqslant M$ sur $]a,b[$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est $M-$lipschitzienne sur ce segment :

$$\forall x,y \in [a,b], \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

En particulier, on obtient que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et tout $x \in \left[a+i\;\frac{b-a}{n}, a+(i+1)\frac{b-a}{n}\right]$,

$$\left|f(x) \;-\; f\Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\right| \leqslant M\left|x \;-\; \Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\right| \leqslant M\;\frac{b-a}{n}$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} \left|f(x) \;-\; f\Big(a+i\frac{b-a}{n}\Big)\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} M\;\frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}x = M\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

Ainsi, on obtient

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

donc

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant M\;\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M\;\frac{(b-a)^2}{n} = 0$, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

□

Grâce aux sommes de Riemann, il est possible de calculer des valeurs approchées d'intégrales mais cette méthode n'est pas très performante (en termes de rapidité de convergence). Cependant, les sommes de Riemann sont utiles pour trouver la limite de certaines suites.

Exercice d'application 17.25. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}*}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}$.

↪ Pour ce genre d'exercice, il suffit de transformer l'expression de u_n pour l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\frac{i}{n}\Big) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

où f est une fonction continue. Ainsi on considère u_n comme une somme de Riemann de f entre 0 et 1.

17.4. Calcul intégral

17.4.1. Théorème fondamental de l'analyse

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.

Lemme 17.26.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ (où $a<b$) et $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$ sa valeur moyenne sur $[a,b]$. Il existe un réel $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\mu$.

Démonstration.

Sur le segment $[a,b]$, la fonction f est continue donc elle est bornée sur $[a,b]$ et $f([a,b]) = \big[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\big]$. On sait que $\inf\limits_{[a,b]} f \leqslant f \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$. Par croissance de l'intégrale sur $[a,b]$ et en divisant par le nombre positif $b-a$, on obtient

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \inf_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \sup_{[a,b]} f$$

c'est-à-dire $\inf\limits_{[a,b]} f \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$ donc $\mu\in f([a,b])$ et donc il existe un point $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\mu$. □

Théorème 17.27 - Théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$\forall x\in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration.
La fonction f étant continue sur I, la fonction F_a est bien définie sur I. Nous allons montrer que F_a est dérivable en tout point x de I et que $F_a'(x)=f(x)$.

Soit $x\in I$. Pour tout réel h non nul tel que $x+h\in I$, on a

$$\begin{aligned}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ce quotient est donc la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si $h < 0$).

Comme f est continue, cette valeur moyenne est atteinte en un point c_h compris entre x et $x+h$ et

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(c_h) \text{ avec } |c_h - x| \leqslant h.$$

Ainsi, lorsque h tend vers 0, c_h tend vers x et puisque f est continue en x, $f(c_h)$ tend vers $f(x)$. Par conséquent, la limite du quotient précédent existe et

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x).$$

On a démontré que F_a est dérivable en x de dérivée $F_a'(x) = f(x)$ donc F_a est une primitive de f sur I.

Il est clair que F_a s'annule en a. Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $G = F_a + C$. En particulier, on a $G(a) = C$, de sorte que G s'annule en a si, et seulement si, $C = 0$. Il en résulte que F_a est l'unique primitive de f qui s'annule en a. □

Corollaire 17.28.

1. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.
2. Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. Pour toute primitive F de f sur I,
$$\forall x \in I,\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.
1) Évident avec le théorème précédent. 2) D'après la preuve du théorème précédent, pour tout $x \in I$, $F(x) = F_a(x) + F(a)$, c'est-à-dire $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$ et le résultat en découle immédiatement.

3) C'est une conséquence du point précédent, f étant une primitive de f' sur I. □

Notation :

Dans un calcul d'intégrale, on utilise la notation $\big[F(t)\big]_a^b$ pour désigner la différence $F(b) - F(a)$. On écrit ainsi, si F est une primitive de f sur $[a, b]$: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment se ramène, à chaque fois que c'est possible, à la recherche d'une primitive de cette fonction. Dans certains cas, l'expression d'une primitive peut être très compliquée et il se peut aussi qu'une primitive ne puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles, il faut alors définir de nouvelles fonctions (cf. la définition du logarithme népérien).

17.4.2. Intégration par parties

Cette méthode est basée sur la dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Théorème 17.29 - Formule d'intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous a et b appartenant à I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration.
Démonstration faite en début d'année. □

La méthode d'intégration par parties est en général utile pour éliminer dans un produit une fonction qui n'est pas simple à primitiver (comme ln, Arcsin, Arctan ...) et dont la dérivée s'intègre plus aisément. Elle permet aussi de calculer des intégrales dépendant d'un paramètre par récurrence (par exemple les intégrales de Wallis, un classique : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$).

17.4.3. Changements de variables

Cette méthode est basée sur la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.

Théorème 17.30 - Formule de changement de variables.

Soit f une fonction continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J. Pour tous réels a et b éléments de I,

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration.
Démonstration faite en début d'année. □

17.5. Formules de Taylor

17.5.1. La formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 17.31 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n\in\mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Pour tous réels a et b dans I,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.
Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ la propriété : «pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et tous réels a et b dans I,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.»$$

• $\mathcal{H}_0$ est vraie : si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a déjà vu que $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout a et b dans I.

• Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et soit a et b deux réels dans I. La fonction f est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et l'on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On intègre par parties le terme complémentaire (la fonction $f^{(n+1)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I) :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et le résultat est démontré au rang $n+1$. □

Pour $a = 0$, on obtient la formule suivante :

Théorème 17.32 - Formule de Taylor avec reste intégral en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

$$\text{Pour tout } x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 17.33. En appliquant à la fonction cosinus la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, on obtient :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\, \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction sinus est positive sur $[0;\pi]$ et négative sur $[-\pi;0]$,

$$\forall x \in [-\pi;\pi],\ \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\, \sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

ce qui donne :

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\ \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.$$

17.5.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est exacte mais le reste intégral n'est pas très maniable. Or il nous suffit souvent de connaître une majoration du reste. C'est ce que donne l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 17.34 - Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a,b) \in I^2$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et b, alors

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)\right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration.
C'est un corollaire de la formule de Taylor avec reste intégral. Supposons que $a \leqslant b$. Si l'on applique cette formule à f sur I, on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big| &= \Big|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= M\Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_a^b \\ &= M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Le cas où $b \leqslant a$ se démontre de façon similaire. □

Remarque 17.35. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment dans le théorème précédent, l'existence de M est assurée. On peut choisir en particulier $M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Théorème 17.36 - Inégalité de Taylor-Lagrange en 0.

Soit I un intervalle contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $x \in I$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités 0 et x, alors

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\Big| \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque technique 17.37.

On peut utiliser ce théorème pour obtenir des majorations ou des convergences de suites.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Big|\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}\Big| \leqslant \dfrac{x^4}{24}$ puisque : $\forall u \in \mathbf{R}, \ |\sin^{(4)}(u)| = |\sin(u)| \leqslant 1.$
2. Montrons que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre en 0. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}&\text{si } x \geqslant 0 \qquad \forall y \in [0,x], \quad |\exp^{(n+1)}(y)| = |\mathrm{e}^y| \leqslant \mathrm{e}^x \\ &\text{si } x \leqslant 0 \qquad \forall y \in [x,0], \quad |\exp^{(n+1)}(y)| = |\mathrm{e}^y| \leqslant 1\end{aligned}$$

Dans tous les cas, en notant I_x le segment d'extrémités 0 et x, on a : $\forall y \in I_x, \ |\exp^{(n+1)}(y)| \leqslant M$ où $M = \max(\mathrm{e}^x, 1)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne donc pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\Big|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0)\Big| = \Big|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\Big| \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ d'où le résultat.

17.5.3. Formule de Taylor-Young

Théorème 17.38 - Formule de Taylor-Young.

Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction réelle définie sur I.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors il existe une fonction ε définie sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Autrement dit

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

ou encore

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Si $a = 0$, on obtient

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Remarque 17.39. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors ce théorème est une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Démonstration.

- Pour $n = 0$, il suffit de poser $\varepsilon = f - f(a)$ qui tend vers 0 en a puisque f est continue en a.
- Soit $n \geqslant 1$. Notons

$$\forall x \in I \backslash \{a\}, \qquad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(a) = 0.$$

Il suffit de montrer que ε tend vers 0 en a.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, on peut lui appliquer la formule de Taylor reste intégral en a à l'ordre $n-1$: pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne en posant le changement de variable $t = a + u(x-a)$ dans l'intégrale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a + u(x-a))\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a))\,\mathrm{d}u - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a))\,\mathrm{d}u - \frac{1}{n}f^{(n)}(a)\right]\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+u(x-a))\,\mathrm{d}u - f^{(n)}(a)\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\left[f^{(n)}(a+u(x-a)) - f^{(n)}(a)\right]\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et donc en particulier

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\left|f^{(n)}(a+u(x-a)) - f^{(n)}(a)\right|\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\alpha > 0$. La fonction $f^{(n)}$ est continue en a, il existe donc un nombre réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)| \leqslant \alpha.$$

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. Alors $\forall u \in [0,1],\ |a+u(x-a)-a| = u|x-a| \leqslant |x-a| \leqslant \eta$ et donc

$$\forall u \in [0,1], \qquad |f^{(n)}(a+u(x-a)) - f^{(n)}(a)| \leqslant \alpha.$$

Ainsi,

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\alpha\,\mathrm{d}u = \frac{\alpha}{n!} \leqslant \alpha.$$

On vient de montrer que

$$\forall x \in I, \qquad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leqslant \alpha$$

(puisque si $x = a$, alors $\varepsilon(x) = 0$) autrement dit, ε tend vers 0 en a.

□

17.6. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment

Définition 17.40.

Soit $f = \mathfrak{Re}(f) + i\,\mathfrak{Im}(f)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a,b]$. On définit l'**intégrale** de f sur $[a,b]$ comme étant le nombre complexe défini par

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}(f) + i\int_{[a,b]} \mathfrak{Im}(f).$$

Toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles, qui ne font pas intervenir la relation d'ordre de $\mathbf{R}$ restent vraies pour l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, en particulier les propriétés de linéarité et d'additivité des intervalles. Par contre la propriété de croissance n'a aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes.

On a tout de même le résultat suivant :

Théorème 17.41.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a,b]$. On a

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|,$$

autrement dit, le module de l'intégrale est inférieur ou égal à l'intégrale du module.

Démonstration.
Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a,b]$.

Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, le résultat est évident. On suppose maintenant que cette intégrale n'est pas nulle.

On écrit l'intégrale de f sous forme trigonométrique : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ de sorte que $\displaystyle r = \left|\int_{[a,b]} f\right|$.

On considère maintenant la fonction g définie par $g = \mathrm{e}^{-i\theta} f$. Par la propriété de linéarité de l'intégrale,

$$\int_{[a,b]} g = e^{-i\theta} \int_{[a,b]} f = r.$$

Et donc l'intégrale de g est un nombre réel. Par ailleurs, on a

$$\int_{[a,b]} g = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}(g) + i \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}(g),$$

et par unicité des parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe, on en déduit que

$$\int_{[a,b]} \mathfrak{Re}(g) = r \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}(g) = 0.$$

On peut maintenant majorer l'intégrale de la fonction réelle $\mathfrak{Re}(g)$:

$$r = \left|\int_{[a,b]} \mathfrak{Re}(g)\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\,\mathfrak{Re}(g)|.$$

Comme $|\,\mathfrak{Re}(g)| \leqslant |g| = |f|$, on obtient par la propriété de croissance de l'intégrale d'une fonction réelle

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

□

Définition 17.42.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction à valeurs complexes est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I si ses parties réelles et imaginaires le sont.

Théorème 17.43.

Soit u et v deux fonctions à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous a et b appartenant à I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 17.44.

Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur un intervalle J non vide et non réduit à un point à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J (φ **est donc une fonction à valeurs réelles !**). Pour tous réels a et b éléments de I,

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Théorème 17.45 - Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n\in\mathbf{N}$ et f une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Pour tous réels a et b dans I,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Chapitre 18

Développements limités

Cela peut sembler un paradoxe, mais toutes les sciences exactes sont dominées par l'idée de l'approximation.

Bertrand Russell

Dans ce chapitre, nous allons voir comment approcher localement une fonction par des fonctions polynomiales. Cette approximation locale permet l'étude locale du graphe d'une fonction (tangentes et asymptotes en particulier). C'est aussi un outil pratique pour obtenir des équivalents et calculer des limites.

Dans ce chapitre D désigne une partie de $\mathbf{R}$ de la forme $D = I$ ou bien $D = I\backslash\{\alpha\}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point et α est un point de I ou une de ses extrémités. De plus, n désignera un entier naturel. Enfin, $\mathbf{K}$ désignera le corps des réels $\mathbf{R}$ ou celui des complexes $\mathbf{C}$.

18.1. Définition et premières propriétés

Définition 18.1.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait

$$f(x) \underset{x\to a}{=} P_n(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P_n(h) + \mathrm{o}(h^n)$$

ou encore, en notant $P_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^k\big)\,.$$

Le polynôme P_n est appelé **partie principale** ou **régulière** du développement limité.

On notera de manière abrégée f a un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Remarque 18.2.

1. Dans ces formules, il ne faut surtout pas développer les puissances de $x-a$, car elles sont intéressantes à considérer lorsque l'on se situe au voisinage de a.
2. En posant $g(h)=f(a+h)$, on peut toujours se ramener à un développement limité en 0, et dans la suite du cours, on ne considérera que des développements limités au voisinage de 0.
3. Désormais, lorsqu'on parlera du développement limité en 0 (respectivement en a) d'une fonction f définie sur D, cela signifiera implicitement que 0 (respectivement a) est un point ou une extrémité de D.
4. Quand on écrit un développement limité, le degré maximal des monômes qui apparaît avant $\mathrm{o}((x-a)^n)$ est inférieur ou égal n. Un écriture comme
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^3+x^4+\mathrm{o}\big(x^3\big)$$
n'est pas un développement limité. Puisque $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^3\big)$, on peut écrire
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^3+\mathrm{o}\big(x^3\big)$$
et l'on a maintenant un développement limité à l'ordre 3.
5. L'ordre d'un développement limité est l'exposant qui apparaît dans $\mathrm{o}((x-a)^n)$. Par exemple, le développement limité
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^4+\mathrm{o}\big(x^6\big)$$
est un développement limité à l'ordre 6 et pas à l'ordre 4. Nous verrons que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+3x^2+x^4+\mathrm{o}\big(x^4\big)$ est vrai aussi, mais moins précis.

Exemple 18.3. La fonction $f : \begin{array}{ccc}]-1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x-x^2+x^3\ln(1+x)+2x^4 \end{array}$ a un $\mathrm{DL}_4(0)$. En effet, si $x>-1$,
$$f(x)-(x-x^2)=x^3\ln(1+x)+2x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)\,.$$
En effet, il est clair que $2x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)$ et $x^3\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$, d'où $x^3\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)$. Ainsi,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x-x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)\,.$$

◇◇

Remarque technique 18.4. Les fonctions polynomiales admettent des développements limites à tous les ordres.

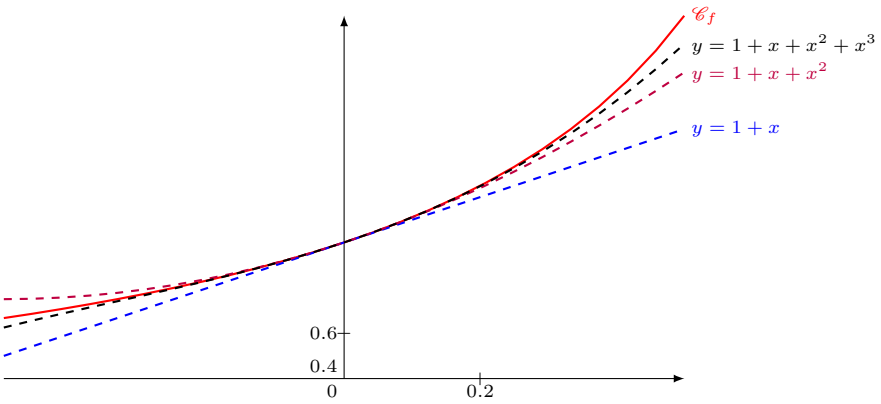
Exercice d'application 18.5. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ et le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^4$.

↪ On a
$$(1+x)^4 \underset{x\to 0}{=} 1+4x+6x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)$$
et
$$(1+x)^4 \underset{x\to 0}{=} 1+4x+6x^2+4x^3+x^4+\mathrm{o}\big(x^7\big)\,.$$

◇◇

Exercice d'application 18.6. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}$. Montrer que f a un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

↪ Soit $n\in\mathbf{N}$. Soit $x\in\mathbf{R}\backslash\{1\}$.
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x}x^n$$
Or $\dfrac{x}{1-x}x^n \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$, d'où
$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k+\mathrm{o}(x^n)}$$



Complément : notons qu'en remplaçant x par $-x$ dans la formule précédente, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

⚠ **Attention** ⚠**.** Deux fonctions admettant les mêmes développements limités à tous les ordres en un point peuvent être différentes au voisinage de ce point.

Par exemple, considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$.

$$\frac{f(x)}{x^n} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{n}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)\,.$$

La fonction f admet les mêmes développements limités que la fonction nulle (en effet pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 = \mathrm{o}(x^n)$) et bien sûr f n'est pas la fonction nulle.

Un développement limité n'est donc qu'une propriété *locale* : une fonction possède un unique développement limité à l'ordre n en un point mais les développements limités à tous les ordres en un point d'une fonction ne suffisent pas pour la caractériser entièrement.

Proposition 18.7.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$. On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

1. La partie régulière de ce développement limité est unique.
2. f admet aussi un $\mathrm{DL}_p(a)$ pour tout entier naturel $p \leqslant n$. De plus, la partie principale est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à p de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ (on parle de **troncature** à l'ordre p).

Démonstration. 1. Suppose par l'absurde qu'il existe deux $(n+1)$-uplets $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$ différents tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

Notons p le plus petit indice de $[\![0,n]\!]$ tels que $a_p \neq b_p$. En faisant la différence de ces deux développements limités, on obtient, puisque les p premiers coefficients sont égaux,

$$(a_p - b_p)(x-a)^p + \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}((x-a)^n)$$

et, en divisant le tout par $(x-a)^p$, on obtient qu'il existe $\varepsilon \in \mathcal{F}(D,\mathbf{K})$ qui tend vers 0 en a telle que

$$\forall x \in \mathbf{D}\backslash\{a\}, \quad b_p = a_p + \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k)x^{k-p} + (x-a)^{n-p}\varepsilon(x).$$

Lorsqu'on prend la limite en a, on obtient $a_p = b_p$ ce qui contredit la minimalité de p.

2. Immédiat en observant que pour tout $j \in [\![p+1,n]\!]$, $(x-a)^j = \mathrm{o}((x-a)^p)$. □

Exercice d'application 18.8. Déterminer la troncature à l'ordre 4 du développement limite $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2x^4 + x^5 + \mathrm{o}\big(x^6\big)$

↪ On a immédiatement $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2x^4 + \mathrm{o}\big(x^4\big)$.

Définition 18.9.

Soit $f \in \mathcal{F}(D,\mathbf{K})$. On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière non nulle :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

Notons p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. On appelle **forme normalisée** de ce développement limité le développement

$$f(x) = (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-p} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n-p}\big)\right),$$

i.e.

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p \left(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + \mathrm{o}\big(h^{n-p}\big)\right).$$

Proposition 18.10.

Soit $f \in \mathcal{F}(D,\mathbf{K})$ dont la forme normale du développement limité à l'ordre n en a est :

$$f(x) = (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-p} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n-p}\big)\right)$$

(donc $a_p \neq 0$). Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

Démonstration.
En tronquant à l'ordre p, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \mathrm{o}((x-a)^p)$, d'où $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \mathrm{o}(a_p(x-a)^p)$ puis $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$. □

Corollaire 18.11.

Soit $f \in \mathcal{F}(D,\mathbf{K})$ dont la forme normale du développement limité à l'ordre n en a est :

$$f(x) = (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-p} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n-p}\big)\right)$$

(donc $a_p \neq 0$). Alors $f(x)$ est du même signe que $a_p(x-a)^p$ si x est au voisinage de a.

Démonstration.
Immédiat en utilisant le signe local d'un équivalent. □

Sous les mêmes hypothèses que la proposition, la fonction $x \longmapsto f(x) - a_p(x-a)^p$ possède un DL à l'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x\to a}{=} a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)\,.$$

Si la partie régulière de celui-ci n'est pas nulle et possède pour forme normalisée

$$f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x\to a}{=} (x-a)^q\left(a_q + a_{q+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-q} + \mathrm{o}\big(x^{n-q}\big)\right),$$

où $a_q \neq 0$, on obtient l'équivalent $f(x) - a_p(x-a)^p \underset{x\to 0}{\sim} a_q(x-a)^q$.

Proposition 18.12.

Supposons que f a un $\mathrm{DL}_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire), son développement limité ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration.
Soit f une fonction paire admettant un développement limité à l'ordre n en 0. On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)\,.$$

Par unicité du développement limité, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = (-1)^k a_k$. Ce qui montre que les coefficients des puissances impaires sont nuls. La démonstration est similaire pour une fonction impaire. □

Remarque 18.13. Cette proposition n'admet pas de réciproque : une fonction qui admet des développements limités paires en 0 à tout ordre n'est pas nécessairement paire. Un développement limité est une propriété locale et on ne peut pas déduire des développements limités des propriétés globales sur les fonctions.

18.2. Existence d'un développement limité

18.2.1. Régularité et développement limité

Proposition 18.14.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbf{K})$.

1. f a un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a. Le cas échéant,
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)\,.$$
2. f a un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a. Le cas échéant,
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)\,.$$

Démonstration. 1. Supposons que f a un $\mathrm{DL}_0(a)$, qu'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + \mathrm{o}(1)$. Par définition du petit o, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_0$, donc f est continue en a et $a_0 = f(a)$.
Réciproquement, supposons que f est continue en a. Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, puis $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.

2. Voir cours de dérivation. □

Exemple 18.15. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x)$, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \mathrm{o}(x)$.

Remarque 18.16. Si f est une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$ admettant un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)\,,$$

alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- le prolongement par continuité de f en a est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$.

Exercice d'application 18.17. Etudier $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ au voisinage de 0. On admettra que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\big(x^2\big)$.

↪ On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$, donc f a un $\mathrm{DL}_1(0)$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

⚠ **Attention** ⚠**.** Ce résultat ne se généralise pas pour des développements limités d'ordre supérieur.

Exemple 18.18. Considérons $f : x \longmapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbf{R}^\star$.

- f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. En effet, sin est bornée et donc $f(x) = x^2\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^2\big)$, donc $f(x) = \mathrm{o}\big(x^2\big)$.
- f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (cf. Remarque 18.16).
- f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et sur $\mathbf{R}_-^\star$, avec pour tout $n \neq 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

- f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (cf. Remarque 18.16 ou le théorème de la limite de la dérivée).
- Par contre, f n'est pas deux fois dérivable en 0, car

$$\frac{f'(x) - f(0)}{x - 0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

n'a pas de limite en 0.

18.2.2. Formule de Taylor-Young

Théorème 18.19 - Formule de Taylor-Young.

Soit $f \in \mathscr{C}^n(D, \mathbf{K})$. Alors f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

ou encore

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \mathrm{o}(h^n)\,.$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ est appelé **polynôme de Taylor** de f en a à l'ordre n.

Ainsi une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ admet donc un DL_p ($p \leqslant n$) en tout point de son domaine de définition, de partie principale son polynôme de Taylor.

⚠ **Attention ⚠.** f peut posséder un $\mathrm{DL}_n(a)$ sans que le k-ième coefficient de sa partie principale soit $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ (pour $k \geqslant 2$) : cf. Exercice d'application 18.18.

Exemple 18.20. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et elle est égale à ses dérivées successives et en particulier pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$. Elle admet ainsi un développement limité en 0 de tout ordre, donné à l'ordre n par :

$$\boxed{\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)}$$

Exemple 18.21. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Il s'ensuit

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

18.3. Développements limites usuels

On donne ici les développements limités usuels en 0. Certains sont déjà démontrés, les autres le seront dans la suite de ce chapitre. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n, p \in \mathbf{N}$.

1. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$
2. $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$
3. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$
4. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$
5. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$
6. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$
7. $\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \mathrm{o}(x^n)\end{aligned}$

Exercice d'application 18.22. Donner les $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

↪ Il suffit de considérer le dernier DL usuel avec $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\alpha = -\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathrm{o}\big(x^3\big) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,.$$

18.4. Opérations sur les développements limités

18.4.1. Développement limité d'une combinaison linéaire

Proposition 18.23.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f+g$ est la somme des parties régulières des DL l'ordre n en 0 de f et g.

Démonstration.
Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g en introduisant ε_1 et ε_2 deux fonctions qui tendent vers 0 en 0 :

$$\forall x \in D\setminus\{0\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x).$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$\forall x \in \mathbf{D}\setminus\{0\}, \quad (f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + x^2(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)),$$

puis, comme $\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

□

Proposition 18.24.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}^\star$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors λf admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est le produit de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f multipliée par λ.

Démonstration.
Sous les hypothèses de la proposition, on écrit le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f en introduisant ε une fonction qui tend vers 0 en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{D}\setminus\{0\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{D}\setminus\{0\}, \quad \lambda f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \lambda x^n \varepsilon(x).$$

On conclut en remarquant que $\lambda\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. □

Exemple 18.25. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$. On a

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + \mathrm{o}\big((-x)^{2n}\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$$

d'où

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$$

Or ch est une fonction paire. On en déduit que les coefficients de sa partie régulière sont tous pairs, puis

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)}$$

De même, on montre que

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)}$$

Exercice d'application 18.26. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\mathrm{sh} - \sin$.

↪ On a

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}\big(x^6\big) \quad \text{et} \quad -\sin(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}\big(x^6\big)$$

donc

$$\mathrm{sh}(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\big(x^6\big)\,.$$

Remarque 18.27. Si f admet un DL à l'ordre n et si g admet un DL à l'ordre p, alors en faisant la somme des développement limités de f et g, on ne peut obtenir qu'un DL à l'ordre $\min(n,p)$ de $f+g$.

18.4.2. Développement limité d'un produit

Proposition 18.28.

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.
La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f \times g$ est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et g.

Démonstration.
Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g en introduisant $P_n, Q_n \in \mathbf{K}_n[X]$, ε_1 et ε_2 deux fonctions qui tendent vers 0 en 0 :

$$\forall x \in D\backslash\{0\}\,, \quad f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x).$$

Dans le produit P_nQ_n, isolons les termes de degré inférieur ou égal à n : $P_nQ_n = R_n + X^{n+1}S_n$ avec $(R_n, S_n) \in \mathbf{K}_n[X] \times \mathbf{K}[X]$. Alors, en multipliant les deux égalités précédentes traduisant les DL, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbf{D}\backslash\{0\}\,, \quad (fg)(x) & = & P_n(x)Q_n(x) + x^n(P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \\ & = & R_n(x) + x^n(xS_n(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \end{array}.$$

Puisque $xS_n(x)+P_n(x)\varepsilon_2(x)+Q_n(x)\varepsilon_1(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ceci montre que fg a un $DL_n(0)$. □

Exercice d'application 18.29. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \mathrm{e}^x(1+\sin(x))$:

↪

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x(1+\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\Big)\Big(1 + x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\Big) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big) \end{aligned}$$

Exercice d'application 18.30. Déterminer le

1. $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$.
2. $DL_6(0)$ de $\cos^2$.
3. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)\sqrt{1+x}$.
4. $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$.
5. $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{1-x}}$.

$\hookrightarrow$

1. $\cos(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)+\mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{2x^3}{3}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$.
2. $\cos^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}\right)^2+\mathrm{o}\big(x^6\big) \underset{x\to 0}{=} 1-x^2+\dfrac{x^4}{3}-\dfrac{2x^6}{45}+\mathrm{o}\big(x^6\big)$.
3. $\cos(x)\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} \left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\right)+\mathrm{o}\big(x^2\big) \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{5x^2}{8}+\mathrm{o}\big(x^2\big)$.
4. $\ln(1+x)\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)\left(1+x+x^2+x^3\right)+\mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^3}{6}+\mathrm{o}\big(x^3\big)$.
5. $\sin(x)\,\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)\left(x+\dfrac{x^3}{6}\right)+\mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} x^2+\mathrm{o}\big(x^3\big)$ donc

$$\frac{\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{16}\right)+\mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} x^2+\frac{x^3}{2}+\mathrm{o}\big(x^3\big).$$

Notons que dans ce dernier développement, le développement $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x}{2}+\mathrm{o}(x)$ aurait suffi pour conclure.

Remarque 18.31. Si on multiplie (ou divise) un DL en 0 par x^p, le $\mathrm{o}(x^n)$ devient $\mathrm{o}(x^{n+p})$ (ou $\mathrm{o}(x^{n-p})$). En revanche, si on multiplie un DL à l'ordre p par un DL à l'ordre n, la précision finale est $\min(n,p)$.

Remarque technique 18.32. D'après la proposition précédente, il suffit de connaître un DL à l'ordre n en 0 de f et de g pour obtenir un DL à l'ordre n en 0 du produit $f\times g$. Mais ce n'est pas une condition nécessaire : il est parfois inutile de «pousser» les DL de f et g jusqu'à l'ordre n pour obtenir un DL à l'ordre n de $f\times g$, on peut parfois développer f et/ou g à un ordre plus petit (cf exemple suivant).

Exercice d'application 18.33. Développer à l'ordre 4 en 0 la fonction $x \longmapsto (\cos(x)-1)\ln(1+x)$.

$\hookrightarrow$

- Sans optimisation : on écrit les DL à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \cos(x)-1$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

  $$\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\mathrm{o}\big(x^4\big) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+-\frac{1}{4}x^4+\mathrm{o}\big(x^4\big).$$

  On effectue le produit de ces deux DL en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 4, et on obtient

  $$(\cos(x)-1)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\mathrm{o}\big(x^4\big).$$

  Ce faisant, on constate que les termes $\dfrac{1}{4!}x^4$ du DL de $x \longmapsto \cos(x)-1$ et $\dfrac{1}{3}x^3$ et $\dfrac{1}{4}x^4$ du DL de $x \longmapsto \ln(1+x)$ n'ont été été d'aucune utilité, car dans le produit, il sont multipliés par des monômes de puissances suffisamment élevées pour n'engendrer que des termes négligeables devant x^3.
- En optimisant : On se contente d'écrire un DL à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \cos(x)-1$ et un DL à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \ln(1+x)$. Le produit

  $$(\cos(x)-1)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\big(x^3\big)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\big(x^2\big)\right)$$

  va bien donner un calcul suffisamment précis pour obtenir un DL à l'ordre 4 valide pour ce produit :

- le $\mathrm{o}(x^3)$ du premier facteur est multiplié « au minimum » par x et donne un $o(x^4)$;
- le $\mathrm{o}(x^2)$ du deuxième facteur est multiplié « au minimum » par x^2 et donne un $o(x^4)$.

◇◇

Ainsi, si on connaît les formes normalisées des DL de f et g aux ordres respectifs r et s :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_r x^{r-p} + \mathrm{o}(x^{r-p})) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_r x^r + \mathrm{o}(x^r) \quad (\text{avec } a_p \neq 0)$$

et

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} x^q(b_q + b_{q+1}x + \cdots + b_s x^{s-q} + \mathrm{o}(x^{s-q})) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + b_{q+1}x^{q+1} + \cdots + b_s x^s + \mathrm{o}(x^s)\,. \ (\text{avec } b_q \neq 0),$$

alors la précision maximale que l'on peut obtenir en développant le produit est limitée par les deux produits

$$a_p x^p \mathrm{o}(x^s) = \mathrm{o}(x^{s+p}) \qquad \text{et} \qquad b_q x^q \mathrm{o}(x^r) = \mathrm{o}(x^{r+q})\,.$$

En multipliant ces deux DL, on ne peut obtenir au mieux qu'un DL à l'ordre $\min(s+p, r+q)$.

◇◇

Remarque technique 18.34. Soit n, p et q trois entiers naturels tels que $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

- Si le premier terme du développement limité en 0 de f à un ordre supérieur ou égal à p commence par $a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$,
- et si le premier terme du développement limité en 0 de g à un ordre supérieur ou égal à q commence par $b_q x^q$ avec $b_q \neq 0$,

alors, pour obtenir un développement limité en 0 du produit $f \times g$, il suffit d'écrire un DL de f en 0 à l'ordre $n-q$ et un DL de g en 0 à l'ordre $n-p$.

◇◇

18.4.3. Développement limité d'une fonction composée

Proposition 18.35.

Soit I, J deux intervalles. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbf{K})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(I) \subset J$. Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières P et Q resp., alors $g \circ f$ a un $\mathrm{DL}_n(0)$. Sa partie régulière s'obtient en tronquant $Q \circ P$ à l'ordre n.

Exemple 18.36. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \mathrm{ch}(ix)$ et on a montré que

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

Donc

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})}$$

De même, en utilisant $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i}$, on obtient

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}$$

Exercice d'application 18.37. Calculer le

1. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+2x}$.
2. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+2x-x^2)$.
3. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$.
4. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sin(\mathrm{sh}(x))$.
5. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{3+\sqrt{1+2x}}$.

$\hookrightarrow$

1. Puisque $\lim_{x\to 0} 2x = 0$, on a

$$\sqrt{1+2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,.$$

2. Puisque $\lim_{x\to 0} 2x - x^2 = 0$, on a

$$\begin{aligned} \ln(1+2x-x^2) &\underset{x\to 0}{=} (2x-x^2) - \frac{(2x-x^2)^2}{2} + \frac{(2x-x^2)^3}{3} - \frac{(2x-x^2)^4}{4} + \mathrm{o}\big(x^4\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2x - 3x^2 + \frac{14x^3}{3} - \frac{17x^4}{2} + \mathrm{o}\big(x^4\big)\,. \end{aligned}$$

3. Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$ et $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,. \end{aligned}$$

4. Puisque $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$, on a :

$$\sin(\mathrm{sh}(x)) \underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,.$$

5. On a $\sqrt{1+2x} \underset{x\to 0}{=} 4 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$, d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{3+\sqrt{1+2x}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{4 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}\big(x^3\big)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 2\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} + \mathrm{o}\big(x^3\big)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}\right)^3\right) + \mathrm{o}\big(x^3\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x}{4} - \frac{9}{64}x^2 + \frac{73}{512}x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,. \end{aligned}$$

◇◇

Remarque technique 18.38. Avec les notations de la proposition, si on veut un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g \circ f$, on n'est pas toujours obligé d'utiliser un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g ou de f.

Exercice d'application 18.39. Calculer le

1. $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$.
2. $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \longmapsto \sin(x^2)$.
3. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^x$.

$\hookrightarrow$

1. $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathrm{o}\big(x^5\big)$.
2. $\sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}\big(x^6\big)$.

3. Puisque $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o\big(x^4\big)$ et $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$,

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}(x^2)^2 + o\big(x^4\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + o\big(x^4\big)\,.$$

Remarque technique 18.40. Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \longmapsto \exp(C + a_1x + a_2x^2 + \dots),$$

on utilise la propriété algébrique de l'exponentielle suivante : $f(x) = \exp(C)\exp(a_1x + a_2x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 18.41. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto e^{\cos(x)}$.

↪ On a $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^4\big)$ et $e^{x+1} \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o\big(x^2\big)$. Ainsi,

$$e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right) + o\big(x^4\big) \underset{x\to 0}{=} e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o\big(x^4\big)\,.$$

Remarque technique 18.42. Pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction de la forme

$$f : x \longmapsto \ln(C + a_1x + a_2x^2 + \dots),$$

où $C \neq 0$, on utilise la propriété algébrique suivante : $f(x) = \ln(C) + \ln(1 + \frac{a_1}{C}x + \frac{a_2}{C}x^2 + \dots)$.

Exercice d'application 18.43. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(\cos(x))$.

↪ On a $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^4\big)$ et $\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$. Ainsi,

$$\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\big(x^4\big) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\big(x^4\big)\,.$$

18.4.4. Développement limité d'un quotient

Proposition 18.44.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Si u est une fonction définie sur D, possédant un développement limité à l'ordre n en 0, telle que $\lim\limits_0 u = 0$, alors la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-u(x)}$ possède un développement limité à l'ordre n en 0. Plus précisément, si le DL de à l'ordre n en 0 est

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)\,,$$

alors le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est obtenu en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n dans les développements des $\big(u(x)\big)^k$ (où $k \in [\![2, n]\!]$) dans l'égalité

$$\frac{1}{1-u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + u(x) + \big(u(x)\big)^2 + \dots + \big(u(x)\big)^n + o(x^n)\,.$$

Démonstration.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ est la composée des fonctions $h \longmapsto \dfrac{1}{1-h}$ et u, et le DL à l'ordre n de $h \longmapsto \dfrac{1}{1-h}$ est

$$\frac{1}{1-h} \underset{x\to 0}{=} 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + \mathrm{o}(h^n)\,.$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat du paragraphe précédent sur les DL des composées de fonctions. □

Exemple 18.45. $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8}\right) + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.

Exercice d'application 18.46. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-\sin(x)}$.

↪ On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$. Il s'ensuit

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x^2 + x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,.$$

Proposition 18.47.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et ayant une limite finie ℓ non nulle en 0.
Si f a un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en va de même pour $\dfrac{1}{f}$.

Démonstration.
Il suffit d'écrire que pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1 - \frac{\ell - f(x)}{\ell}}$$

et la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\ell - f(x)}{\ell}$ tend vers 0 en 0 et possède un DL à l'ordre n en 0. Il ne reste plus qu'à développer $x \longmapsto \dfrac{1}{1-g(x)}$. □

Exercice d'application 18.48. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x) + \exp(x)}$.

↪ On a $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) + \mathrm{e}^x - 2 + 2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 + \frac{\cos(x) + \mathrm{e}^x - 2}{2}}$. Or $\dfrac{\cos(x) + \mathrm{e}^x - 2}{2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{12} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$, donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3\right) + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,.$$

Proposition 18.49.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant 0 et admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Si g possède une limite finie non nulle en 0, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en 0.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ et d'appliquer les résultats précédents. □

Exercice d'application 18.50. Déterminer le $DL_5(0)$ de tan.

$\hookrightarrow$

On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, donc un $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\cos}$ suffira pour conclure. On a $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$, d'où

$$\frac{1}{(\cos(x)-1)+1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\,.$$

Ainsi,

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5\right) + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\,.$$

◇◇

Remarque technique 18.51. Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, il se peut que $\frac{f}{g}$ admette tout de même un DL en a (il faut bien sûr que f ait également une limite nulle en 0) : il faut passer par la forme normalisée des DL de f et g pour le savoir.

On écrit un *DL* de f et de g à des ordres respectifs n_1 et n_2 sous forme normalisée :

$$f(x) = x^{p_1}(a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o_{x\to 0}(x^{n_1-p_1})) \quad \text{avec } a_{p_1} \neq 0$$

$$g(x) = x^{p_2}(b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o_{x\to 0}(x^{n_2-p_2})) \quad \text{avec } b_{p_2} \neq 0.$$

Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p_1-p_2}\underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o_{x\to 0}(x^{n_1-p_1})}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o_{x\to 0}(x^{n_2-p_2})}\right)}_{=h(x)}$$

Comme a_{p_1} et b_{p_2} sont non nuls, d'après ce qui précède, h possède un DL en 0 d'ordre $m = \min(n_1 - p_1, n_2 - p_2)$ dont le terme constant n'est pas nul.

Si l'exposant $p_1 - p_2$ devant la fraction est strictement négatif, alors $\dfrac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0 donc ne possède pas de développement limité en 0. Si cet exposant est positif ou nul, en développant la fonction h à l'ordre m, on obtient un développement limité du quotient $\dfrac{f}{g}$ à l'ordre $n = m + p_1 - p_2$.

Si l'on a le choix des valeurs de n_1 et n_2 (par exemple si f et g possèdent un DL à tout ordre en 0), il faut prévoir ces valeurs en fonction de l'ordre n auquel on désire développer la fonction $\dfrac{f}{g}$.

Exercice d'application 18.52. Calculer, s'il existe, le $DL_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

$\hookrightarrow$ *Recherche des ordres des DL à choisir, au brouillon.*

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots} = \frac{x^2(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots)}{x(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots)} = x\underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots}\right)}_{=h(x)}.$$

Pour obtenir le $DL_3(0)$ de f, il faut donc le $DL_2(0)$ de h, ce qui nécessite un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur de h. Cela nécessite donc un $DL_4(0)$ de $x \longmapsto e^x - 1 - x$ (on a factorisé par x^2) et un $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$ (on a factorisé par x).

Rédaction.

$$e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

ou sous forme normalisée :

$$e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{=} x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right).$$

Or,

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right) + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

18.4.5. Intégration d'un développement limité

Théorème 18.53.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f possède un développement limité en 0 à l'ordre n,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0 et F une primitive de f. On suppose que f possède un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Considérons la fonction définie sur I par

$$\varphi : x \longmapsto F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Montrons que $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$. La fonction φ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$$

ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi'(x)}{x^n} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. La limite précédente assure qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\varphi'(x)| \leqslant \varepsilon |x|^n.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x| \leqslant \alpha$. Pour tout réel t compris entre 0 et x, on a $|\varphi'(t)| \leqslant \varepsilon |t|^n \leqslant \varepsilon |x|^n$.

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ ce qui nous donne

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon|x|^n|x-0| = \varepsilon|x|^{n+1}.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc $|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon|x|^{n+1}$. On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I, \quad |x| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon|x|^{n+1},$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = 0$ ce qui signifie exactement que $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\big(x^{n+1}\big)$. □

Remarque 18.54. Le résultat reste valable pour un développement limité en a avec

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathrm{o}(h^n), \qquad F(a+h) \underset{h\to 0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big(h^{n+1}\big).$$

⚠ **Attention** ⚠**.** La réciproque de ce théorème est fausse : si une fonction dérivable f admet un développement limité à l'ordre n en a, sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$ en a.

Exemple 18.55. La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a montré précédemment que $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ donc, en intégrant,

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\big(x^{n+1}\big) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{o}\big(x^{n+1}\big) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p + \mathrm{o}\big(x^{n+1}\big)
\end{aligned}$$

et donc, en tronquant le développement limité précédent à l'ordre n :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)}$$

Exercice d'application 18.56. Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de

1. Arctan
2. Arcsin
3. Arccos

↪

1. On a $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \mathrm{o}\big(x^5\big)$ d'où $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \mathrm{o}\big(x^6\big)$.
2. On a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + \mathrm{o}\big(x^5\big)$ donc $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \mathrm{o}\big(x^6\big)$.
3. On a $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} -1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x^4}{8} + \mathrm{o}\big(x^5\big)$ donc $\mathrm{Arccos}(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + \mathrm{o}\big(x^6\big)$.

18.5. Applications des développements limités

18.5.1. Recherche d'équivalents et calcul de limites

On utilise la Proposition 18.10.

Exercice d'application 18.57. Chercher un équivalent en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1$ et en déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$

$\hookrightarrow$ On a

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\big(x^3\big) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-x} \underset{x\to O}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o\big(x^3\big)$$

donc

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{8}x^3 + o\big(x^3\big)$$

d'où

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{8}x^2 + o\big(x^2\big)$$

et donc

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{8}x^2 = o\big(x^2\big) \quad \text{puis} \quad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{8}x^2.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2} = \frac{1}{8}.$$

Exercice d'application 18.58. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}$.

$\hookrightarrow$ On a

$$\sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)$$

et

$$\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - x\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)$$

Finalement,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{-x^3}{3}} \underset{x\to 0}{\sim} -1$$

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

Exercice d'application 18.59. Donner un équivalent simple de $f : x \longmapsto x(1+\cos(x)) - 2\tan(x)$ en 0.

$\hookrightarrow$ On a

$$x(1+\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{x^3}{2} + o\big(x^3\big) \quad \text{et} \quad 2\tan(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{2x^3}{3} + o\big(x^3\big)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{7x^3}{6} + o\big(x^3\big)$$

et ainsi $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{7x^3}{6}$.

Exercice d'application 18.60. Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$f : x \longmapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}.$$

↪ Pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2(1+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

On a

$$\frac{1+u}{1+u^2} \underset{u\to 0}{=} (1+u)(1-u^2) + \mathrm{o}(u^2) \underset{u\to 0}{=} 1 + u - u^2 + \mathrm{o}(u^2)\,.$$

Donc

$$\mathrm{e}^u - \frac{1+u}{1+u^2} \underset{u\to 0}{=} \left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right) - (1+u-u^2) + \mathrm{o}(u^2) = \frac{3u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)\,.$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x^2}.$$

18.5.2. Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente

◇◇

Remarque technique 18.61. Si une fonction f possède un DL à l'ordre 1 au voisinage de a, celui-ci détermine une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point A de coordonnées $(a, f(a))$. Plus précisément, si

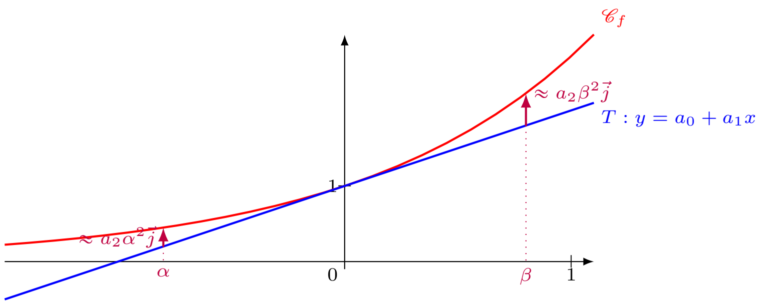
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \mathrm{o}(h) \quad \textit{i.e.} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

alors une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

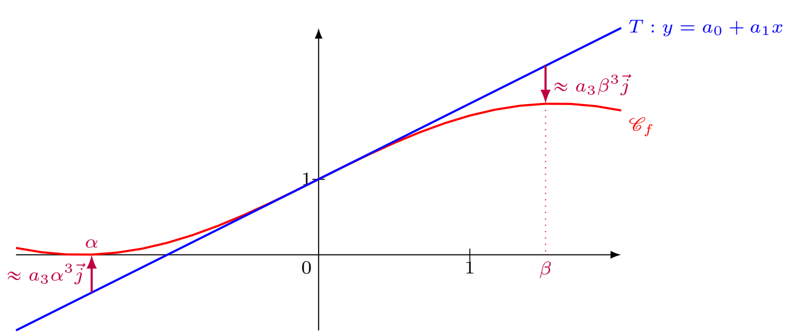
Si on a un DL de f en a à un ordre supérieur, le premier terme non nul de degré supérieur ou égal à 2 donne la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$. Plus précisément, si

$$f a + h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n) \quad \textit{i.e.} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

avec $n \geqslant 2$ et $a_n \neq 0$, alors $f(x) - (a_0 + a_1(x-x_0)) \underset{x\to x_0}{\sim} a_n(x-x_0)^n$ et donc $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est localement du signe de $a_n(x - x_0)^n$. Si n est pair, la courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente suivant le signe de a_n. Si n est impair, la courbe traverse la tangente.



Exemple où $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, avec $a_2 > 0$



Exemple où $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \mathrm{o}(x^3)$, avec $a_3 < 0$

Exercice d'application 18.62. Déterminer la tangente en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2+2x+2)$ ainsi que le position de la courbe par rapport à cette tangente.

↪ Tout d'abord $f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$, et ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{3}(x)^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}\big(x^3\big)\,. \end{aligned}$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 est $y = \ln(2) + x$. De plus, comme

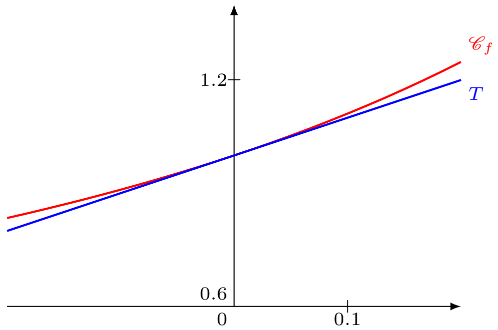
$$f(x) - (\ln(2) + x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3$$

cette différence est positive à gauche de 0 et négative à droite de 0 ce qui se traduit par le fait que la courbe est au dessus de sa tangente à gauche de 0 et en dessous à droite de 0.

◇◇◇

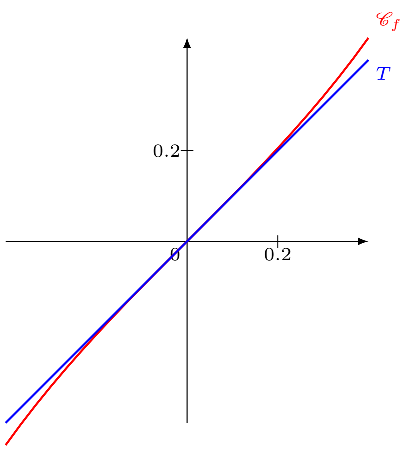
Exercice d'application 18.63. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-\sin(x)}$. En déduire l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f au voisinage de 0.

↪ $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \mathrm{o}\big(x^2\big)$ donc une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 est $y = x+1$. De plus, le terme d'ordre 2 de ce DL assure que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T localement en 0.



Exercice d'application 18.64. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f au voisinage de 0.

↪ $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{2x^3}{3} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$ donc une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 est $y = x$. De plus, le terme d'ordre 3 de ce DL assure que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T à gauche de 0 et au dessus à droite de 0.



Remarque technique 18.65. La Proposition 18.14 permet de déterminer des prolongements à partir de DL.

Exercice d'application 18.66. Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

↪ On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}\big(x^2\big)$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$. De plus, ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f est $y = 1$ et cette tangente est au dessus de $\mathscr{C}_f$ localement en 0.

18.5.3. Étude des branches infinies

Définition 18.67.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. La droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est dite **asymptote** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax + b) = 0$).

Remarque technique 18.68. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Alors la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$ au voisinage de $+\infty$. De plus, si $\gamma \neq 0$, alors la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de γ.

Un résultat analogue existe en $-\infty$.

Exercice d'application 18.69. Trouver les asymptotes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et les placer par rapport à cette courbe.

↪ On a

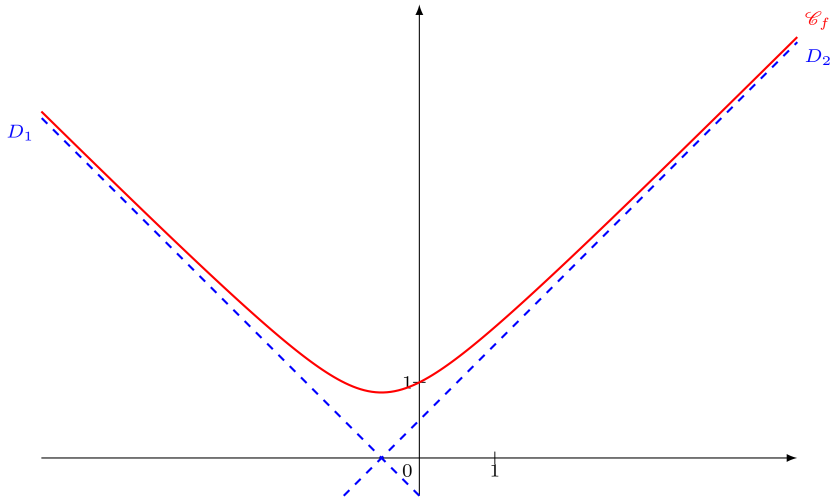
$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \underset{x\to-\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi la droite D_1 d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. De plus, au voisinage de $-\infty$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T.

De même,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc la droite D_2 d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. En outre, au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T.



◇◇

18.5.4. Recherche d'extrema

◇◇

Remarque technique 18.70. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I qui n'en est pas une extrémité. On sait qu'une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en a est que $f'(a) = 0$. En un tel point où $f'(a) = 0$, pour savoir si $f(a)$ est bien un extremum de f, on écrit un DL de f en a à un ordre suffisant pour pouvoir trouver un équivalent de $f(a+h) - f(a)$ lorsque h tend vers 0.

- Si $f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{\sim} a_p h^p$ où p est un nombre pair, alors $f(a)$ est un extremum local de f (maximum si $a_p < 0$ et minimum si $a_p > 0$).
- Si $f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{\sim} a_q h^p$ où q est un nombre impair, alors $f(a)$ n'est pas un extremum local de f.

Exercice d'application 18.71. La fonction $f : x \longmapsto 2 + (\sin(x) - \operatorname{sh}(x)) \operatorname{Arctan}(x)$ admet-elle un extremum en 0 ?

$\hookrightarrow$ On a $\sin(x) - \operatorname{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} - x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^4\big) \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\big(x^4\big)$. On en déduit

$$f(x) = 2 + \left(\frac{-x^3}{3}\right) \times x + \mathrm{o}\big(x^4\big) \underset{x \to 0}{=} 2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\big(x^4\big)\,.$$

Donc $f'(0) = 0$ et $f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^4}{3}$. Finalement, f admet un maximum local en 0.

◇◇

Chapitre 19

Espaces vectoriels

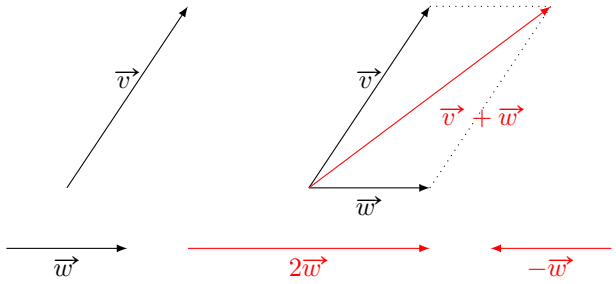
Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.

David Hilbert [1]

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

19.1. L'exemple du plan

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, on sait construire le vecteur somme $\vec{v}+\vec{w}$ et les vecteurs $\lambda\vec{v}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.



La loi $+$ ainsi définie munit l'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan d'une structure de **groupe commutatif**.

- $+$ est une loi associative : pour tout $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3$, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
- $+$ est une loi commutative : pour tout $(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2$, $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.
- Le vecteur nul est neutre pour la loi $+$: pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$.
- Tout vecteur admet un symétrique pour la loi $+$: pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.

De plus, l'opération de multiplication par un nombre réel, notée $\cdot$, se comporte « bien » vis à vis de cette loi.

- Pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

1. David HILBERT, mathématicien allemand (1862-1943)

- Pour tout $(\lambda, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathbf{R} \times \overrightarrow{\mathcal{P}}^2$, $\lambda \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \lambda \cdot \overrightarrow{w}$.
- Pour tout $(\lambda, \mu, \overrightarrow{v}) \in \mathbf{R}^2 \times \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{v}$.
- Pour tout $(\lambda, \mu, \overrightarrow{v}) \in \mathbf{R}^2 \times \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $(\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{v})$.

D'autres ensembles déjà rencontrés possèdent ces mêmes caractéristiques, par exemple l'ensemble des matrices de taille $n \times p$: on sait faire la somme de deux telles matrices et multiplier une matrice par un coefficient. Les règles de calculs sont analogues à celles dégagées ci-avant.

On peut donc mettre en évidence une structure commune à ces ensembles, structure qu'on appellera espace vectoriel, même si les éléments de l'ensemble ne sont pas des vecteurs au sens de ce qui a été vu dans l'enseignement secondaire.

19.2. Structure d'espace vectoriel

Définition 19.1.

On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbf{K}$ (ou $\mathbf{K}$-espace vectoriel) tout triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble non vide, $+ : E \times E \longrightarrow E$ est une loi interne et $\cdot : \mathbf{K} \times E \longrightarrow E$ est une loi externe qui vérifient les propriétés suivantes.

EV1 : $\forall\, u, v \in E$, $u + v = v + u$ (commutativité)

EV2 : $\forall\, u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité)

EV3 : $\exists\, 0_E \in E$, $\forall\, u \in E$, $0_E + u = u + 0_E = u$.
0_E est l'élément neutre de l'addition, il est appelé **vecteur nul**.

EV4 : $\forall\, u \in E$, $\exists\, v \in E$, $u + v = v + u = 0_E$.
Tout élément possède un opposé pour la loi $+$. L'opposé de u est noté $-u$. On peut montrer en combinant les quatre propriétés précédentes que cet opposé est unique.

EV5 : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\forall\, u \in E$, $(\alpha+\beta)\cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$ (distributivité par rapport à la somme de scalaires)

EV6 : $\forall\, \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall\, u, v \in E$, $\alpha \cdot (u+v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$ (distributivité par rapport à la somme de vecteurs)

EV7 : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\forall\, u \in E$, $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$ (associativité mixte)

EV8 : $\forall\, u \in E$, $1 \cdot u = u$. L'élément unité de $\mathbf{K}$ est un élément neutre pour la multiplication externe.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés des **scalaires**, ceux de E des **vecteurs**.

Notation 2. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Lorsque λ est un scalaire et u un vecteur, on écrira λu pour $\lambda \cdot u$, mais pas $u\lambda$.

On notera également $u - v$ pour désigner $u + (-v)$.

19.2.1. Exemples fondamentaux

Les exemples suivants sont fondamentaux, il faut les connaître.

- $(\mathbf{R}, +, \times)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Ici, la loi externe est la loi de multiplication des réels. Le vecteur nul eset 0.
- $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, avec $\times : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda \times z \end{array}$.
  $(\mathbf{C}, +, \times)$ est aussi un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, avec cette fois $\times : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda \times z \end{array}$.
- L'ensemble $(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ des vecteurs de la géométrie plane avec l'addition classique des vecteurs et la multiplication par un réel est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
  Idem pour l'ensemble $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace.

- $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, où les opérations sont définies par

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & (x_1+y_1, x_2+y_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (\lambda,(x_1,x_2)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{array}$$

  Le vecteur nul est $0_{\mathbf{R}^2} = (0,0)$.
  Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}^\star$, $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
- $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est le polynôme nul.
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$.
- Soit Ω un ensemble quelconque non vide. On s'intéresse à l'ensemble $\mathbf{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$ des applications de Ω dans $\mathbf{K}$, qu'on munit d'une loi de composition interne :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbf{K}^\Omega \times \mathbf{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{K}^\Omega \\ & (f,g) & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & f(x) +_{\mathbf{K}} g(x) \end{array}\right] \end{array}$$

  ainsi que d'une loi de composition externe :

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbf{K} \times \mathbf{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{K}^\Omega \\ & (\lambda,g) & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \Omega \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot_{\mathbf{K}} g(x) \end{array}\right] \end{array}$$

  $(\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est

$$\begin{array}{rccc} 0 : & \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & x & \longmapsto & 0 \end{array}.$$

  Cet exemple est fondamental. En effet, il inclut les cas particuliers suivants :
  - Si $\Omega = [\![1, n]\!]$, on a $\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$ et on retrouve l'exemple cité plus haut.
  - Si $\Omega = \mathbf{N}$, alors $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$, muni de l'addition classique des suites et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est la suite nulle $(0)_{n\in\mathbf{N}}$.
  - Si D est une partie de $\mathbf{R}$, l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbf{R}$, muni de l'addition de fonctions et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est $0 : \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$.
- On peut encore généraliser l'exemple précédent. Soit $(E, \star, \bullet)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et Ω un ensemble quelconque. On munit alors l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, E)$ des applications de Ω vers E des opérations

$$\begin{array}{rccc} \boxplus : & \mathcal{F}(\Omega,E) \times \mathcal{F}(\Omega,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\Omega,E) \\ & (f,g) & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \star g(x) \end{array}\right] \end{array}$$

  et

$$\begin{array}{rccc} \boxdot : & \mathbf{K} \times \mathcal{F}(\Omega,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\Omega,E) \\ & (\lambda,f) & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \bullet f(x) \end{array}\right] \end{array}$$

  $(\mathcal{F}(\Omega, E), \boxplus, \boxdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul est $0 : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$.
  Par exemple, on peut choisir $\Omega = [0\,;\,1]$ et $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, qui est bien un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On définit

$$\begin{array}{rccc} f : & [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t & 2 & 4 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

  deux vecteurs de $\mathcal{F}([0,1], \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}))$. Alors

$$\begin{array}{rccc} f \boxplus g : & [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t & 3 & 4+t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 19.3. On peut toujours considérer les **C**-espaces vectoriels E comme des **R**-espaces vectoriels : il suffit de restreindre la loi externe $\cdot : \mathbf{C} \times E \longrightarrow E$ à $\mathbf{R} \times E : \cdot : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E$. Par exemple, $\mathbf{C}[X]$ est un **C**-espace vectoriel, mais c'est également un **R**-espace vectoriel. De même, $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est un **C**-espace vectoriel et également un **R**-espace vectoriel.

19.2.2. Premières propriétés

Proposition 19.4.

Soit $(E, +, \cdot)$ un **K**-espace vectoriel. Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$,

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

Démonstration.

- Soit $x \in E$. Alors $0_{\mathbf{K}} \cdot x = (0_{\mathbf{K}} + 0_{\mathbf{K}}) \cdot x = 0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_{\mathbf{K}} \cdot x$ d'après EV5.
  D'après EV4, tout vecteur de E possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x) \\ &= (0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_{\mathbf{K}} \cdot x) + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x) \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + (0_{\mathbf{K}} \cdot x + (-0_{\mathbf{K}} \cdot x)) && \text{EV2} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x + 0_E && \text{EV4} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x && \text{EV3} \end{aligned}$$

- Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$. (EV3) et (EV6)
  D'après EV4, tout vecteur de E possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= \lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= (\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E) + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + (\lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E)) && \text{EV2} \\ &= \lambda \cdot 0_E + 0_E && \text{EV4} \\ &= \lambda \cdot 0_E && \text{EV3} \end{aligned}$$

- Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda \cdot x = 0_E$. Montrons que $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$ ou $x = 0_E$.
  Si $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$, le résultat est obtenu.
  Si $\lambda \neq 0_{\mathbf{K}}$, alors $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'après le premier point.
  Or, $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = (\frac{1}{\lambda}\lambda) \cdot x$ d'après EV7, donc $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 1 \cdot x = x$ par EV8. Donc $x = 0_E$. □

Proposition 19.5.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Alors,

1. $\forall x \in E, \quad (-1) \cdot x = -x$ (opposé de x).
2. $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in E, \quad (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x = \alpha \cdot x + (-\beta \cdot x)$.
3. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{EV8} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{EV6} \\ &= 0_{\mathbf{K}} \cdot x \\ &= 0_E && \text{avec la proposition précédente.} \end{aligned}$$

2. EV5 et le point 1.
3. EV6 et le point 1.

□

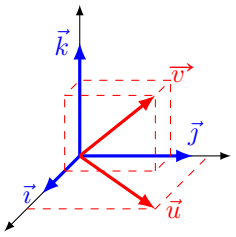
19.2.3. Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 19.6.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On dit qu'un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

La notion de combinaison linéaire est géométriquement très simple à représenter dans le plan (ou dans l'espace). Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, mais ça n'est pas le cas de $\vec{v}$. Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.



Exemple 19.7.

1. On se place dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Soient u et v deux vecteurs de E. Alors, u, $-v$, $2u - 4v$ sont des combinaisons linéaires de u et v.
2. Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$, le vecteur $(3, -2, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ car
$$(3, -2, 4) = 3 \cdot i - 2 \cdot j + 4 \cdot k.$$
3. On se place dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{R}[X], +, \cdot)$. Alors le polynôme $2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8$ est une combinaison linéaire des polynômes X^7, X^6, X^5, X^4, X^3, X^2, X, et 1 car
$$2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8 = 2 \cdot X^7 + 0 \cdot X^6 + 0 \cdot X^5 + 3 \cdot X^4 + (-1) \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X + (-8) \cdot 1.$$

Exercice d'application 19.8. Dans $\mathbf{R}^3$, $x = (2, 3, 5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$?

↪ Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$. On a

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = x \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b &=& 2 \\ b+c &=& 3 \\ a+c &=& 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ b &=& 0 \\ c &=& 3 \end{array} \right.$$

donc $2e_1 + e_3 = x$ et ainsi x est combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3.

Exercice d'application 19.9. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A^2 est-elle combinaison linéaire de A et I_2 ?

↪ Soit $a, b \in \mathbf{R}$.

$$A^2 = aA + bI_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b &=& 7 \\ 2a &=& 10 \\ 3a &=& 15 \\ 4a+b &=& 22 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 5 \\ b &=& 2 \end{array} \right.$$

Ainsi $A^2 = 5A + 2I_2$, donc A^2 est combinaison linéaire des matrices A et I_2.

Exercice d'application 19.10. Dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $u = (n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle combinaison linéaire de $v = (1)_{n \in \mathbf{N}}$ et $w = (n)_{n \in \mathbf{N}}$?

↪ Soit $a, b \in \mathbf{K}$.

$$u = av + bw \iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad n^2 = a + bn.$$

On obtient donc un système d'une infinité d'équations. On peut pas continuer à raisonner par équivalences. On procède donc plutôt par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons $u = av + bw$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^2 = a + bn$, donc en particulier $a = 0$ et $b = 1$ (pour $n = 0$ et $n = 1$). Ainsi $n^2 = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde.
Donc il n'existe pas de scalaires a et b tels que $u = av + bw$: la suite u n'est pas combinaison linéaire des suites v et w.

◇◇

Remarque technique 19.11. Si f, g et h sont trois fonctions telles que $f = ag+bh$, où l'on souhaite déterminer a et b des scalaires, on peut exploiter les égalités en certaines valeurs. On peut aussi utiliser l'égalité des limites (lorsqu'elles existent) ou, dans le cas de fonctions dérivables, l'égalité des dérivées.

Exercice d'application 19.12. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, $f : x \longmapsto \operatorname{ch}(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sh^2 et ch^2 ?

↪ A nouveau, on ne peut pas raisonner directement par équivalences (car dire que deux fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ sont égales revient à dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x)$ ce qui conduit à une infinité d'équations). On préfère ici conduire une analyse-synthèse.
Analyse. Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $f = \lambda \operatorname{sh}^2 + \mu \operatorname{ch}^2$. Alors, pour tout nombre réel x, $\operatorname{ch}(2x) = \lambda \operatorname{sh}^2(x) + \mu \operatorname{ch}^2(x)$. En particulier, $1 = \mu$ (pour $x = 0$) et $\operatorname{ch}(2) = \lambda \operatorname{sh}^2(1) + \operatorname{ch}^2(1)$, donc $2e^2 + 2e^{-2} = \lambda(e^2 - 2 + e^{-2}) + e^2 + 2 + e^{-2}$ puis $\lambda = 1$. Par conséquent, si λ et μ existent, alors $\lambda = \mu = 1$ et $f = \operatorname{sh}^2 + \operatorname{ch}^2$.
Synthèse. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\operatorname{sh}(x)^2 + \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x).$$

Ainsi, $f = \operatorname{sh}^2 + \operatorname{ch}^2$.
Conclusion. Finalement, f est combinaison linéaire des fonctions sh^2 et ch^2.

◇◇

⚠ **Attention** ⚠**.** S'il y a ambiguïté sur le corps de base (E est-il considéré comme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel ou comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ?), il est important de le préciser.

Par exemple, $1 + i$ est combinaison linéaire de 1 et 2 dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$ (puisque $1 + i = (1 + i) \cdot 1 + 0 \cdot 2$ par exemple), mais $1 + i$ n'est pas combinaison linéaire de 1 et 2 dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$ (car $\mathfrak{Im}(1 + i) = 1 \neq 0 = \mathfrak{Im}(a \cdot 1 + b \cdot 2)$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}$).

⚠ **Attention** ⚠**.** En général, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$ **n'implique pas** $\lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Autrement dit, on ne peut pas faire d'identification quand on a deux décompositions linéaires avec les mêmes vecteurs, car une telle décomposition n'est *a priori* pas unique. Par exemple,

$$(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0).$$

19.3. Sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel

19.3.1. Définition et exemples à connaître

Définition 19.13.

Soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

SEV1 : $\forall\, u, v \in F, \quad u + v \in F$ (F est stable par addition)

SEV2 : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot u \in F$ (F est stable par multiplication externe)

SEV3 : $0_E \in F$.

Proposition 19.14.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F muni de l'addition et de la multiplication externe définies sur E (ou plutôt des restrictions de ces lois à F, dites **lois induites**) est $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Démonstration.
- F est bien non vide car $0_E \in F$.
- $+$ est bien une loi interne à F d'après SEV 1.
- EV1 et EV2 sont vérifiées car les éléments de F sont aussi des éléments de E.
- $0_E \in F$ par SEV3 donc EV3 est vérifiée. Et $0_F = 0_E$.
- Montrons que les opposés des éléments de F sont aussi dans F.
  Soit $x \in F$. Alors, par SEV2, $(-1) \cdot x \in F$. Or, dans E, on sait que $(-1) \cdot x = -x$ est l'opposé de x. Donc $-x \in F$. EV4 est bien vérifiée.
- Les propriétés EV5, EV6, EV7, EV8 sont vérifiées car les éléments de F sont aussi des éléments de E. □

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on utilise plutôt la proposition suivante.

Proposition 19.15 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Soit F une partie de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :
1. $0_E \in F$.
2. $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Démonstration.
- Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E. Par définition, $0_E \in F$.
  Soient $x, y \in F$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors, par SEV2, $\lambda \cdot x \in F$ et par SEV1, $\lambda \cdot x + y \in F$.
- Soit F une partie de E vérifiant
  1. $0_E \in F$.
  2. $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

  Alors, on a bien $0_E \in F$ (SEV3).
  Soient x et y dans F. Alors, $1 \cdot x + y \in F$, donc $x + y \in F$ (SEV1).
  Soient $\lambda \in \mathbf{K}, x \in F$. Comme $0_E \in F$, $\lambda \cdot x + 0_E \in F$, donc $\lambda \cdot x \in F$ (SEV2). □

Exemple 19.16.
- Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits **sous-espaces vectoriels triviaux**).
- Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de la géométrie vectorielle plane, les droites vectorielles sont des sous-espaces vectoriels. Rappelons qu'une droite vectorielle est un ensemble $\{k\overrightarrow{u} : k \in \mathbf{K}\}$ (où $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$), soit l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.
- Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de la géométrie vectorielle dans l'espace, les droites vectorielles et les plans vectoriels (*i.e.* les ensembles de la forme $\{a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} : a, b \in \mathbf{K}\}$, où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires) sont des sous-espaces vectoriels.

Exercice d'application 19.17. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

↪ On a bien $F \subset \mathbf{R}^n$.

1. Le vecteur nul de $\mathbf{R}^n$ est $0_{\mathbf{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$. Comme $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, $0_{\mathbf{R}^n} \in F$.
2. Soit $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, d'après les définitions,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + v &= \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \ldots, \lambda x_n + y_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + \cdots + (\lambda x_n + y_n) &= (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda \cdot u + v \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Exercice d'application 19.18. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+2y+z = 1\}$. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

$\hookrightarrow$ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ car $0_{\mathbf{R}^3} = (0, 0, 0) \notin F$ (en effet, $0 + 2 \times 0 + 0 \neq 1$).

Exercice d'application 19.19. Montrer que $F = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

$\hookrightarrow$

- $F \subset \mathbf{R}[X]$.
- Le vecteur nul de $\mathbf{R}[X]$ est le polynôme nul qu'on note θ. $\widetilde{\theta}(0) = 0$ et $\widetilde{\theta}(1) = 0$ donc $\widetilde{\theta}(0) = \widetilde{\theta}(1)$ et $\theta \in F$.
- Soient $\lambda \in \mathbf{R}$, $(P, Q) \in F^2$. Montrons que $\lambda P + Q \in F$, c'est à dire que $\widetilde{\lambda P + Q}(0) = \widetilde{\lambda P + Q}(1)$.

$$\widetilde{\lambda P + Q}(0) = \lambda\widetilde{P}(0) + \widetilde{Q}(0) = \lambda\widetilde{P}(1) + \widetilde{Q}(1) = \widetilde{\lambda P + Q}(1).$$

  Donc $\lambda P + Q \in F$ et F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice d'application 19.20. Soit $n \in \mathbf{N}$ Montrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$.

$\hookrightarrow$

- $\mathbf{K}_n[X] \subset \mathbf{K}[X]$.
- Le polynôme nul est de degré $-\infty$, donc inférieur à n. Donc il appartient à $\mathbf{K}_n[X]$.
- Soient $P, Q \in \mathbf{K}_n[X]$, $\lambda \in \mathbf{K}$ Montrons que $\lambda P + Q \in \mathbf{K}_n[X]$. Alors :
  $\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P), \deg(Q))$.
  $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$ et $\deg(\lambda P) = -\infty$ si $\lambda = 0$. Dans tous les cas $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P) \leqslant n$.
  Comme $\deg(Q) \leqslant n$, $\max(\deg(\lambda P), \deg(Q)) \leqslant n$, donc $\lambda P + Q \in \mathbf{K}_n[X]$.

Donc $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$.

◇◇

Remarque technique 19.21. Pour démontrer qu'un ensemble est un espace-vectoriel, on peut montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu. Cette méthode est très utile et particulièrement adaptée aux ensembles décrits par équations.

Exercice d'application 19.22. Montrer que $F = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = 0\right\}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

$\hookrightarrow$ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

- $F \subset \mathbf{R}^2$.
- $0_{\mathbf{R}^2} \in F$ car $2 \times 0 - 0 = 0$.
- Soit $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ des éléments de F et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$. De plus,

$$2(\lambda x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (2\lambda x_1 - y_1, 2\lambda x_2 - y_2) = (0, 0)$$

  puisque $u, v \in F$. Il s'ensuit que $\lambda u + v \in E$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ et c'est donc en particulier un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Exercice d'application 19.23. Soit $F = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} + u_n = u_0\}$. Montrer que F est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

$\hookrightarrow$ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

- $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
- Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite nulle. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\theta_{n+2}+\theta_n = 0+0 = 0 = \theta_0$. Donc $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F$.
- Soient u et v des éléments de F, $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $w = \lambda u + v$. Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F$.
  Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} + w_n &= (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + (\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} + \lambda u_n + v_n \\ &= \lambda(u_{n+2} + u_n) + (v_{n+2} + v_n) \\ &= \lambda u_0 + v_0 \\ &= w_0. \end{aligned}$$

  Donc $(w_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et c'est donc en particulier un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Exercice d'application 19.24. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

$\hookrightarrow$ L'ensemble des solutions est

$$F = \left\{ f \in D^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \;\middle|\; \forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) + \frac{1}{1+x^2}f(x) = 0 \right\}.$$

Montrons que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

- $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
- La fonction nulle appartient à F car cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 + 0 \times \dfrac{1}{1+x^2} = 0$.
- Soit $(\lambda, y_1, y_2) \in \mathbf{R} \times F^2$. Alors $y_1 + \mu y_2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(y_1 + \lambda y_2)'(x) + \frac{1}{1+x^2}(y_1 + \lambda y_2)(x) = y_1'(x) + \frac{1}{1+x^2}y_1(x) + \lambda\left(y_2'(x) + \frac{1}{1+x^2}y_2(x)\right) = 0$$

  car $y_1, y_2 \in F$. Ainsi $y_1 + \lambda y_2 \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, donc en particulier F est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

◇◇◇

Exercice d'application 19.25. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère l'ensemble $S_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid {}^tM = M\}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{C}$ qui sont symétriques. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), +, \cdot)$.

$\hookrightarrow$

- $S_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
- Si l'on note Z la matrice carrée nulle de taille $n \times n$, on a ${}^tZ = Z$ donc $Z \in S_n$.
- Soient $\lambda \in \mathbf{C}$, $(A, B) \in (S_n)^2$. Montrons que $\lambda \cdot A + B \in S_n$.

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= {}^t(\lambda A) + {}^tB && \text{par propriété de la transposition} \\ &= \lambda\, {}^t(A) + {}^tB && \text{par propriété de la transposition} \\ &= \lambda A + B && \text{car } {}^tA = A \text{ et } {}^tB = B \end{aligned}$$

  Donc $\lambda A + B \in S_n$.

S_n est bien un sou-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), +, \cdot)$.

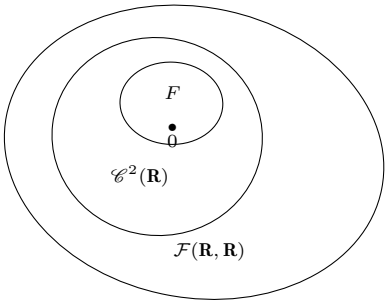
Exercice d'application 19.26. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}^n(I)$ des fonctions à valeurs réelles n fois continûment dérivables est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbf{R}), +, \cdot)$ (ici, les vecteurs sont donc les applications de I dans $\mathbf{R}$).

↪

- $\mathscr{C}^n(I) \subset \mathcal{F}$.
- Soit θ la fonction nulle. θ est n fois dérivable et $\theta^{(n)} = \theta$. En particulier, θ est continue sur I donc $\theta^{(n)}$ est continue sur I. Finalement, $\theta \in \mathscr{C}^n(I)$.
- Soient $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. D'après le cours de dérivation, $\lambda \cdot f + g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, donc $\lambda \cdot f + g \in \mathscr{C}^n(I)$

$\mathscr{C}^n(I)$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbf{R}), +, \cdot)$.

Exercice d'application 19.27. Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}) \mid f'' + 3f' + 4f = 0\}$ (0 est ici la fonction nulle). Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathscr{C}^2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.



↪

- $F \subset \mathscr{C}^2$.
- Soit θ la fonction nulle sur $\mathbf{R}$. θ est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\theta' = \theta$, $\theta'' = \theta$. Ainsi, $\theta'' + 3\theta' + 4\theta = 8\theta = \theta = 0$. Donc $\theta \in F$.
- Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbf{R} \times F^2$. On pose $h = \lambda f + g$. Montrons que $h \in F$. h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et $h' = \lambda f' + g'$, $h'' = \lambda f'' + g''$. Donc,

$$\begin{aligned} h'' + 4h' + 3h &= (\lambda f'' + g'') + 3(\lambda f' + g') + 4(\lambda f + g) \\ &= \lambda(f'' + 4f' + 3f) + (g'' + 4g' + 3g) \\ &= \lambda 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

  Donc $h \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathscr{C}^2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

Proposition 19.28.

Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors F est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \forall x_1, \ldots, x_n \in F,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \quad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F.$$

Démonstration.
Soit $(x_i)_{i \in \mathbf{N}^\star}$ une famille de vecteurs de F et $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}^\star}$ une famille de scalaires de $\mathbf{K}$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, H_n : « $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F$ ».
On a $\lambda_1 x_1 \in F$ car F est stable par produit externe, donc H_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que H_n soit vraie. On a $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$. Or, via H_n, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F$. De plus, puisque F est stable par produit externe, $\lambda_n x_n \in F$. Enfin, puisque F est stable par somme, $(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in F$. Donc H_{n+1} est vraie.
Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, H_n est vraie. □

19.3.2. Sous-espace vectoriel engendré

Définition 19.29.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $x_1, \dots, x_n$ et se note $\text{Vect}\,(x_1, \dots, x_n)$.

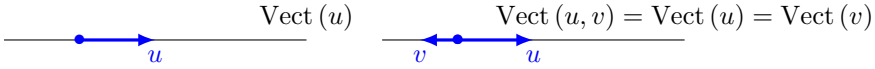
$$\begin{aligned}\text{Vect}\,(x_1, \dots, x_n) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \ : \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\} \\ &= \{\, u \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K},\ u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout vecteur u de E, on a l'équivalence

$$u \in \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_n) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \text{ tels que } u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Définition 19.30.

On appelle **droite vectorielle** de E un sous-espace vectoriel D de E qu'on peut écrire $D = \text{Vect}\,(u)$ avec $u \in E$. On dit que u est un **vecteur directeur** de D.
Par définition, $D = \{\lambda \cdot u \ : \ \lambda \in \mathbf{K}\}$.



Définition 19.31.

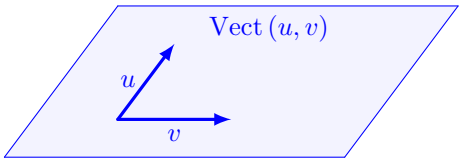
Soient u et v deux vecteurs de E. On dit que u et v sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Exemple 19.32. Dans $\mathbf{R}[X]$, X^2 et $3X^2$ sont colinéaires.

Définition 19.33.

On appelle **plan vectoriel** de E un sous espace vectoriel P de E qu'on peut écrire $P = \text{Vect}\,(u, v)$ où u et v sont deux vecteurs non colinéaires de E. On a alors, par définition,

$$P = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \ : \ \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}\,.$$



Exemple 19.34.

- Dans $\mathbf{R}^2$, posons $e_1 = (2, 1)$. Alors

$$\text{Vect}\,(e_1) = \{\lambda \cdot e_1 \ : \ \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(2\lambda, \lambda) \ : \ \lambda \in \mathbf{R}\}\,.$$

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\text{Vect}\,(I_2, A) = \{\lambda_1 I_2 + \lambda_2 A \,:\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \,:\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

⚠ **Attention** ⚠. A nouveau, lorsqu'il y a ambiguïté, il est important de préciser si l'on travaille dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ou dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, ce qui l'on peut éventuellement indiquer en précisant $\text{Vect}_{\mathbf{C}}$ ou $\text{Vect}_{\mathbf{R}}$.

Par exemple, $\text{Vect}\,(1) = \{\lambda \cdot 1 \,:\, \lambda \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$ dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$. Par contre, $\text{Vect}\,(1) = \{\lambda \cdot 1 \,:\, \lambda \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$. On pourra ainsi écrire $\text{Vect}_{\mathbf{C}}(1) = \mathbf{C}$ et $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{R}$.

Lemme 19.35.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. 1. $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) \subset E$.

2. $0_E = 0_{\mathbf{K}} x_1 + 0_{\mathbf{K}} x_2 + \cdots + 0_{\mathbf{K}} x_n$. Donc $0_E \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.
3. Soient $u, v \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
   $u \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.
   $v \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ donc il existe $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbf{K}$ tels que $u = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u + v &= \alpha \cdot (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n) \\ &= \alpha \cdot (\lambda_1 x_1) + \cdots + \alpha \cdot (\lambda_n x_n) + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n && \text{(EV6)} \\ &= (\alpha \times \lambda_1) \cdot x_1 + \cdots + (\alpha \times \lambda_n) \cdot x_n + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n && \text{(EV7)} \\ &= (\alpha \times \lambda_1 + \mu_1) \cdot x_1 + \cdots + (\alpha \times \lambda_n + \mu_n) \cdot x_n && \text{(EV5)} \end{aligned}$$

   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha \times \lambda_i + \mu_i \in \mathbf{K}$, donc $\alpha \cdot u + v \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.

$\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Théorème 19.36.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
$\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient à la fois $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Cela signifie que pour tout sous-espace vectoriel G de E contenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) \subset G$.

Démonstration.

- On a montré dans le lemme que $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  De plus, $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n$, donc $x_1 \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.
  De même, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_{i-1} + 1 \cdot x_i + 0 \cdot x_{i+1} + \cdots + 0 \cdot x_n$, donc $x_i \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.
  Donc $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ est bien un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \ldots, x_n$.
- Reste à montrer que c'est le plus petit. Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \ldots, x_n$.
  Soit $u \in x_1, \ldots, x_n$. Alors u s'écrit $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Or, x_1, …, x_n sont des éléments de G et G est un sous-espace vectoriel, donc est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs, donc $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdot + \lambda_n \cdot x_n \in G$, c'est à dire $u \in G$.
  Donc $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) \subset G$. □

Exemple 19.37.

- Soit $F = \left\{3aX^2 + (a+b)X - b \,:\, (a,b) \in \mathbf{C}^2\right\}$. On a $F = \text{Vect}\left(3X^2 + X, X - 1\right)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.
- Reprenons l'Exercice d'application 19.22. On a

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = 0\right\} = \{(x, 2x) \,:\, x \in \mathbf{R}\} = \{(x \cdot (1,2) \,:\, x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\left((1,2)\right),$$

  donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.
- Reprenons l'Exercice d'application 19.24. L'équation différentielle $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ admet comme ensemble de solution

$$F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-\operatorname{Arctan}(x)} \end{array} \,:\, \lambda \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-\operatorname{Arctan}(x)}\right)$$

  donc F est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\operatorname{Arctan}(x)}$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: c'est en particulier un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Exercice d'application 19.38. Montrer que $F = \left\{u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0\right\}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

↪ *Première méthode.*

- $F \subset \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
- La suite nulle appartient à F.
- Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbf{C} \times F^2$. Posons $w = u + \lambda v$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{array}{rcl} w_{n+2} + w_{n+1} + w_n & = & u_{n+2} + \lambda v_{n+2} + u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + u_n + \lambda v_n \\ & = & u_{n+2} + u_{n+1} + u_n + \lambda(v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) \\ & = & 0 + \lambda \cdot 0 \\ & = & 0. \end{array}$$

  Donc $w \in F$.

Finalement F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. En particulier, F est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Seconde méthode. Les suites de F sont les suites récurrentes linéaires d'ordre deux dont le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 + X + 1$. Les racines de P sont $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Donc, d'après le cours sur les suites,

$$F = \left\{ \left(a\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + b\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n \right)_{n\in\mathbf{N}} \,:\, (a,b) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Par conséquent, en notant $u = \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = \left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, on a

$$F = \left\{au + bv \,:\, (a,b) \in \mathbf{C}^2\right\} = \text{Vect}\left(u, v\right).$$

F est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. En particulier, F est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Exercice d'application 19.39. Soit $F = \{(x,y,t,z) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+t+z = 0 \text{ et } x+2y+3z+4t = 0\}$. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

$\hookrightarrow$ Soit $(x,y,t,z) \in \mathbf{R}^4$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \boxed{1}.x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \boxed{1}.x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & \boxed{1}.y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda + 2\mu \\ y & = & -2\lambda - 3\mu \\ z & = & \lambda \\ t & = & \mu \end{array} \right. \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \quad (x,y,z,t) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \quad (x,y,z,t) = (\lambda, -2\lambda, \lambda, 0) + (2\mu, -3\mu, 0, \mu) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \quad (x,y,z,t) = \lambda(1,-2,1,0) + \mu(2,-3,0,1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \operatorname{Vect}(u,v)
\end{aligned}$$

avec $u = (1,-2,1,0)$ et $v = (2,-3,0,1)$. Donc $F = \operatorname{Vect}(u,v)$, en particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

u et v n'étant pas colinéaires, F est un plan vectoriel.

Exercice d'application 19.40. Soit $G = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \widetilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ en l'écrivant sous la forme $F = \operatorname{Vect}(\cdots)$.

$\hookrightarrow$ Soit P un polynôme quelconque de $\mathbf{R}_3[X]$. Il existe $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$\begin{aligned}
P \in G &\iff \widetilde{P}(1) = 0 \\
&\iff a + b + c + d = 0 \\
&\iff \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -\lambda - \mu - \nu \\ b & = & \lambda \\ c & = & \mu \\ d & = & \nu \end{array} \right. \\
&\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad P = (-\lambda - \mu - \nu)X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \nu \\
&\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad P = \lambda(-X^3 + X^2) + \mu(-X^3 + X)\nu(-X^3 + 1) \\
&\iff P \in \operatorname{Vect}\left(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1\right)
\end{aligned}$$

Donc $F = \operatorname{Vect}\left(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1\right)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.

Autre méthode : Soit $P \in \mathbf{R}^3[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in F &\iff \widetilde{P}(1) = 0 \\
&\iff 1 \text{ est racine de } P \\
&\iff X - 1 \mid P \\
&\iff \exists Q \in \mathbf{R}_2[X], \quad P = (X-1)Q \\
&\iff \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \quad P = (X-1)(aX^2 + bX + c) \\
&\iff \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \quad P = aX^2(X-1) + bX(X-1) + c(X-1) \\
&\iff \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \quad P = aX^2(X-1) + bX(X-1) + c(X-1) \\
&\iff P \in \operatorname{Vect}\left(X^2(X-1), X(X-1), X-1\right)
\end{aligned}$$

Donc $F = \operatorname{Vect}\left(X^2(X-1), X(X-1), X-1\right)$.

Remarque 19.41. Il n'y a donc PAS unicité des vecteurs engendrant un sous-espace vectoriel.

Exercice d'application 19.42. Soit $H = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0\}$, c'est à dire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Montrer que H est un plan vectoriel.

↪ L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $r^2+2r+1=0$ qui admet une unique solution double -1.

Donc l'ensemble des solutions de $y''+2y'+y=0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda+\mu t)\mathrm{e}^{-t} \end{array} \ : (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 \right\}.$$

On pose $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t} \end{array}$ et $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t\mathrm{e}^{-t} \end{array}$. Ainsi, les solutions de $y''+2y'+y=0$ sont toutes les fonctions f qui peuvent s'écrire $f=\lambda g_1+\mu g_2$, où $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Donc $F=\mathrm{Vect}\,(g_1,g_2)$.

Comme g_1 et g_2 ne sont pas colinéaires, H est un plan vectoriel.

En effet, il n'existe pas de réel $\alpha\in\mathbf{R}$ tel que pour tout $t\in\mathbf{R}$, $g_1(t)=\alpha g_2(t)$ ou pour tout $t\in\mathbf{R}$, $g_2(t)=\alpha g_1(t)$.

19.3.3. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 19.43.

Soit I un ensemble. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$G=\bigcap_{i\in I}F_i=\{x\in E\mid \forall i\in I,\ x\in F_i\},$$

est un sous-espace vectoriel de E.

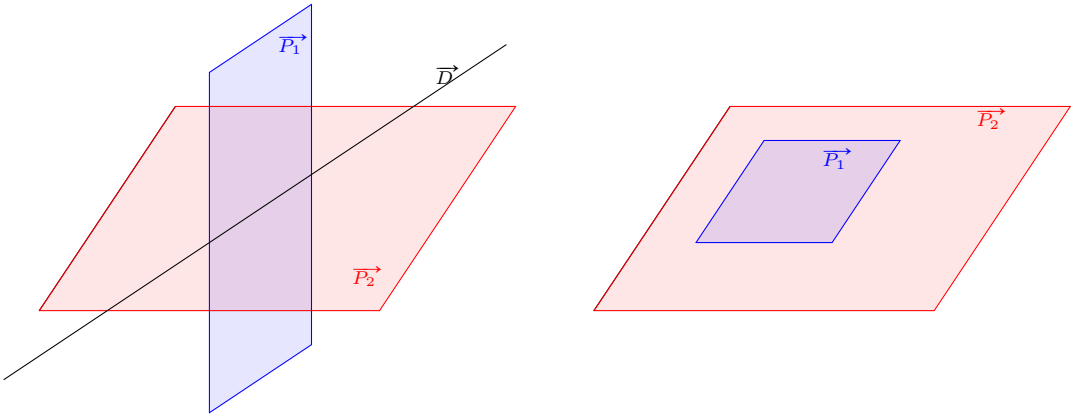
Démonstration.

- Pour tout $i\in I$, $F_i\subset E$, donc $G\subset E$.
- Pour tout $i\in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E\in F_i$, donc $0_E\in\bigcap_{i\in I}F_i=G$.
- Soit $\lambda\in\mathbf{K}, x,y\in G$. Montrons que $\lambda\cdot x+y\in G$.
  Soit $i\in I$. Alors, $x\in F_i$ et $y\in F_i$. Comme F_i est un sous-espace vectoriel, $\lambda\cdot x+y\in F_i$.
  Donc, pour tout $i\in I$, $\lambda\cdot x+y\in F_i$, d'où $\lambda\cdot x+y\in\bigcap_{i\in I}F_i=G$.

  Donc G est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 19.44. Notons que dans la proposition, I est un ensemble quelconque, non nécessairement fini, ni même dénombrable.

Exemple 19.45. 1. On se place dans l'espace vectoriel $(\overrightarrow{\mathcal{E}},+,\cdot)$ des vecteurs de l'espace de la géométrie dans l'espace.
Soient deux plans vectoriels $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.



Alors $\overrightarrow{P_1} \cap \overrightarrow{P_2}$ est soit une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ (qui est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$), soit le plan $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2}$ (si les deux plans sont confondus).

2. On se place dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}[X]$. On considère :
   $F = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \widetilde{P} \text{ est paire}\}$ (vérifier que c'est un bien un sous-espace vectoriel).
   $G = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \widetilde{P}(42) = 0\}$ (vérifier également que c'est un sous-espace vectoriel).
   Alors leur intersection $F \cap G = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid \widetilde{P} \text{ est paire et } \widetilde{P}(42) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.

Remarque technique 19.46. Pour déterminer une intersection d'espaces vectoriels, il est plus simple de décrire ceux-ci à l'aide d'équations.

Exercice d'application 19.47. Considérons

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ (2a, b, a + b) \ : \ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ puis prouver qu'il existe $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $E \cap F = \mathrm{Vect}\,(u)$.

$\hookrightarrow$ On peut prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ en vérifiant les trois points de la caractérisation, mais il semble plus rapide de passer par une description par paramètres :

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z = 3x + 2y \right\} = \left\{ (x, y, 3x + 2y) \ : \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 3), (0, 1, 2)).$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. De même, $F = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Par conséquent, $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
Décrivons F à l'aide d'équations. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$(x, y, z) \in F \iff \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2, \ (x, y, z) = (2a, a + b) \iff \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & x \\ b & = & y \\ a + b & = & z \end{array} \right.$$

Or ce dernier système admet des solutions si et seulement si $\frac{x}{2} + y = z$, si et seulement si $x + 2y = 2z$. Donc

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x + 2y = 2z \right\}.$$

Ainsi,

$$E \cap F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 2z & = & 0 \\ 3x + 2y - z & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Or,

$$(x, y, z) \in E \cap F \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 2z & = & 0 \\ 3x + 2y - z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{z}{2} \\ y & = & \frac{5}{4} z \end{array} \right.$$

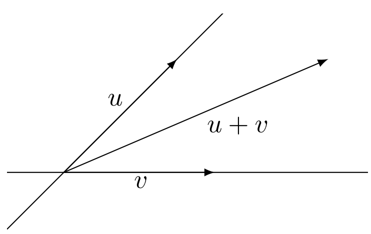
On obtient donc

$$E \cap F = \left\{ \left(-\frac{z}{2}, \frac{5z}{4}, z \right) \ : \ z \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1 \right) \right).$$

19.3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

On se place dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

⚠ **Attention** ⚠**.** La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est en général PAS un sous-espace vectoriel. Dans l'exemple représenté ci-après, on a $u + v \notin \mathrm{Vect}\,(u) \cup \mathrm{Vect}\,(v)$, donc $\mathrm{Vect}\,(u) \cup \mathrm{Vect}\,(v)$ n'est pas stable par somme.



Il est alors naturel de se demander quel est le « plus petit » sous-espace vectoriel de E contenant la réunion de F et G des sous-espaces vectoriels de E ?

Définition 19.48.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $F+G$ et on appelle **somme** des sous-espaces vectoriels F et G l'ensemble

$$F+G=\{f+g\ :\ f\in F, g\in G\}\,.$$

Proposition 19.49.

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration.

- Soit $u\in F+G$. Alors, il existe $f\in F, g\in G$, $u=f+g$. Puisque f et g sont des éléments de E, on a $u=f+g\in F$. D'où $F+G\subset E$.
- $0_E\in F$ et $0_E\in G$. Donc $0_E+0_E\in F+G$. Comme $\underbrace{0_E}_{\in F}+\underbrace{0_E}_{\in G}=0_E$, on a $0_E\in F+G$.
- Soit $(u,v)\in (F+G)^2$, $\lambda\in\mathbf{K}$. Alors il existe $(f_1,g_1)\in F\times G$ et $(f_2,g_2)\in F\times G)$ tels que $u=f_1+g_1$ et $v=f_2+g_2$.

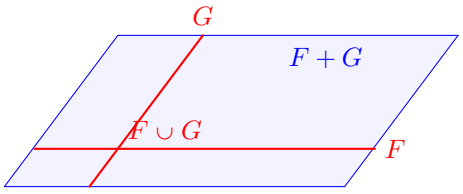
$$\begin{aligned}\lambda u+v&=\lambda(f_1+g_1)+(f_2+g_2)\\&=(\lambda f_1+f_2)+(\lambda g_1+g_2).\end{aligned}$$

Or $\lambda f_1+f_2\in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E et $\lambda g_1+g_2\in G$ car G est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\lambda u+v\in F+G$. Finalement, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition 19.50.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $F\cup G$.
C'est à dire que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F\cup G$, alors

$$F+G\subset H.$$



Démonstration.
Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant $F\cup G$. Soit $u\in F+G$. Il existe $(f,g)\in F\times G$ tel que $u=f+g$. $F\subset H$ et $G\subset H$ donc $f,g\in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, $f+g\in H$. Ainsi, $F+G\subset H$. □

Exemple 19.51. Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,\cdot)$, on considère le sous-espace vectoriel F des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $G=\mathrm{Vect}\,(\exp)$. On pose

$$h:\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\x&\longmapsto&3x^4-2x+7\exp(x)\end{array},\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\x&\longmapsto&3x^4-2x\end{array},\quad g:\begin{array}{ccc}\mathbf{R}&\longrightarrow&\mathbf{R}\\x&\longmapsto&7\exp(x)\end{array}$$

Alors, $h\in F+G$ car h est la somme de la fonction f qui appartient à F et de la fonction g qui appartient à G.

Exercice d'application 19.52. Posons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Montrer que $\text{Vect}\,(e_1)+\text{Vect}\,(e_2) = \mathbf{R}^2$.

$\hookrightarrow$ Il faut démontrer une égalité d'ensembles : procédons par double inclusion.
Les ensembles $\text{Vect}\,(e_1)$ et $\text{Vect}\,(e_2)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$, donc $\text{Vect}\,(e_1) + \text{Vect}\,(e_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En particulier,

$$\text{Vect}\,(e_1) + \text{Vect}\,(e_2) \subset \mathbf{R}^2.$$

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On remarque que $(x,y) = \underbrace{xe_1}_{\in \text{Vect}(e_1)} + \underbrace{xe_2}_{\in \text{Vect}(e_2)}$, d'où $(x,y) \in \text{Vect}\,(e_1) + \text{Vect}\,(e_2)$. Par conséquent,

$$\mathbf{R}^2 \subset \text{Vect}\,(e_1) + \text{Vect}\,(e_2)\,.$$

Finalement,

$$\text{Vect}\,(e_1) + \text{Vect}\,(e_2) = \mathbf{R}^2.$$

Exercice d'application 19.53. Posons

$$E = \left\{ P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(0) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}\,(X+1)\,.$$

Prouver que $E + F = \mathbf{R}[X]$.

$\hookrightarrow$ L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. Montrons que E en est un également :

- $E \subset \mathbf{R}[X]$.
- $0 \in E$.
- Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X]^2$. Alors $(\lambda P + Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$ car $P'(0) = 0$ et $Q'(0) = 0$. Il s'ensuit $\lambda P + Q \in E$. Ainsi E est stable par combinaison linéaire.

Finalement, ces trois points assurent que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. En particulier, $E+F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$, donc $E + F \subset \mathbf{R}[X]$.

Il reste à établir l'inclusion réciproque. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Le but est de prouver que $P \in E+F$, *i.e.* qu'il existe $(Q,T) \in E \times F$ tel que $P = Q+T$. C'est un problème d'existence : on fait l'analyse au brouillon et on ne rédige que la synthèse !
Analyse (au brouillon). Supposons qu'il existe $Q \in E$ et $T \in F$ tel que $P = Q + T$. Puisque $T \in F$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $T = a(X+1)$. Puisque $Q \in E$, $Q'(0) = 0$. Ainsi

$$P'(0) = (Q+T)'(0) = Q'(0) + T'(0) = 0 + a$$

donc $a = P'(0)$ et $Q = P - P'(0)(X+1)$.
Synthèse (à rédiger précisément). Posons $Q = P - P'(0)(X+1)$ et $T = P'(0)(X+1)$. Alors $Q+T = P$. De plus, $T \in F$ car $P'(0) \in \mathbf{R}$. Enfin, $Q'(0) = ((P - P'(0))(X+1))'(0) = P'(0) - P'(0) = 0$, donc $Q \in E$.
Ainsi $P \in E + F$. On vient de montrer que $\mathbf{R}[X] \subset E + F$.

Finalement, on a démontré par double inclusion que $\mathbf{R}[X] = E + F$.

Proposition 19.54.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E. On note $F = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ et $G = \text{Vect}\,(y_1, \ldots, y_p)$. Alors,

$$F + G = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)\,.$$

Démonstration.
On procède par double inclusion.

- Sens $\subset$. Soit $w \in F + G$. Alors il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $u + v = w$. $u \in F$ donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. De même $v \in G$ donc il existe $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbf{K}$ tels que $y = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_p y_p$.
  Alors $w = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_p y_p$.
  Donc $w \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$ et $F + G \subset \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)\,.$

- Sens $\supset$. Soit $w \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$. Alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_{n+p} \in \mathbf{K}$ tels que
$$w = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} y_1 + \cdots + \lambda_{n+p} y_p.$$
On pose $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ et $y = \lambda_{n+1} y_1 + \cdots + \lambda_{n+p} y_p$.
x est une combinaison linéaire d'éléments de F, qui est un sous-espace vectoriel de E donc est stable par combinaison linéaire de ses vecteurs. Donc $x \in F$. De même, y est une combinaison linéaire d'éléments de G et G est un sous-espace vectoriel de E donc $y \in G$.
Donc $w = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$, donc $w \in F + G$.
On a donc $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \subset F + G$.

Par double inclusion, $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) = F + G$. □

Proposition 19.55.

Toute combinaison linéaire d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est un élément de $F + G$.

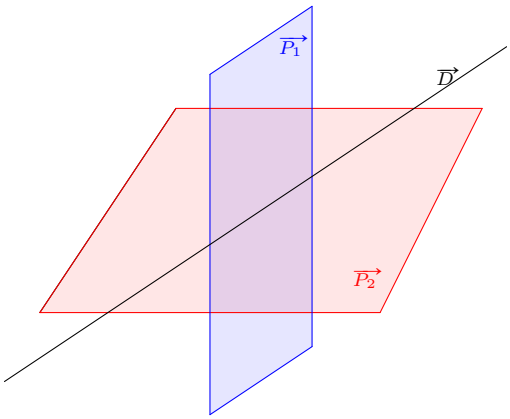
Démonstration.
Soit $u \in F$ et $v \in G$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda u \in F$ et $\mu v \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Donc $\lambda x + \mu y \in F + G$. □

19.3.5. Sous-espaces vectoriels en somme directe

La somme de sous-espaces vectoriels est un outil intéressant, mais elle souffre d'un défaut important : le manque d'unicité des décompositions. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors un vecteur de $F + G$ peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un vecteur de F et d'un de G.

Exemple 19.56. Dans l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace, on considère deux plans non confondus $\overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}_2}$. Alors leur intersection est une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$, qui appartient aux deux plans.
$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1} + \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$ car $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$.
Mais $\overrightarrow{u}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$. On peut également écrire $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{u}$ avec $\frac{1}{3}\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$.
Ainsi, il n'y a pas unicité de la décomposition de $\overrightarrow{u}$. On a trouvé deux couples différents (et même trois !) $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ et $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}, \overrightarrow{v_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2} \\ \overrightarrow{w_1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1}, \overrightarrow{w_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2} \\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \end{cases}$$



Se pose donc la question : quelle condition doit-on rajouter pour que les décompositions dans $F + G$ soient uniques ?

Définition 19.57.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière **unique** en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x, x' \in F, \forall y, y' \in G, \quad x + x' = y + y' \Longrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases}.$$

Lorsque la somme de F et G est directe, on la note $F \oplus G$.

Exercice d'application 19.58. Posons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Montrer que $\text{Vect}\,(e_1)$ et $\text{Vect}\,(e_2)$ sont en somme directe.

$\hookrightarrow$ Soit $a \in \text{Vect}\,(e_1) + \text{Vect}\,(e_2)$. Il existe $(f,g) \in \text{Vect}\,(e_1) \times \text{Vect}\,(e_2)$ tel que $a = f + g$. Soit $(f_0, g_0) \in \text{Vect}\,(e_1) \times \text{Vect}\,(e_2)$ tel que $a = f_0 + g_0$.
Puisque $f \in \text{Vect}\,(e_1)$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f = \lambda \cdot e_1$. Ainsi $f = (\lambda, 0)$. De même, il existe $\mu, \lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{R}$ tels que

$$g = \mu \cdot e_2 = (0,\mu), \quad f_0 = \lambda_0 \cdot e_1 = (\lambda_0, 0), \quad g_0 = \mu_0 \cdot e_2 = (0, \mu_0).$$

Alors $a = f + g = (\lambda, 0) + (0,\mu) = (\lambda, \mu)$ et $a = f_0 + g_0 = (\lambda_0, 0) + (0, \mu_0) = (\lambda_0, \mu_0)$, donc $\lambda = \lambda_0$ et $\mu = \mu_0$. Par conséquent, $f = f_0$ et $g = g_0$. Donc il existe un unique couple $(f,g) \in \text{Vect}\,(e_1) \times \text{Vect}\,(e_2)$ tels que $a = f + g$.
Finalement, les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\,(e_1)$ et $\text{Vect}\,(e_2)$ sont en somme directe.

Exercice d'application 19.59. Posons $F = \text{Vect}\,((1,0))$ et $G = \text{Vect}\,((1,1),(1,-1))$. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

$\hookrightarrow$ F et G ne sont pas en somme directe car $(2,0) \in F + G$ avec

$$(2,0) = \underbrace{2 \times (1,0)}_{\in F} + \underbrace{(0,0)}_{\in G} = \underbrace{(0,0)}_{\in F} + \underbrace{(1,1) + (1,-1)}_{\in G}.$$

Proposition 19.60 - Une première caractérisation.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad x + y = 0_E \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0_E \\ y & = & 0_E \end{array} \right.$$

Démonstration.

- Supposons que F et G sont en somme directe.

  Soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$. On peut décomposer 0_E en $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Comme on a supposé que F et G sont en somme directe, la décomposition de 0_E est unique donc $x = 0_E$ et $y = 0_E$.

- Supposons que

  $$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad x + y = 0_E \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0_E \\ y & = & 0_E \end{array} \right.$$

  Soient $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ tels que $x + y = x' + y'$. Alors $(x - x') + (y - y') = 0_E$. De plus, $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$. Ainsi, d'après l'hypothèse, $x - x' = 0_E$ et $y - y' = 0_E$. Finalement, $x = x'$ et $y = y'$. □

Proposition 19.61 - Seconde caractérisation.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

- Supposons que F et G sont en somme directe. Nous allons montrer par double inclusion que $F \cap G = \{0_E\}$.

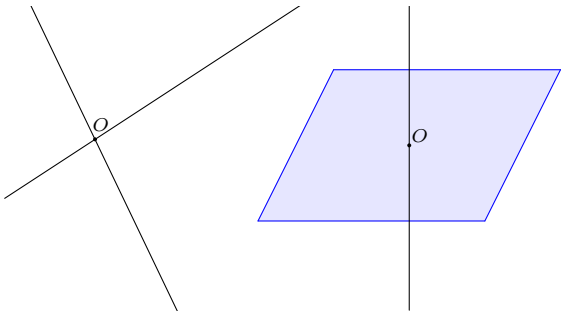
  F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc ils contiennent tous les deux 0_E. Donc $\{0_E\} \subset F \cap G$.

  Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$. Montrons que $x = 0_E$.

  On peut écrire $x = x + 0_E$ avec $x \in F$ et $0_E \in G$. On peut également écrire $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$ et $x \in G$. Comme F et G sont en somme directe, ces deux décompositions sont identiques, donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$.

- Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrons que F et G sont en somme directe.
  Soient $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$.
  On suppose que $x + y = x' + y'$. Alors $x - x' = y - y'$. $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Donc $x - x' \in F \cap G = \{0_E\}$, d'où $x - x' = 0_E$ et $x = x'$. Donc $y = y'$.
  F et G sont donc en somme directe. □

Exemple 19.62. Dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace des vecteurs de la géométrie dans l'espace, deux droites non confondues sont en somme directe, une droite et un plan ne contenant pas cette droite sont en somme directe.



Exercice d'application 19.63. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbf{R})$, on pose F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}) \,\middle|\, g(0) = g'(0) = g''(0) \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.

↪ Le point 1. est laissé en exercice. Montrons que F et G sont en somme directe. Pour cela, on va montrer que $F \cap G = \{\theta\}$ où θ est la fonction nulle. Procédons par double inclusion.

- Il est facile de voir que $\theta \in F \cap G$. En effet, F et G étant tous deux des sous-espaces vectoriels de E, il contiennent θ. Donc $\{\theta\} \subset F \cap G$.
- Soit $h \in F \cap G$. Alors $h \in F$ et $h \in G$. h est une fonction polynomiale de degré 2, donc il existe a, b et c réels tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = ax^2 + bx + c$. On a $h(0) = c$.
  Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = 2ax + b$. Donc $h'(0) = b$.
  Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h''(x) = 2a$. Donc $h''(0) = 2a$.
  Comme $h''(0) = h'(0) = h(0)$, on a forcément $a = b = c = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \theta(x)$ donc $h = \theta$. Ainsi, $F \cap G \subset \{\theta\}$.
- Par double inclusion, $F \cap G = \{\theta\}$. Donc F et G sont en somme directe.

19.3.6. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

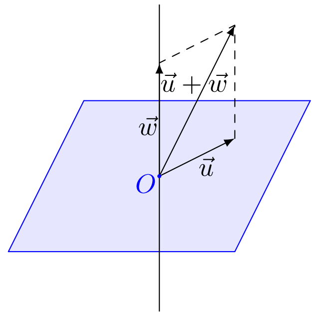
On cherche maintenant à rajouter une nouvelle condition aux sommes directes : pouvoir décomposer TOUS les vecteurs de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour cela, on a besoin de la notion de supplémentaire.

Définition 19.64.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique comme somme dun élément de F et d'un élément de G :

$$\forall x \in E,\ \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

Exemple 19.65. Dans l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la géométrie dans l'espace, un plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et une droite $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ qui n'est pas incluse dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.



Proposition 19.66 - Une première caractérisation.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $F+G=E$ et F et G sont en somme directe.

Démonstration.

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

  Supposons que F et G sont supplémentaires dans E. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on sait que $F+G \subset E$.

  Réciproquement, soit $x \in E$. Alors, $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Donc $x \in F+G$. D'où $E \subset F+G$ et $E = F+G$ par double inclusion.

  Enfin, F et G sont bien en somme directe car tout élément de $F+G$ se décompose de manière unique comme d'un élément de F et d'un élément de G.

- Supposons que $F+G=E$ et F et G sont en somme directe.

  Soit $x \in E$. Alors $x \in F+G$. Comme F et G sont en somme directe, x se décompose de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Donc F et G sont supplémentaires dans E. □

Remarque 19.67. En particulier, si F et G sont supplémentaires, on note $E = F \oplus G$.

En combinant ce résultat avec seconde caractérisation des sommes directes (cf. Proposition 19.61), on obtient :

Proposition 19.68 - Seconde caractérisation.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$F+G=E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple 19.69.

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, on déjà vu que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$, les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. En effet, nous avons démontré que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire de manière unique comme $M = A+S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$.
2. On a aussi déjà vu que toute fonction de $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donc

$$\{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ paire}\} \oplus \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ impaire}\} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Par exemple, la décomposition de exp est $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$.

Remarque technique 19.70. En pratique, pour montrer que F et G sont supplémentaires, on fait

un raisonnement par analyse-synthèse, en rédigeant soigneusement la phase d'analyse (qui montre l'unicité de la décomposition) ET la phase de synthèse (qui montre l'existence de la décomposition).

Exercice d'application 19.71. Dans l'espace vectoriel $(\mathscr{C}^0([0\,;1]),+,\cdot)$ qu'on note E, on considère :

$$F=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0\,;1])\middle|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}\quad\text{et}\quad G=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0\,;1])\mid f\text{ est constante sur }[0\,;1]\right\}.$$

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^0([0\,;1])$.
2. Montrer que $F\oplus G=E$.

↪

1. Preuve laissée au lecteur.
2. Montrons que F et G Sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^0([0\,;1])$.
   Il faut donc montrer que toute fonction φ continue sur $[0\,;1]$ s'écrit de manière unique comme une somme $\varphi=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$, c'est à dire telles que g est constante et $\int_0^1 f=0$.
   Autrement dit, pour $\varphi\in\mathscr{C}^0([0\,;1])$, on cherche à montrer que l'équation $\varphi=f+g$ d'inconnue (f,g) avec $f\in F$ et $g\in G$ possède une unique solution.
   Procédons par analyse-synthèse. Soit $\varphi\in\mathscr{C}^0([0\,;1])$.
   Analyse. On suppose que $\varphi=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$.
   On a donc que $\int_0^1 f=0$ et qu'il existe $c\in\mathbf{R}$ telle que pour tout $x\in[0\,;1]$, $g(x)=c$. Alors,

$$\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 c\,\mathrm{d}t=c.$$

   Donc $c=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, d'où l'on déduit que g est la fonction constante égale à $\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $f=\varphi-c$, *i.e.*

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,;1] & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x)-\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

   Il y a donc un unique couple solution candidat, le couple (f,g) obtenu ci-dessus.
   Synthèse. On définit

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,;1] & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x)-\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rccl} g: & [0\,;1] & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

   Ces fonctions sont bien continues sur $[0\,;1]$.
   - g est bien une fonction constante, donc $g\in G$.
   - On pose $c=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Alors,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(\varphi(t)-c)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 c\,\mathrm{d}t=c-c=0$$

     Donc $f\in F$.
   - Pour tout $x\in[0\,;1]$, on a

$$f(x)+g(x)=\varphi(x)-\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(x).$$

     Donc $f+g=\varphi$.

   Conclusion. φ s'écrit bien de manière unique $\varphi=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$. Ce raisonnement est valable pour tout $\varphi\in\mathscr{C}^0([0\,;1])$, donc F et G sont bien supplémentaires dans E.

Exercice d'application 19.72. Posons $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,x-y+2z=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}\,((1,1,1))$. Montrer que $F\oplus G=\mathbf{R}^3$.

↪ On vérifie d'abord (laissé en exercice) que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. Montrons à présent que F et G sont supplémentaires.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On cherche à montrer qu'il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$.

Analyse. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$.
Puisque $f \in F$, il existe $(x_f, y_f, z_f) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f = (x_f, y_f, z_f)$ avec $x_f - y_f + 2z_f = 0$.
Puisque $g \in G$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $g = \lambda \cdot (1, 1, 1)$.
On a $u = f + g$, d'où

$$\begin{cases} x &= x_f + \lambda \\ y &= y_f + \lambda \\ z &= z_f + \lambda \end{cases}$$

Alors $0 = x_f - y_f + 2z_f$ entraîne $0 = x - y + 2z - 2\lambda$ puis $\lambda = \frac{x-y-2z}{2}$. On obtient

$$g = \frac{x - y + 2z}{2}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad f = u - \frac{x - y + 2z}{2}(1, 1, 1),$$

ce qui montre l'unicité du couple (f, g) s'il existe.

Synthèse. Posons

$$g = \frac{x - y + 2z}{2}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad f = u - \frac{x - y + 2z}{2}(1, 1, 1).$$

Alors $f + g = u$ et $g \in G$. Vérifions que $f \in F$.

$$f = (x, y, z) - \frac{x - y + 2z}{2}(1, 1, 1) = \left(x - \frac{x - y + 2z}{2}, y - \frac{x - y + 2z}{2}, z - \frac{x - y + 2z}{2}\right)$$

et

$$\left(x - \frac{x - y + 2z}{2}\right) - \left(y - \frac{x - y + 2z}{2}\right) + 2\left(z - \frac{x - y + 2z}{2}\right) = 0$$

donc $f \in F$. On vient de montrer l'existence d'un couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $f + g = u$.

Conclusion. Par analyse-synthèse, on a montré que

$$\forall u \in \mathbf{R}^3, \ \exists!(f, g) \in F \times G, \quad u = f + g.$$

Finalement, $F \oplus G = \mathbf{R}^3$.

◇◇

19.4. Applications linéaires

E, F et G désignent des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels dans toute la suite de ce cours.

19.4.1. Définition et exemples

Définition 19.73.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application. On dit que u est une **application linéaire** (ou un **morphisme d'espaces vectoriels**) si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$.
2. Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$, $u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$.

Si u est linéaire et à valeurs dans $\mathbf{K}$, on dit alors que c'est une **forme linéaire**.

Notation 74. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 19.75. 1. L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire.

2. La fonction identité $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est linéaire.
3. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. L'application $\lambda \cdot \mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est linéaire. On appelle **homothétie** de E toute application de ce type.
4. Les applications $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \times)$ sont linéaires (on dit parfois $\mathbf{R}$-linéaire).

⚠ **Attention** ⚠**.** Il est encore parfois important de préciser si on travaille sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ou sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ si on a besoin de préciser le corps de base. Un élément de cet ensemble est alors dit $\mathbf{K}$-linéaire.

Par exemple, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est $\mathbf{R}$-linéaire, mais pas $\mathbf{C}$-linéaire (en effet, $\overline{i \cdot 1} = -i \neq i \cdot \overline{1}$).

Proposition 19.76.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

1. $u(0_E) = 0_F$.
2. $\forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \quad u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$.

Démonstration. 1. $u(0_E) = u(0_E + 0_E) = u(0_E) + u(0_E)$. D'où $0_F = u(0_E)$.

2. Par récurrence sur n à partir de la définition.

□

Proposition 19.77 - Caractérisation.

Soit $f : E \longrightarrow F$.

$$f \in \mathcal{L}[E, F) \iff \forall (\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2, \quad f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

Démonstration.
Le sens direct est immédiat. Réciproquement, supposons que pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E$, $f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$. En choisissant $\lambda = 1$ dans cette relation et pour $(x, y) \in E^2$ quelconques, on a

$$f(x + y) = f(1 \cdot x + y) = 1 \cdot f(x) + f(y) = f(x) + f(y).$$

En choisissant $x = 0$ dans la relation et $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$ quelconque, on a

$$f(\lambda \cdot x + 0) = \lambda \cdot f(x) + f(0) = \lambda \cdot f(x).$$

Finalement, par double implication, on a établi l'équivalence cherchée. □

Exercice d'application 19.78. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ $\quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & -3x \end{array}$ $\quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$

$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+3y \end{array}$ $\quad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+3y+1 \end{array}$ $\quad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbf{R}) \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ $\quad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0\,;1], \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ $\quad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}$

$\hookrightarrow$ f_1 n'est pas linéaire car $f_1(1+2) = (1+2)^2 = 9$ tandis que $f_1(1) + f_1(2) = 1 + 4 = 5$.
f_2 est une homothétie donc est linéaire.
$f_3(0) \neq 0$ donc f_3 n'est pas linéaire.
Soit $(\lambda, (x,y), (x',y')) \in \mathbf{K} \times (\mathbf{K}^2)^2$. On a

$$f_4(\lambda(x,y) + (x',y')) = f_4(\lambda x + x', \lambda y + y') = 2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') = \lambda f_4(x,y) + f_4(x',y')$$

donc f_4 est linéaire.
Toutes les autres applications sont linéaires d'après les propriétés étudiées dans les chapitres précédents.

Exercice d'application 19.79. On admet que $D^1(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (à démontrer). Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & D^1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ & y & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & y'(x) + \frac{1}{1+x^2} y(x) \end{array}\right] \end{array}$$

$\hookrightarrow$ Soit $(\lambda, y, z) \in \mathbf{R} \times D^1(\mathbf{R})^2$. Posons $f = \phi(\lambda y + z)$ et $g = \lambda\phi(y) + \phi(z)$. On doit prouver que f et g sont égales, donc que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(\lambda y + z)(x) \\ &= (\lambda y + z)'(x) + \frac{1}{1+x^2}(\lambda y + z)(x) \\ &= \lambda y'(x) + z'(x) + \frac{1}{1+x^2}(\lambda y(x) + z(z)) \\ &= \lambda\left(y'(x) + \frac{1}{1+x^2} y(x)\right) + \left(z'(x) + \frac{1}{1+x^2} z(x)\right) \\ &= \lambda\phi(y)(x) + \phi(z)(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc $f = g$. Il s'ensuit que ϕ est linéaire.

Définition 19.80.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $F = E$, on dit que f est un **endomorphisme**. L'ensemble des endomorphismes est notée $\mathcal{L}(E)$ (ainsi $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$).
- Si f est bijective, f est un **isomorphisme**.
- Si $F = E$ et f est bijective, on dit que f est un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$. Cet ensemble est appelé **groupe linéaire** de E.

Exemple 19.81.
1. $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est un automorphisme de E.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}^\star$, $\lambda \cdot \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme (la réciproque est $\frac{1}{\lambda} \cdot \mathrm{Id}_E$).

Exemple 19.82.
1. $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-5y, -x+y) \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}^2$.
2. $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$.
3. $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & (X^3 + 5X + 2)P \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

Définition 19.83.

On dit que deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.

Exemple 19.84. $\mathbf{R}_1[X]$ est isomorphe à $\mathbf{R}^2$ puisque $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0)) \end{array}$ est un isomorphisme.

19.4.2. Supplémentaires et restrictions

Théorème 19.85.

Soient E et F des espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans E (c'est à dire que $E = E_1 \oplus E_2$).
Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.
Cette application est définie de la manière suivante : pour tout $x \in E$, x s'écrit de manière unique $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ et

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2).$$

Démonstration.
Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors il existe des uniques x_1, x_2, y_1, y_2 tels que $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ et $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$. On a

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u(\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + u_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1) + \lambda u_2(x_2) + \mu u_2(y_2) \\ &= \lambda(u_1(x_1) + u_2(x_2)) + \mu(u_1(y_1) + u_2(y_2)) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

Soit $x \in E_1$. Alors, la décomposition de x dans la somme directe $E_1 \oplus E_2$ est $x + 0_E$. Donc $u(x) = u_1(x) + u_2(0_E) = u_1(x) + 0_E = u_1(x)$.

D'où $u|_{E_1} = u_1$. De même, on montre que $u|_{E_2} = u_2$.

Montrons enfin que u est unique. Soit $v \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $v|_{E_1} = u_1$ et $v|_{E_2} = u_2$.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

$v|_{E_1} = u_1$ donc $v(x_1) = u_1(x_1)$. De même, $v(x_2) = u_2(x_2)$. Par linéarité de v, on a

$$v(x) = v(x_1) + v(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) = u(x).$$

Donc $v = u$. □

Remarque 19.86. Le but de ce mode de définition est de pouvoir définir une application linéaire en donnant ses valeurs uniquement sur deux sous-vectoriels supplémentaires (et non sur tout l'espace vectoriel).

19.4.3. Opérations et structure

Proposition 19.87.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, $\alpha \in \mathbf{K}$.
Alors $\alpha u + v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \alpha u(x) + v(x) \end{array}$ est une application linéaire.

Démonstration.
Soient $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors,

$$\begin{aligned}(\alpha u + v)(\lambda x + \mu y) &= \alpha u(\lambda x + \mu y) + v(\lambda x + \mu y) \\ &= \alpha u(\lambda x + \mu y) + v(\lambda x + \mu y) \text{ car } u, v \text{ linéaires} \\ &= \alpha(\lambda u(x) + \mu u(y)) + \lambda v(x) + \mu v(y) \\ &= \lambda(\alpha u(x) + v(x)) + \mu(\alpha u(y) + v(y)) \\ &= \lambda(\alpha u + v)(x) + \mu(\alpha u + v)(y)\end{aligned}$$

Donc $\alpha u + v$ est bien linéaire. □

Corollaire 19.88.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.
En particulier, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration.
On a $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$. On conclut en utilisant la proposition précédente et le fait que l'application nulle est linéaire. □

Proposition 19.89.

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration.
Soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Alors, pour tout $x, y \in E$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}(v \circ u)(\alpha x + \beta y) &= v(u(\alpha x + \beta y)) \\ &= v(\alpha u(x) + \beta v(x)) \\ &= \alpha v(u(x)) + \beta v(u(x)) \\ &= \alpha(v \circ u)(x) + \beta(v \circ u)(x)\end{aligned}$$

$v \circ u$ est donc linéaire. □

Proposition 19.90.

Pour tout $u, u' \in \mathcal{L}(E,F)$, $v, v' \in \mathcal{L}(F,G)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, on a :

$$v \circ (\lambda u + \mu u') = \lambda v \circ u + \mu v \circ u' \qquad (\lambda v + \mu v') \circ u = \lambda v \circ u + \mu v' \circ u$$

Une autre façon de le voir est de dire que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \varphi & \longmapsto & v \circ \varphi \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ u \end{array}$$

sont des applications linéaires.

Démonstration.
Laissé en exercice. □

Proposition 19.91 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$u + v \in \mathcal{L}(E) \qquad \lambda u \in \mathcal{L}(E) \qquad u \circ v \in \mathcal{L}(E).$$

⚠ **Attention** ⚠**.** On pourrait donc être tenté de dire que $\mathcal{L}(E)$ muni la composition et de la multiplication externe par un scalaire est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Ce n'est a priori pas vrai car les éléments de $\mathcal{L}(E)$ ne sont pas tous inversibles pour la loi $\circ$ (c'est-à-dire bijectifs).

Notation 92. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note u^2 l'endomorphisme $u \circ u$. Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}$, on définit u^n en posant

$$u^0 = \mathrm{Id}_E, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, u^n = u \circ u^{n-1} = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}.$$

Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u^n = u^{n-1} \circ u$.

Définition 19.93.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On dit que u et v **commutent** lorsque $u \circ v = v \circ u$.

⚠ **Attention** ⚠**.** La composition est notée comme un produit : ainsi $u^2 \neq u \times u$!
Cette notation pourrait par ailleurs faire penser que la commutation est commutative : ça n'est pas le cas ! (il vaut mieux la voir comme la multiplication des matrices carrées).

Pr exemple, pour u : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}$ et v : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$, on a $v \circ u(0,1) = (-1,1)$ et $u \circ v(0,1) = 1,1)$.

Remarque 19.94. Comme pour le produit de matrices, on peut avoir $u \circ v = 0$ avec u et v toutes les deux non nulles.

Considérer par exemple $u : (x,y) \longmapsto (0,y)$ et $v : (x,y) \longmapsto (x,0)$.

Proposition 19.95.

Soient u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent, alors

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}, \qquad u^n - v^n = (u-v)\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k-1}.$$

Démonstration.
Laissé en exercice. □

Exemple 19.96. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u = u$.

$(u + \mathrm{Id}_E)^3 = (u + \mathrm{Id}_E) \circ (u + \mathrm{Id}_E) \circ (u + \mathrm{Id}_E) = u^3 + 3u^2 + 3u + \mathrm{Id}_E$.

$u \circ u - \mathrm{Id}_E = u^2 - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 19.97.

Soit $u \in F^E$ un isomorphisme. Alors u^{-1} est aussi un isomorphisme.

Démonstration.
L'application u étant bijective, u^{-1} l'est aussi. Il reste à montrer que $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times F^2$. Alors $u^{-1}(x) \in E$ et $u^{-1}(y) \in E$. Donc, puisque $u \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$u(\lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)) = \lambda u(u^{-1}(x)) + u(u^{-1}(y)) = \lambda x + y = u(u^{-1}(\lambda x + y))$$

L'application u étant bijective, on en déduit que $\lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y) = u^{-1}(\lambda x + y)$, ce qui entraîne $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. □

En particulier, si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $u^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

Remarque 19.98. $\mathrm{GL}(E)$ s'appelle « groupe linéaire » car il s'agit effectivement d'un groupe, en considérant l'opération $\circ$. La composition est bien interne (Proposition 19.91), associative (la composition d'application est toujours associative), possède un élément neutre (Id_E, d'après l'Exemple 19.81) et tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ possède un inverse dans $\mathrm{GL}(E)$ pour la loi $\circ$ (Proposition 19.97).

19.4.4. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 19.99 - Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
1. Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si H est un sous-espace vectoriel de F, alors $u^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. 1. Soit G un sous-espace vectoriel de E.

- $u(G) \subset F$ par définition de u.
- $0_E \in G$ car G est un sous-espace vectoriel de E. Donc $u(0_E) \in u(G)$. Or on a vu que $u(0_E) = 0_F$, donc $0_F \in u(G)$.
- Soient $y, y' \in u(G)$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe x et x' dans G tels que $u(x) = y$ et $u(x') = y'$. Alors, $\lambda y + y' = \lambda u(x) + u(x') = u(\lambda x + x')$ par linéarité de u. Or G est un sous-espace vectoriel de E et $x, x' \in G$, donc $\lambda x + x' \in G$. D'où $\lambda y + y' \in u(G)$.

Donc $u(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2. Soit H un sous-espace vectoriel de F.
   - Par définition de u, $u^{-1}(H) \subset E$.
   - Comme H est un sous-espace vectoriel de F, $0_F \in H$. Or $u(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in u^{-1}(H)$.
   - Soient $x, x' \in u^{-1}(H)$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$. $x \in u^{-1}(H)$ donc $u(x) \in H$. De même, $u(x') \in H$. Comme H est sous-espace vectoriel de F, $\lambda u(x) + u(x') \in H$. Donc $\lambda x + x' \in u^{-1}(H)$.

   Donc $u^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Définition 19.100.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de u et on note $\mathrm{Ker}(u)$ l'ensemble des antécédents de 0_F par u.

$$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

On appelle **image** de u, notée $\mathrm{Im}(u)$ l'ensemble des images des éléments de E par u.

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, u(x) = y\}.$$

Proposition 19.101.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,
- $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E,
- $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.
C'est une conséquence de la Proposition 19.99.

En effet, $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F, donc $u^{-1}(0_F) = \mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

De même, E est un sous-espace vectoriel de E, donc $u(E) = \mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Exemple 19.102. 1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f, g deux fonctions continues sur I. On pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I) & \longrightarrow & \mathcal{D}(I) \\ h & \longmapsto & h' + ah \end{array}, \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I) & \longrightarrow & \mathcal{D}(I) \\ h & \longmapsto & h'' + ah' + bh \end{array}$$

   On peut facilement vérifier que ces deux applications sont linéaires.
   $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$ est l'ensemble des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.
   Ces ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$.

2. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x + y - z, y - 2z) \end{array}$ (c'est une application linéaire).
   Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

$$u(x, y, z) = (a, b) \iff \begin{cases} x + y - z &= a \\ y - 2z &= b \end{cases}$$
$$\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x &= a - b - \lambda \\ y &= b + 2\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$$

On en déduit que tous les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ ont un antécédent par u, c'est à dire $\mathrm{Im}(u) = \mathbf{R}^2$.
En prenant $a = b = 0$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(u) &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x & = -\lambda \\ y & = 2\lambda \\ z & \lambda \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, (x,y,z) = \lambda(-1,2,1) \\ &\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}\left((-1,2,1)\right)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left((-1,2,1)\right)$.

◇◇

Remarque technique 19.103. Le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel décrit par conditions, alors que l'image est un espace vectoriel décrit par paramètres. On peut bien sûr, si nécessaire, essayer de passer d'une description à l'autre.

Exercice d'application 19.104. Posons $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y) \end{array}$.

1. Vérifier que $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$. Le décrire comme un sous-espace vectoriel engendré.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$: à quelles conditions sur a et b a-t-on $(a,b) \in \mathrm{Im}(u)$ (autrement dit : décrire $\mathrm{Im}(u)$ sous forme d'équations, si possible).

↪

1. Soient $a = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $b = (s,t,v) \in \mathbf{R}^3$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $a + \lambda b = (x+\lambda s, y+\lambda t, z+\lambda v)$. Donc

$$\begin{aligned} u(a+\lambda b) &= (x+\lambda s+y+\lambda t+z+\lambda v, x+\lambda s-(y+\lambda t)) \\ &= (x+y+z+\lambda(s+t+v), x-y+\lambda(s-t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u(a)+\lambda u(b) &= (x+y+z, x-y) + (\lambda(s+t+v), \lambda(s-v)) \\ &= (x+y+z+\lambda(s+t+v), x-y+\lambda(s-t)). \end{aligned}$$

Ainsi $u(a+\lambda b) = u(a) + \lambda u(b)$. Donc $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$.

2. Soit $a = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

$$a \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(a) = 0 \iff \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= -2y \\ x &= y \end{cases} \iff a = (y,y,-2y)$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(u) = \{(y,y,-2y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}\left((1,1,-2)\right).$$

3. $\mathrm{Im}(u) = \left\{u(a) \ : \ a \in \mathbf{R}^3\right\} = \left\{(x+y+z, x-y) \ : \ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left((1,1),(1,-1),(1,0)\right)$.
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

$$(a,b) \in \mathrm{Im}(u) \iff \exists (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad \begin{cases} x+y+z &= a \\ x-y &= b \end{cases}$$

Or ce système admet deux pivot, donc ne présente pas de ligne incompatible : il admet toujours une solution (même une infinité, dépendant d'une inconnue auxiliaire). Donc $(a,b) \in \mathrm{Im}(u)$.
Finalement, on a montré que $\mathrm{Im}(u) = \mathbf{R}^2$ (il n'y a donc pas d'équations pour décrire $\mathrm{Im}(u)$).

◇◇

Exercice d'application 19.105. Montrer que l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$$

est un endomorphisme et déterminer son noyau.

↪ Montrons dans un premier temps que ϕ est linéaire. Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons $w = \phi(u + \lambda v)$ et $r = \phi(u) + \lambda\phi(v)$. On cherche à montrer que $w = r$, *i.e.* que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = r_n$.
Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$w_n = \phi(u+\lambda v)_n = (u+\lambda v)_{n+1} - 2(u+\lambda v)_n = u_{n+1} - 2u_n + \lambda(v_{n+1} - 2v_n) = \phi(u)_n + \lambda\phi(v)_n = r_n.$$

Par conséquent, $w = r$ donc $\phi(u + \lambda v) = \phi(u) + \lambda\phi(v)$ pour tous $u, v \in \mathbf{R}^N$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. L'application ϕ est donc linéaire. Puisque l'espace de départ est égal à l'espace d'arrivée, ϕ est un endomorphisme.

Déterminons le noyau de ϕ. Par définition,

$$\text{Ker}(\phi) = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \phi(u) = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} \right\} = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} - 2u_n = 0 \right\}.$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$,

$$u \in \text{Ker}(\phi) \iff \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n \iff u \text{ est géométrique de raison } 2.$$

Donc

$$\text{Ker}(\phi) = \{(a \cdot 2^n)_{n\in\mathbf{N}} \ :\ a \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbf{N}}\right).$$

Le résultat suivant est fondamental, c'est en effet presque toujours ainsi que l'on montre l'injectivité d'une application linéaire.

Théorème 19.106.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$u \text{ est injective} \iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}.$$

Démonstration.
Supposons que u est injective. $u(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \text{Ker}(u)$ puis $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$.
Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0_F$. Or u est injective donc $x = 0_E$. D'où $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$.
Finalement, $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Soient $x, x' \in E$ tels que $u(x) = u(x')$. Montrons qu'alors $x = x'$.
On a $u(x) - u(x') = 0_F$. Par linéarité, $u(x - x') = 0_F$, donc $x - x' \in \text{Ker}(u)$. Or $\text{Ker}(u)) = \{0_E\}$, donc $x - x' = 0_E$ et $x = x'$.
Donc u est injective. □

◇◇

Remarque technique 19.107. Pour montrer qu'une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est injective, on montre que

$$\forall x \in E, \quad (u(x) = 0) \Longrightarrow (x = 0).$$

En effet, cela montre que $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$ et comme $u(0) = 0$, l'inclusion réciproque $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$ est toujours vérifiée (il faut tout de même la préciser à chaque fois).

Exercice d'application 19.108. L'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (2x+3y-z, 5x+6y-4z) \end{array}$ est-t-elle injective ?

↪ Le système $u(x, y, z) = 0$ a trois inconnues et deux équations. Il y a donc une inconnue secondaire et une infinité de solutions.

Donc $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$ et u n'est pas injective.

Exercice d'application 19.109. Montrer que l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$$

est une application surjective.

$\hookrightarrow$ On laisse au lecteur le soin de vérifier que ϕ est linéaire. Montrons que ϕ est injective.
Soit $P \in \operatorname{Ker}(\phi)$. Alors $\phi(P) = 0_{\mathbf{R}^3}$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. En particulier, P admet au moins trois racines distinctes. Or P est de degré au plus deux, donc P est le polynôme nul.
On vient de montrer que $\operatorname{Ker}(\phi) \subset \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$. L'autre inclusion étant évidente, on en déduit $\operatorname{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$ ce qui prouve l'injectivité de ϕ.

◇◇

19.5. Equations linéaires

Définition 19.110.

On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in E$, de second membre $y \in F$ et où $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 19.111. On reprend les notations de la définition.

1. L'équation $y' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$ est une équation linéaire car on peut l'écrire sous la forme $\phi(y) = 0$ avec ici $E = D^1(\mathbf{R})$, $F = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & y'(x) + \frac{1}{x^2+1} y(x) \end{array} \right] \end{array}$$

2. L'équation $y'' + 2y' + y = \cos(x)\mathrm{e}^{-2x}$ est une équation linéaire car on peut l'écrire sous la forme $\phi(y) = f$, avec ici $E = D^2(\mathbf{R})$, $F = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$,

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & y'' + 2y' + y \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x)\mathrm{e}^{-2x} \end{array}$$

3. Déterminer le terme général de la suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 3$ revient à déterminer le terme général de la solution de l'équation linéaire $\phi(u) = v$ vérifiant $u_0 = 1$, où ici $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $F = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$,

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{array}$$

   et $v = (-3)_{n \in \mathbf{N}}$.

Théorème 19.112.

Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$. On considère l'équation linéaire $\phi(x) = b$ d'inconnue $x \in E$. On suppose que l'on connaît une solution x_0 de cette équation. Alors l'ensemble des solutions est

$$\{x_0 + x_H \ : \ x_H \in \operatorname{Ker}(\phi)\}.$$

Démonstration.
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \phi(x) = b &\iff \phi(x) = \phi(x_0) \\ &\iff \phi(x) - \phi(x_0) = 0_F \\ &\iff \phi(x - x_0) = 0_F \\ &\iff x - x_0 \in \operatorname{Ker}(\phi) \\ &\iff \exists x_H \in \operatorname{Ker}(\phi),\ x = x_0 + x_H. \end{aligned}$$

□

Remarque 19.113. Dire que $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$ revient à dire que $\phi(x) = 0_F$, ce qui correspond à l'équation homogène associée à l'équation linéaire $\phi(x) = b$. On retrouve ainsi le résultat classique sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire : les solutions sont la somme d'une solution particulière avec les solutions de l'équation homogène associée.

Exercice d'application 19.114. Déterminer le terme général de la suite u définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$$

(sans utiliser les résultats sur les suites arithmético-géométriques, qu'on redémontre ici dans un cas particulier).

$\hookrightarrow$ La suite u est solution de l'équation linéaire $\phi(u) = v$, avec $v = (-3)_{n\in\mathbf{N}}$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ & u & \longmapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$$

On a déjà montré (cf. Exercice d'application 19.105) que

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbf{N}}\right).$$

Déterminons une solution particulière de l'équation linéaire. On la cherche sous la forme d'une suite constante.
Soit $r \in \mathbf{R}$. Soit $w = (r)_{n\in\mathbf{N}}$. w est solution de l'équation linéaire si et seulement si $r - 2r = -3$ si et seulement si $r = 3$. Ainsi $w = (3)_{n\in\mathbf{N}}$ est solution de l'équation linéaire.
L'ensemble des solutions de l'équation linéaire est donc

$$\left\{(3 + \lambda \cdot 2^n)_{n\in\mathbf{N}} \ : \ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Or u est une solution, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = (3 + \lambda \cdot 2^n)_{n\in\mathbf{N}}$. De plus, $u_0 = 1$ donc $\lambda = -2$. Finalement, le terme général de la suite u est $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

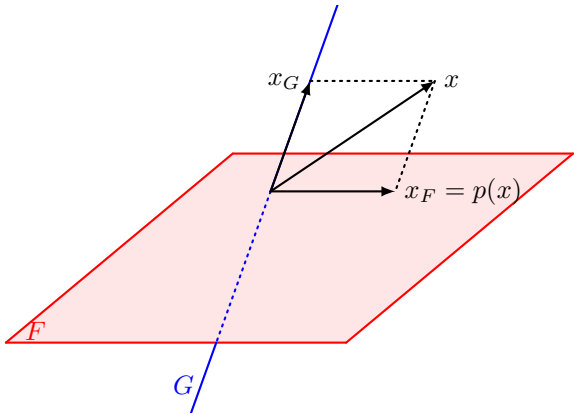
19.6. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

19.6.1. Projecteurs

Définition 19.115.

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E (*i.e.* $E = F \oplus G$).
On appelle **projection** (ou **projecteur**) sur F parallèlement à G l'application

$$\begin{array}{rccccccc} p : & E = & F & \oplus & G & \longrightarrow & E \\ & x = & \underbrace{x_F}_{\in F} & + & \underbrace{x_G}_{\in G} & \longmapsto & x_F \end{array}$$



Exemple 19.116. Considérons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Puisque tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous forme algébrique, $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$.
La projection sur $\mathbf{R}$ parallèlement à $i\mathbf{R}$ est l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.
La projection sur $i\mathbf{R}$ parallèlement à $\mathbf{R}$ est l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & i\,\mathfrak{Im}(z) \end{array}$.

Exercice d'application 19.117. Considérons $E = \mathbf{R}^2$, $E_1 = \text{Vect}\,((1,0))$ et $E_2 = \text{Vect}\,(0,1)$. Montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$ et déterminer les projecteurs associés à cette décomposition.

$\hookrightarrow$ Tout d'abord, E_1 et E_2 sont bien des sous-espaces vectoriels. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Analyse. Supposons qu'il existe $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ tels que $(x,y) = u_1 + u_2$. Puisque $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$, il existe $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $u_1 = a \cdot (1,0)$ et $u_2 = b \cdot (0,1)$. Alors

$$(x,y) = u_1 + u_2 = (a,0) + (0,b) = (a,b)$$

donc $a = x$ et $b = y$. On vient de montrer l'unicité sous réserve d'existence.

Synthèse. Posons $u_1 = x \cdot (1,0)$ et $u_2 = y \cdot (0,1)$. Alors $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$ et $u_1 + u_2 = (x,y)$. On vient d'établir l'existence.

Conclusion. Finalement, par analyse-synthèse, on a montré que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2. Donc $E = E_1 \oplus E_2$.

D'après la décomposition précédente, la projection sur E_1 parallèlement sur E_2 et la projection sur E_2 parallèlement à E_1 sont données respectivement par :

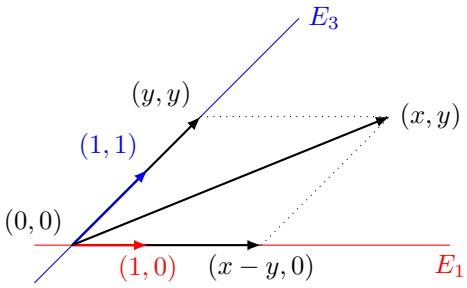
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y) \end{array}$$

Exemple 19.118. Considérons $E = \mathbf{R}^2$, $E_1 = \text{Vect}\,((1,0))$ et $E_3 = \text{Vect}\,((1,1))$.
On admet que $E_1 \oplus E_3 = E$ (se démontre par analyse-synthèse : à faire !) avec, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$(x,y) = \underbrace{(x-y,0)}_{\in E_1} + \underbrace{(y,y)}_{\in E_3}.$$

La projection sur E_1 parallèlement à E_3 et sur E_3 parallèlement à E_1 sont données respectivement par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,y) \end{array}.$$



Remarque 19.119. Si $F \oplus G = E$ et si p est la projection sur F parallèlement à G, alors :

- pour tout $x \in G$, $p(x) = 0_E$ car $x = 0_E + x$;
- pour tout $x \in F$, $p(x) = x$ car $x = x + 0_E$.

Proposition 19.120.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La projection sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E.

Démonstration.
Première démonstration. C'est une conséquence du Théorème 19.85, puisque cette projection p est définie par $p|_F = \mathrm{Id}_F$ et $p|_G = 0$.

Seconde démonstration. Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2$. Il existe $(x_1, x_2) \in F^2$ et $(y_1, y_2) \in G^2$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Ainsi,

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2).$$

Or $\lambda x_1 + y_1 \in F$ et $\lambda x_2 + y_2 \in G$ puisque F et G sous des sous-espaces vectoriels. Par conséquent, en notant p la projection sur F parallèlement à G,

$$p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y).$$

On a montré que $p \in \mathcal{L}(E)$. □

Proposition 19.121.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors

1. $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$;
2. $\mathrm{Ker}(p) = G$.

Démonstration. 1. Pour tout $x \in E$, on a $p(x) \in F$, donc $\mathrm{Im}(p) \subset F$.
Réciproquement, si $y \in F$, alors $y = p(x)$ avec $x \in E$. On a donc $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Donc $F \subset \mathrm{Im}(p)$. Donc $\mathrm{Im}(p) = F$.
De plus, soit $x \in E$. Il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tel que $x = x_F + x_G$.

$$x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) \iff (\mathrm{Id}_E - p)(x) \iff x - p(x) = 0 \iff x = x_F \iff x_G = 0 \iff x \in F.$$

Donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$.

2. On a
$$x \in \mathrm{Ker}(p) \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \iff x \in G.$$
Donc $\mathrm{Ker}(p) = G$. □

Théorème 19.122 - Caractérisation.

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
L'application u est un projecteur si et seulement si $u \circ u = u$.
Le cas échéant, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$ et u est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$:

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{u(x)}_{x \in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{x - u(x)}_{\in \mathrm{Ker}(u)}.$$

Démonstration.
Supposons que u est un projecteur sur F parallèlement à G, où F, G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit $x \in E$. Alors il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$. Par définition $u(x) = x_F$, donc

$$u \circ u(x) = u(x_F) = x_F = u(x).$$

Donc pour tout $x \in E$, $u(x) = u \circ u(x)$, donc $u = u^2$.

Supposons $u \circ u = u$. On pose alors $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u)$ et $G = \mathrm{Ker}(u)$. Montrons que F et G sont supplémentaires dans E.
Soit $x \in E$. On pose $x_1 = x - u(x)$ et $x_2 = u(x)$. On a donc $x = x_1 + x_2$.
Alors $u(x_1) = u(x) - u(u(x)) = u(x) - u(x) = 0$. Donc $x_1 \in G$.
$(u - \mathrm{Id}_E)(x_2) = u(u(x)) - u(x) = u(x) - u(x) = 0$ Donc $x_2 \in F$.
Donc $x \in F + G$. D'où $F + G = E$.
Soient $x \in F \cap G$. Alors $u(x) = 0$ et $x - u(x) = 0$. Donc $x = 0$. On en déduit que $F \cap G = \{0_E\}$.
F et G sont donc supplémentaires dans E. Comme $u(x) = x_2$, on en déduit que u est la projection sur F parallèlement à G. □

◇◇

Remarque technique 19.123. Pour montrer qu'un endomorphisme u est un projecteur, on montre que $u \circ u = u$. Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de u :

- pour trouver $\mathrm{Ker}(u)$, on résout $u(x) = 0_E$;
- pour trouver $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u)$, on résout $u(x) = x$ (recherche des vecteurs invariants par u).

Exercice d'application 19.124. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, 0) \end{array}$. L'application f est-elle un projecteur ? Si oui, préciser par rapport à quel espace vectoriel et dans quelle direction.

↪ Montrons déjà que f est linéaire. Soit $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $v = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$f(u + \lambda v) = f(x + \lambda a, y + \lambda b) = (x + y + \lambda(a + b), 0) = (x + y, 0) + \lambda(a + b, 0) = f(u) + f(v)$$

donc $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$.

Par ailleurs, si $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f \circ f(u) = f(f(x, y)) = f(x + y, 0) = (x + y + 0 + 0) = f(u).$$

On a montré que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $f^2 = f$, donc f est un projecteur. Plus précisément, f est le projecteur sur $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2})$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(f)$. Déterminons ces deux espaces.

Soit $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0 \iff (x + y, 0) = 0 \iff y = -x,$$

et

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}) \iff f(u) = u \iff (x + y, 0) = (x, y) \iff (y, -y) = (0, 0) \iff y = 0.$$

Donc

$$F = \{(x, -x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\left((1, -1)\right) \quad \text{et} \quad G = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\left((1, 0)\right).$$

Exercice d'application 19.125. Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 0) \end{array}$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

$\hookrightarrow$ On peut montrer que (à faire) : p linéaire, $p \circ p = p$, $\text{Ker}(p) = \text{Vect}\left((1, 1)\right)$ et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Vect}\left((1, 0)\right)$.

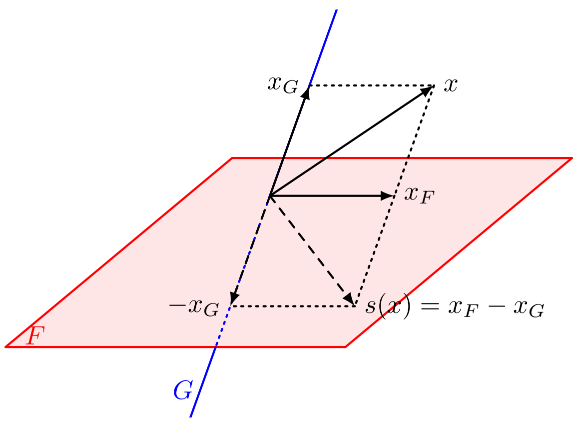
◇◇◇

19.6.2. Symétries

Définition 19.126.

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application

$$p : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$$



Proposition 19.127.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La symétrie par rapport à F parallèlement à G est un endomorphisme de E.

Démonstration.
C'est une conséquence du Théorème 19.85, puisque cette symétrie s est définie par $s|_F = \text{Id}_F$ et $s|_G = -\text{Id}_G$. □

Remarque 19.128. Reprenons les notations précédentes. Pour tout $x \in F$, $s(x) = x$ et pour tout $x \in G$, $s(x) = -x$.

Proposition 19.129.

Avec les notations de la définition précédente,

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \quad p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E).$$

Exemple 19.130.
1. Les symétries et les projections géométriques dans le plan et dans l'espace sont des projections et des symétries au sens qui vient d'être défini.
2. Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, $\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est la symétrie par rapport à $\mathbf{R}$ parallèlement à $i\mathbf{R}$.

Proposition 19.131.

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ Lorsque p est le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors :

- la projection sur G parallèlement à F est $\mathrm{Id}_E - p$;
- la symétrie par rapport à G parallèlement à F est $-s$.

Démonstration.
Soit $x \in E$. Alors $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors, $(\mathrm{Id}_E - p)(x) = x_F + x_G - x_F = x_G$. De plus, $(-s)(x) = -(x_F - x_G) = x_G - x_F$. □

Proposition 19.132.

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors

1. $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$;
2. $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration.
On a

$$x \in F \iff x_G = 0_E \iff x = s(x) \iff x - s(x) = 0_E \iff (\mathrm{Id}_E - s)(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - s).$$

Donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$. De plus,

$$x \in G \iff x_F = 0_E \iff x = -s(x) \iff x + s(x) = 0_E \iff (\mathrm{Id}_E + s)(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E + s).$$

Donc $G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$. □

Théorème 19.133 - Caractérisation.

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
L'application u est une symétrie si et seulement si $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Le cas échéant, u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration.
Supposons que u est un symétrie sur F parallèlement à G. Soit $x \in E$. Alors il existe $x_F \in F$ et

$x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$. Comme $s(x) = x_F - x_G$, on a $s(s(x)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G$. D'où $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Réciproquement, supposons $u \circ u = \mathrm{Id}_E$. On pose alors $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$. Montrons que F et G sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$. On pose $x_1 = \frac{1}{2}(x + u(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2}(x - u(x))$. On a $x_1 + x_2 = x$.
Alors $(u - \mathrm{Id}_E)(x_1) = u(\frac{1}{2}(u(x)+x)) - \frac{1}{2}(u(x)+x) = \frac{1}{2}(u(u(x)) + u(x) - u(x) - x) = \frac{1}{2}(x - x) = 0_E$.
Donc $x_1 \in F$.
Alors $(u + \mathrm{Id}_E)(x_2) = u(\frac{1}{2}(x - u(x))) + \frac{1}{2}(x - u(x)) = \frac{1}{2}(u(x) - u(u(x)) + x - u(x)) = \frac{1}{2}(-x + x) = 0_E$.
Donc $x_2 \in G$.
Donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.
Donc $x \in F + G$. D'où $F + G = E$.
Soient $x \in F \cap G$. Alors $u(x) - x = 0_E$ et $u(x) + x = 0_E$. Donc $x = -x$ et $x = 0$. On en déduit que $F \cap G = \{0_E\}$. F et G sont donc supplémentaires dans E.
Comme $u(x) = x_1 - x_2$, on en déduit que u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. □

Remarque 19.134. s est donc un automorphisme de E et $s^{-1} = s$.

◇◇

Remarque technique 19.135. Pour montrer qu'un endomorphisme u est une symétrie, on montre que $u \circ u = \mathrm{Id}_E$. Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de u :

- pour trouver $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, l'espace par rapport auquel s'effectue la symétrie, on résout $u(x) = x$ pour $x \in E$;
- pour trouver $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$, l'espace parallèlement auquel s'effectue la symétrie, on résout $u(x) = -x$.

Exercice d'application 19.136. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - 2P(0) \end{array}$. Montrer que f est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques (les sous-espaces vectoriels supplémentaires subjacents).

↪ Montrons que f est linéaire. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X]^2$.

$$f(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - 2(P + \lambda Q)(0) = P - 2P(0) + \lambda(Q - 2Q(0)) = f(P) + \lambda f(Q),$$

donc f est une application linéaire. C'est en particulier un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.

$$f^2(P) = f(f(P)) = f(P) - 2f(P)(0).$$

Or $f(P) = P - 2P(0)$, donc $f(P)(0) = P(0) - 2P(0) = -P(0)$ et par conséquent,

$$f^2(P) = P - 2P(0) - 2(-P(0)) = P.$$

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]}$: c'est donc une symétrie de $\mathbf{R}[X]$. Plus précisément, f est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]})$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]})$. Déterminons ces deux espaces.

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$?

$$P \in F \iff (f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]})(P) = 0 \iff f(P) = P \iff P(0) = 0.$$

Donc P appartient à F si et seulement si P admet 0 pour racine, si et seulement si P est divisible par X :

$$F = \{XQ \,:\, Q \in \mathbf{R}[X]\}.$$

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.

$$P \in G \iff (f + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]})(P) = 0 \iff f(P) + P = 0 \iff P = P(0).$$

Donc P appartient à G si et seulement si P est un polynôme constant. Ainsi,

$$G = \{a \,:\, a \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice d'application 19.137. Montrer que $s: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$ est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

↪ On peut montrer (à faire !) que s linéaire, $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left((1,-1)\right)$.

Exercice d'application 19.138. Montrer que $u: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est une symétrie. Donner ses éléments caractéristiques.

↪ On peut montrer (à faire !) que u linéaire, $u \circ u = \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathcal{S}_n$, $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{A}_n$.

◇◇

19.7. Une application des isomorphismes : étude des suites récurrentes d'ordre 2 à coefficients constants

On cherche à retrouver par les méthodes de l'algèbre linéaire la structure de l'ensemble des suites récurrentes d'ordre 2 à coefficients constants.

Fixons a et b deux nombres de $\mathbf{K}$ (où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), b étant non nul. On cherche à déterminer quel est l'ensemble de toutes les suites u de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note donc $E = \left\{u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$. Il est facile de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. On considère alors l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1). \end{array}$$

L'application φ est clairement linéaire. Or, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$, il existe une unique suite u telle que

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

c'est-à-dire une unique suite $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (\alpha, \beta)$. Donc φ est bijective et c'est un isomorphisme de E sur $\mathbf{K}^2$.

Puisque φ^{-1} est une application linéaire dont l'espace de départ ($\mathbf{K}^2$) est de dimension finie, elle est de rang fini, autrement dit son image $\mathrm{Im}(\varphi^{-1}) = E$ est de dimension finie. Comme de plus, φ est un isomorphisme, on peut même affirmer que $\dim(E) = \dim(\mathbf{K}^2) = 2$.

Ainsi, pour décrire complètement E, il suffit d'en trouver une base, qui est donc formée de deux suites linéairement indépendantes.

La première idée est de chercher ces suites parmi les suites géométriques.

Soit r un élément de $\mathbf{K}$. On considère la suite géométrique $u = (r^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Remarquons que $u_0 = 1$ ce qui fait que si $r = 0$, on a $\underbrace{u_2}_{=0} \neq \underbrace{au_1}_{=0} + \underbrace{bu_0}_{=b \neq 0}$. On peut donc supposer que $r \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - ar - b) = 0 \\ &\iff r^2 - ar - b = 0 \qquad (C) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation caractéristique (C) associée à cette suite.

Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$: les suites de E sont des suites complexes

Dans ce cas, (C) a soit deux racines complexes distinctes, soit une seule.

- Si (C) a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, on obtient que les deux suites $u = ({r_1}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = ({r_2}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartiennent à E.
  Dans ce cas, puisque $\varphi(u) = (1, r_1)$ et $\varphi(v) = (1, r_2)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{C}^2$ (car $r_1 \neq r_2$), les suites u et v sont aussi linéairement indépendantes (car (u, v) est l'image par l'injection φ^{-1} de la famille libre $\big((1, r_1), (1, r_2)\big)$ de $\mathbf{C}^2$).
  Ainsi, (u, v) est une famille libre de deux vecteurs de E, qui est de dimension 2 donc une base de E, ce qui prouve que
  $$E = \mathrm{Vect}(u, v) = \Big\{(\lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n)_{n\in\mathbf{N}} \;\Big|\; \lambda, \mu \in \mathbf{C}\Big\}.$$

- Si (C) n'a qu'une seule racine r_0, on n'obtient alors que la suite $u = ({r_0}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E sous la forme cherchée. Puisque E est de dimension 2, il faut encore trouver une autre suite dans E, non colinéaire à u pour obtenir une base de E.
  On a $\varphi(u) = (1, r_0)$. Si l'on trouve une suite v de E telle que $\varphi(v) = (0, r_0)$ ($r_0 \neq 0$ car $b \neq 0$), on pourra affirmer (pour la même raison que précédemment), que la famille (u, v) est une famille libre de E et donc une base de E.
  On cherche donc v telle que $v_0 = 0$, $v_1 = r_0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$. Avec les relations coefficients-racines de l'équation (C), on a $a = 2r_0$ et $b = -{r_0}^2$ ce qui donne que v vérifie :
  $$\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} = 2r_0 v_{n+1} - {r_0}^2 v_n.$$
  On calcule : $v_0 = 0$, $v_1 = r_0$, $v_2 = 2{r_0}^2$, $v_3 = 4{r_0}^3 - {r_0}^3 = 3{r_0}^3$, $v_4 = 6r_0^4 - 2{r_0}^4 = 4{r_0}^4$, etc. On peut montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = n{r_0}^n$. La suite v ainsi trouvée est non colinéaire à la suite u et ainsi la famille (u, v) est une base de E. On obtient :
  $$E = \mathrm{Vect}(u, v) = \Big\{(\lambda {r_0}^n + \mu n {r_0}^n)_{n\in\mathbf{N}} \;\Big|\; \lambda, \mu \in \mathbf{C}\Big\}.$$

Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$: les suites de E sont des suites réelles

Dans ce cas, (C) a soit deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, soit une seule racine réelle r_0 soit deux racines complexes non réelles et conjuguées $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\rho\mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in\,]0; \pi[$.

- Si (C) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, on obtient comme dans le cas complexe
  $$E = \mathrm{Vect}(u, v) = \Big\{(\lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n)_{n\in\mathbf{N}} \;\Big|\; \lambda, \mu \in \mathbf{R}\Big\}.$$

- Si (C) a une seule racine réelle r_0, on obtient comme dans le cas complexe
  $$E = \mathrm{Vect}(u, v) = \Big\{(\lambda {r_0}^n + \mu n {r_0}^n)_{n\in\mathbf{N}} \;\Big|\; \lambda, \mu \in \mathbf{R}\Big\}.$$

- Reste le cas où (C) a deux racines complexes conjuguées $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\rho\mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in\,]0; \pi[$. On sait que les suites complexes de E sont les suites de la forme $(\lambda(\rho\mathrm{e}^{i\theta})^n + \mu(\rho\mathrm{e}^{-i\theta})^n)_{n\in\mathbf{N}}$ où λ et μ sont complexes.
  Supposons qu'une telle suite ne prenne que des valeurs réelles. Alors pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient
  $$\lambda + \mu \in \mathbf{R} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \lambda\rho\mathrm{e}^{i\theta} + \mu\rho\mathrm{e}^{-i\theta} \in \mathbf{R} \quad (2).$$
  Posons $\lambda = x + iy$ et $\mu = p + iq$ où x, y, p, q sont réels. La condition (1) donne $y = -q$. On a alors
  $$\begin{aligned}\lambda\rho\mathrm{e}^{i\theta} + \mu\rho\mathrm{e}^{-i\theta} &= \rho\Big[(x + iy)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + (p - iy)(\cos(\theta) - i\sin(\theta))\Big] \\ &= \rho\Big[(x + p)\cos(\theta) - 2y\sin(\theta) + i\cos(\theta)(x - p)\Big].\end{aligned}$$
  La condition (2) impose alors $p = x$. Ainsi λ et μ sont conjugués. On obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$:
  $$\begin{aligned}\lambda(\rho\mathrm{e}^{i\theta})^n + \mu(\rho\mathrm{e}^{i\theta})^n &= \rho^n\Big[(x + iy)(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + (x - iy)(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\Big] \\ &= 2x\rho^n\cos(n\theta) - 2y\rho^n\sin(n\theta)\end{aligned}$$

et l'on constate que ce nombre est réel pour toutes les valeurs de n.
Pour $x = 1/2$ et $y = 0$, on obtient que la suite réelle $u = (\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}$ est dans E et pour $x = 0$ et $y = -1/2$, on obtient que la suite $v = (\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi dans E. Ces deux suites ne sont pas colinéaires donc forment une base de E. On retrouve alors

$$E = \mathrm{Vect}(u, v) = \Big\{(\lambda\rho^n \cos(n\theta) + \mu\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbf{N}} \;\Big|\; \lambda, \mu \in \mathbf{R}\Big\}.$$

Autre chose ? En procédant de façon très similaire, on peut aussi retrouver tous les résultats sur les solutions des équations différentielles linéaires.

Chapitre 20

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout le chapitre la lettre $\mathbf{K}$ désignera le corps commutatif $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}-$espace vectoriel.

20.1. Familles libres, génératrices et bases

Rappel : dans une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ de p vecteurs de E, les v_i peuvent être distincts ou non et l'ordre des éléments compte.

20.1.1. Familles génératrices

Définition 20.1.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E est dite **génératrice** si, et seulement si, $E = \text{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ autrement dit si, et seulement si, tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ou encore si, et seulement si :

$$\forall u \in E,\ \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Si $(v_1, ..., v_n)$ est génératrice, on dit que les vecteurs $v_1, ..., v_n$ **engendrent** E.

Remarque 20.2. Le caractère générateur ou non d'une famille ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs.

Remarque 20.3. On convient que la famille vide est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\{0_E\}$.
Dans les énoncés suivants, si $n = 0$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une famille de vecteurs de E, alors on convient que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est la famille vide.

Exemple 20.4.

1. $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel car tout nombre complexe z s'écrit $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.
2. (1) est une famille génératrice de $\mathbf{C}$ considéré comme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, puis tout nombre complexe z s'écrit $z = z \cdot 1$.
3. Soit $(v_1, \ldots v_n)$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est une famille génératrice de $\text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$.

4. Dans $\mathbf{R}^2$ les vecteurs $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$ car pour tout vecteur $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on a $(a,b) = ae_1 + be_2$.
   De même, la famille $((1,1),(1,-1)(1,0))$ est génératrice car pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $a = a(1,1) + 0(1,-1) + (a-b)(1,0)$ (d'autres coefficients pourraient convenir).
5. Dans $E = \left\{ y \in D^2(\mathbf{R}) \,\middle|\, y'' + y = 0 \right\}$, la famille $(\cos, \sin)$ est génératrice car après résolution de l'équation différentielle, on obtient
$$E = \left\{ A\cos + B\sin \,:\, (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)\,.$$
6. La famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est génératrice de $\mathbf{R}_n[X]$ car les vecteurs $1, X, ..., X^n$ appartiennent à $\mathbf{R}_n[X]$ et pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n} a_k X^k$.
7. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ car les quatre vecteurs de la famille appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,
$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 20.5. Déterminer une famille génératrice de $E = \{ P \in \mathbf{R}_3[X] \,|\, P(2) = 0 \}$.

↪ On a
$$\begin{array}{rcl} E & = & \{ P \in \mathbf{R}_3[X] \,|\, (X-2) \text{ divise } P \} \\ & = & \left\{ (X-2)(aX^2 + bX + c) \,:\, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((X-2)X^2, (X-2)X, X-2 \right), \end{array}$$
donc la famille $((X-2)X^2, (X-2)X, X-2)$ est une famille génératrice de E.

Exercice d'application 20.6. Les vecteurs $(1,2,3)$, $(2,1,4)$ et $(3,1,-1)$ engendrent-ils $\mathbf{R}^3$?

↪ Ces trois vecteurs sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que
$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(2,1,4) + \lambda_3(3,1,-1) = (a,b,c)$$
si et seulement si le système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & b \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 & = & c \end{array} \right.$$
d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ admet au moins une solution. Cherchons le rang de ce système :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & \boxed{1} & b \\ 3 & 4 & -1 & c \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 0 & a-3b \\ 2 & 1 & \boxed{1} & b \\ 1 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5}(b+c) \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-4} & 0 & 0 & a-3b+\frac{1}{5}(b+c) \\ 1 & 0 & \boxed{1} & b-\frac{1}{5}(b+c) \\ 1 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5}(b+c) \end{array} \right).$$
Il est inutile d'aller plus loin dans la réduction de la matrice : cette matrice présente trois pivots donc le système est de rang 3. Or c'est un système à trois équations, il ne présente donc pas de ligne incompatible et admet toujours une solution (ici une unique solution car il n'y a pas d'inconnue auxiliaire).
Par conséquent, pour tout $x = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que
$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(2,1,4) + \lambda_3(3,1,-1) = (a,b,c).$$
Les vecteurs $(1,2,3)$, $(2,1,4)$ et $(3,1,-1)$ engendrent donc $\mathbf{R}^3$.

Exercice d'application 20.7. Les vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,1,-1)$ engendrent-ils $\mathbf{R}^3$?

↪ Ces deux vecteurs sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que
$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(3,1,-1) = (a,b,c)$$

si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= a \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 &= b \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= c \end{cases}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ admet au moins une solution. Cherchons le rang de ce système.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & \boxed{1} & b \\ 3 & -1 & c \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & a-5b \\ 2 & \boxed{1} & b \\ \boxed{5} & 0 & b+c \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a-4b+c \\ 0 & \boxed{1} & 5b-2(b+c) \\ \boxed{5} & 0 & b+c \end{array}\right).$$

Si $a - 4b + c \neq 0$, alors le système est incompatible. Par exemple, le vecteur $(1, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, -1)$. Par conséquent, les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, -1)$ n'engendrent pas $\mathbf{R}^3$.

Proposition 20.8.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(e_1, ..., e_n)$ une famille génératrice de E.

1. Pour tout $x \in E$, la famille $(e_1, ..., e_n, x)$ est encore génératrice de E. De manière plus générale, toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est elle-même une famille génératrice de E.
2. La famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ est génératrice de E si et seulement si e_n est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, ..., e_{n-1}$.

Démonstration.

1. Une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, ..., e_n$ est encore clairement combinaison linéaire des vecteurs $e_1, ..., e_n, x$.
2. Supposons $(e_1, ..., e_{n-1})$ génératrice de E. Le vecteur e_n appartient à $E = \text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1})$, donc e_n est combinaison linéaire de $e_1, ..., e_{n-1}$.
   Réciproquement, supposons que e_n sont combinaison linéaire de $e_1, ..., e_{n-1}$.
   Alors $e_n \in \text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1})$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i \in \text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1})$. Ainsi $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $e_1, ..., e_n$, donc

   $$\text{Vect}\,(e_1, ..., e_n) \subset \text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1})$$

   Or $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice de E, donc $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_n) = E$. Ainsi

   $$E \subset \text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1})$$

   puis $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_{n-1}) = E$. Par conséquent, la famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ est une famille génératrice de E. □

Proposition 20.9.

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille génératrice de E. Alors la famille $(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_p))$ est génératrice de F.

Démonstration.
Soit $y \in F$. Puisque φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Le vecteur x appartient à E et les vecteurs $e_1, ..., e_p$ engendrent E, donc il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Alors, en utilisant la linéarité de φ, on obtient

$$y = \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(e_i).$$

On a montré que tout vecteur y de F est combinaison linéaire des vecteurs $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_p)$. Puisque ces p vecteurs sont des vecteurs de F, on en déduit qu'ils engendrent F. □

Proposition 20.10.

Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$. Soit $e_1, ..., e_n$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. La famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si le rang de la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, ..., e_p$ est n.

Démonstration.
Notons A la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, ..., e_p$ et B l'unique matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à la matrice A. On sait qu'il existe une matrice inversible M tel que $MA = B$. Dire que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice revient à dire que pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbf{K}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ ou encore que pour tout $x \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'équation matricielle $AX = x$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ admet au moins une solution. Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Puisque la matrice M est inversible, $AX = x \iff MAX = MX \iff BX = Mx$. Notons k le nombre de pivots de B, c'est-à-dire le rang de A.

Supposons que $k = n$. Alors le système $BX = Mx$ admet n pivots et n équations donc il ne présente pas de ligne incompatible : il admet toujours au moins une solution. Dans ce cas, la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Supposons que $k \neq n$. Alors $k < n$ (car la matrice B compte n lignes donc admet au plus n pivots) et la dernière ligne de la matrice B est nulle (car B est échelonnée réduite par ligne et son nombre de pivots est strictement inférieur à son nombre de lignes). Par conséquent, l'équation matricielle $BX = y$ où y est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le dernier égal à 1, n'admet pas de solution. Ainsi l'équation matricielle $AX = M^{-1}y$ n'admet pas de solution.
Il existe donc $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ ($x = M^{-1}y$ convient) tel que l'équation matricielle $AX = x$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ n'admette pas de solution : la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Par contraposée : si la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors $k = n$.

Finalement, on a établi l'équivalence cherchée en montrant les deux implications. □

Exercice d'application 20.11. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$?

↪ C'est une famille de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ mais

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \leqslant 2$$

car il ne peut y avoir qu'un seul pivot par colonne donc cette matrice compte au plus deux pivots : la famille n'est donc pas génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Exercice d'application 20.12. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$?

↪ C'est une famille de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

donc le rang de cette matrice est 3. Par conséquent, la famille est génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

20.1.2. Familles libres et familles liées

Définition 20.13.

Soit v_1 et v_2 deux vecteurs de E. On dit que v_1 et v_2 sont **colinéaires** s'il existe un scalaire λ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

Remarque 20.14. Si v_1 et v_2 sont colinéaires, alors on peut écrire $v_1 - \lambda v_2 = 0_E$ ou $\lambda v_1 - v_2 = 0_E$ donc il existe une combinaison linéaire de v_1 et v_2 qui donne 0_E où l'un au moins des coefficients de la combinaison linéaire n'est pas nul.

Définition 20.15.

Soit v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs de E. On dit que v_1, v_2 et v_3 sont **coplanaires** si l'un de ces trois vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque 20.16. Dans le cas, où v_1 s'écrit $v_1 = \lambda v_2 + \mu v_3$ où λ et μ sont des scalaires, on a $v_1 - \lambda v_2 - \mu v_3 = 0_E$, donc il existe une combinaison linéaire des trois vecteurs qui donne le vecteur nul et qui n'est pas $0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0_E$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille finie de p vecteurs de E.

Supposons temporairement que $p \geqslant 2$, c'est-à-dire que la famille contient au moins 2 vecteurs.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$ («lié linéairement» aux autres vecteurs), autrement dit, si et seulement si, il existe $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p$ tels que

$$v_i = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i}} \lambda_k v_k.$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_i + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E$$

ce qui signifie que le vecteur nul de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ dont l'un au moins des coefficients n'est pas nul.

En particulier, deux vecteurs colinéaires forment une famille liée, même chose avec trois vecteurs coplanaires.

Définition 20.17.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **liée** si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ qui ne sont pas tous nuls tels que
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E$$
c'est-à-dire si, et seulement si l'un au moins des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille (lorsque $p \geqslant 2$).
- On dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est **libre** si et seulement si elle n'est pas liée, autrement dit si, et seulement si, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, on a
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0,$$
ou encore, si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres (lorsque $p \geqslant 2$).
Dans ce cas, on dit que les vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

On convient que la famille vide est libre.

Remarque 20.18. Le caractère libre ou liée d'une famille ne dépend pas de l'ordre des éléments dans cette famille.

Exemple 20.19.
1. Une famille à un élément (x) est libre si, et seulement si, x est non nul.
2. Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
3. Une famille de trois vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas coplanaires.
4. Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est liée : par exemple, en considérant la famille $(x_1, x_2, x_3, 0_E)$ de vecteurs de E, on a $0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 1.0_E = 0_E$ donc cette famille est liée.
5. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires n'est pas libre : si $(v_1, \dots, v_n)$ est une telle famille et que par exemple $v_1 = \lambda v_2$, alors on a $v_1 - \lambda v_2 + 0.v_3 + \cdots + 0.v_p = 0_E$.

Exercice d'application 20.20. Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((1,0)(0,1))$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$,
$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0.$$
Donc la famille $((1,0),(0,1))$ est libre.

Exercice d'application 20.21. Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((1,1),(1,-1),(1,0))$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ On remarque (après avoir cherché au brouillon) que
$$(1,1) + (1,-1) - 2(1,0) = (0,0),$$
donc la famille $((1,1),(1,-1),(1,0))$ est liée.

Exercice d'application 20.22. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +,)$.

$\hookrightarrow$ Soit λ et μ des scalaires tels que $\lambda cos + \mu sin = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lambda\cos(x) + \mu\sin(x) = 0$. En $x = 0$, on a $\lambda\cos(0) + \mu\sin(0) = 0$, c'est à dire $\lambda = 0$. En $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\mu = 0$. On a montré que si $\lambda\cos + \mu\sin = 0$, alors $\lambda = \mu = 0$. Donc $(\cos, \sin)$ est libre.

Exercice d'application 20.23. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, on considère $\mathcal{F} = (f, g, h)$, avec $f = \cos$, $g : x \longmapsto xe^x$ et $h : x \longmapsto (x-1)^3$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$. On pourrait évaluer cette relation en trois valeurs réelles pour en déduire trois égalités qui nous permettraient de déterminer a, b et c. Mais on peut également utiliser les limites : si $b \neq 0$,
$$\cos(x) + bxe^x + c(x-1)^3 \underset{x \to +\infty}{\sim} bxe^x$$

donc la limite en $+\infty$ de $af + bg + cg$ vaut $\pm\infty$ suivant le signe de b. Or cette limite est nulle car la fonction $af + bg + ch$ est nulle par hypothèse. Donc $b = 0$.
Par conséquent $a\cos(x) + c(x-1)^3 = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On pourrait à nouveau montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ est absurde en utilisant les limites. On peut également évaluer cette relation en 1 pour en déduire que $a\cos(1) = 0$, donc $a = 0$. Alors $c(x-1)^3 = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $-c = 0$ donc $c = 0$.
Finalement, on a montré que si $af + bg + ch = 0$, alors $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, donc (f, g, h) est libre.

Exercice d'application 20.24. Dans $\mathbf{K}_n[X]$, la famille $\mathcal{F} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est-elle libre ?

$\hookrightarrow$ Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^i = 0$. Comme l'égalité entre deux polynômes entraîne l'égalité des coefficients, on obtient que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Proposition 20.25.

1. Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée est liée.

Démonstration.
Soit p et n deux entiers tels que $1 \leqslant p < n$. Soit $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$. Alors on a aussi $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p + 0x_{p+1} + \ldots 0x_n = 0_E$, donc la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée. Par contraposition, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. L'ordre des vecteurs n'influant pas sur le caractère libre ou lié d'une famille, la proposition est démontrée. □

Proposition 20.26.

Soit $p \in \mathbf{N}$, $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors pour tout $x \in E$, $(e_1, ..., e_p, x)$ est libre si et seulement si $x \notin \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p)$.

Démonstration.
Soit $x \in E$. Montrons que $x \in \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p)$ si et seulement si $(e_1, ..., e_p, x)$ est liée.

Supposons que $x \in \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p)$. Alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p.$$

On en déduit

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p + (-1) \cdot x = 0$$

et puisque $-1 \neq 0$, la famille $(e_1, ..., e_p, x)$ est liée.

Réciproquement, supposons $(e_1, ..., e_p, x)$ liée. Il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{p+1}) \in \mathbf{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbf{K}^{p+1}}\}$ tel que

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p + \lambda_{p+1} \cdot x = 0_E.$$

Alors $-\lambda_{p+1} \cdot x = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p$.
Supposons $\lambda_{p+1} = 0$. On obtient $\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p = 0_E$. Or la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui est absurde car $\lambda_1, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1}$ ne sont pas tous nuls.
Ainsi $\lambda_{p+1} \neq 0$ et ainsi $x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}} e_1 + \cdots + \frac{-\lambda_p}{\lambda_{p+1}} e_p$ donc $x \in \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p)$. □

Définition 20.27.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $P_0, ..., P_n \in \mathbf{K}[X]$. On dit que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une **famille de polynômes échelonnés en degré** lorsque

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdot < \deg(P_n).$$

Proposition 20.28.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $P_0, ..., P_n \in \mathbf{K}[X]$. On suppose que $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés et que $P_0 \neq 0$. Alors la famille $(P_0, ..., P_n)$ est libre.

Démonstration.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons H_k : « la famille $(P_0, ..., P_k)$ est libre ».

L'assertion H_0 est vraie car (P_0) est une famille constituée d'un seul vecteur et ce vecteur est non nul.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que H_k soit vraie. Posons $p = \deg(P_k)$. Puisque

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_k) = p,$$

alors $P_0, ..., P_k \in \mathbf{K}_p[X]$, ce qui prouve que $\text{Vect}\,(P_0, ..., P_k) \subset \mathbf{K}_p[X]$ car $\mathbf{K}_p[X]$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel contenant $P_0, ..., P_k$. Or $\deg(P_{k+1}) > p$, donc $P_{k+1} \notin \mathbf{K}_p[X]$. Ainsi $P_{k+1} \notin \text{Vect}\,(P_0, ..., P_k)$. On sait que $(P_0, ..., P_k)$ est libre d'après H_k et $P_{k+1} \notin \text{Vect}\,(P_0, ..., P_k)$, donc la proposition précédente assure que $(P_0, ..., P_{k+1})$ est libre et ainsi H_{k+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie. □

Exemple 20.29. Soit $a \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}$. La famille $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une famille libre de polynômes de degrés échelonnés ne contenant pas 0, donc c'est une famille libre.

Proposition 20.30.

Soit $p \in \mathbf{N}$, $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Alors, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_k)$ et $\text{Vect}\,(e_{k+1}, ..., e_p)$ sont en somme directe.

Démonstration.
Montrons que $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_k) \cap \text{Vect}\,(e_{k+1}, ..., e_p) \subset \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Vect}\,(e_1, ..., e_k) \cap \text{Vect}\,(e_{k+1}, ..., e_p)$. Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{K}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_{p-k} \in \mathbf{K}$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k \quad \text{et} \quad x = \alpha_1 e_{k+1} + \cdots + \alpha_{p-k} e_p.$$

Alors

$$0_E = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + (-\alpha_1) e_{k+1} + \cdots + (-\alpha_{p-k}) e_p.$$

Or $(e_1, ..., e_p)$ est libre, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = -\alpha_1 = \cdots = -\alpha_{p-k} = 0$. Par conséquent $x = 0$, ce qui prouve l'inclusion.

L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient que $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_k) \cap \text{Vect}\,(e_{k+1}, ..., e_p) = \{0_E\}$, puis on conclut que ces sous-espaces engendrés sont en somme directe. □

Proposition 20.31.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors la famille $(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_p))$ est une famille libre de vecteurs de F.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(e_i) = 0$. Puisque φ est linéaire, on en déduit que $\varphi(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Or φ est injective, donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$. On utilise alors le fait que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre pour conclure : tous les λ_i sont nuls. □

Proposition 20.32.

Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$. Soit $e_1, ..., e_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. La famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si le rang de la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, ..., e_p$ est p.

Démonstration.
Notons A la matrice dont les vecteurs colonnes sont $e_1, ..., e_p$ et B l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à la matrice A. On sait qu'il existe une matrice inversible M tel que $MA = B$. Dire que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre c'est dire que pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbf{K}$ tel que $0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, on a $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$ ou encore que l'équation matricielle $AX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ admet une unique solution (la matrice nulle est toujours solution de cette équation matricielle.
Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Puisque la matrice M est inversible, on a $AX = 0 \iff MAX = M0 \iff BX = 0$.
Notons k le nombre de pivots de B, *i.e.* le rang de A.

Supposons que $k = p$. Alors le système $BX = 0$ admet p pivots et p inconnues donc il n'admet pas d'inconnue auxiliaire : il admet toujours exactement une solution. Dans ce cas, la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Supposons que $k \neq p$. Alors $k < p$ (car la matrice B compte o colonnes donc admet au plus p pivots). Le système $BX = 0$ admet donc au moins une solution auxiliaire : il admet donc une infinité de solutions. Dans ce cas, la famille $(e_1, ..., e_p)$ n'est pas libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Par contraposée, si la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors $k = p$.

Finalement, on a établi l'équivalence cherchée en montrant les deux implications. □

Théorème 20.33.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille libre. Pour tout vecteur $u \in \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, il existe un unique p-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$. Autrement dit pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = \mu_i.$$

Cela signifie que la décomposition de tout vecteur $u \in \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ est unique.

Démonstration.
Si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i$, alors $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0_E$ et comme la famille est libre on obtient $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i. □

20.1.3. Bases

Définition 20.34.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $e_1, ..., e_n \in E$. On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, seulement si, cette famille est à la fois libre et génératrice de E.

Remarque 20.35. Si la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre, c'est une base de Vect $(e_1, ..., e_p)$.

Exemple 20.36. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. $(1, i)$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Les coordonnées d'un nombre complexe dans la base $(1, i)$ sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. (1) est une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe un unique $y \in \mathbf{C}$ (à savoir z), tel que $z = y \cdot 1$.
3. En géométrie vectorielle plane, une base est formée de deux vecteurs non colinéaires, et en géométrie vectorielle dans l'espace, de trois vecteurs non coplanaires.
4. Dans $\mathbf{K}^n$, les vecteurs
$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), ..., \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$
forment une base de $\mathbf{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{K}^n$.
5. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbf{K}_n[X]$. Cette base est appelé **base canonique** de $\mathbf{K}_n[X]$. $\mathbf{K}_n[X]$ sont ses coefficients $(a_0, \dots, a_n)$.
6. Soit n, p deux entiers naturels non nuls. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices de format $n \times p$, si l'on note $(E_{i,j})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la i-ème ligne et j-ième colonne qui vaut 1, alors la famille
$$(E_{1,1}, \dots, E_{1,p}, E_{2,1}, \dots, E_{2,p}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,p})$$
est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ appelée la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Exercice d'application 20.37. Soit $(n, a) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{K}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-a, (X-a)^2, ..., (X-a)^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

$\hookrightarrow$ $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes échelonnés en degré ne contenant pas 0 donc $\mathcal{F}$ est libre. De plus, pour tout $P \in \mathbf{K}_n[X]$, la formule de Taylor fournit :
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
donc $\mathcal{B}$ est génératrice. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice d'application 20.38. Déterminer une base de $E = \left\{ y \in D^2(R) \,\middle|\, y'' + y = 0 \right\}$.

$\hookrightarrow$ On a vu précédemment que $(\cos, \sin)$ est une famille génératrice et libre de E, donc c'est une base de E.

Proposition 20.39.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $e_1, ..., e_n$ des vecteurs de E. La famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si
$$\forall x \in E, \ \exists! (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i.$$

Démonstration.
Supposons que la famille $(e_1, ..., e_n)$ soit une base de E.
Soit $x \in E$. La famille $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice de E, donc il existe $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i$.
Supposons qu'il existe $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \cdot e_i$. Alors

$$0_E = x - x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi'_i) \cdot e_i.$$

Or la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\xi_i - \xi'_i = 0$, puis $\xi_i = \xi'_i$.
On vient de montrer que

$$\forall x \in E,\ \exists!(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i.$$

Réciproquement, supposons cette dernière assertion vérifiée. En particulier, tout vecteur $x \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs e_i, donc la famille $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice de E. De plus, puisque $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$, si $\xi_1, ..., \xi_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i = 0$, alors $\xi_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (par unicité des coefficients). Donc la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre.
Libre et génératrice, la famille $(e_1, ..., e_n)$ est donc une base de E. □

Définition 20.40.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $x \in E$. On appelle **coordonnées** de x dans la base $(e_1, ..., e_n)$ l'unique n-uplet $(\xi_1, ..., \xi_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i$.
On définit alors la **matrice de x relativement à la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 20.41.
1. Dans $\mathbf{C}$ vu comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et muni de la base $(1, i)$, les coordonnées de $a + ib$ (où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$) sont (a, b).
2. Les coordonnées de $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathbf{K}^n$ muni de sa base canonique sont $(x_1, ..., x_n)$.
3. Dans $\mathbf{K}_4[X]$ muni de sa base canonique, considérons $P = -4 + X - 7X^2 + X^3$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,...,X^4)}(P) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1, 8, 9, -1, 7, 8)$, *i.e.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Proposition 20.42.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose que E possède une base $\mathcal{B}$ constituée de n vecteurs. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.
La base $\mathcal{B}$ est constituée de n vecteurs, que l'on note $e_1, ..., e_n$: $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Montrons d'abord que φ est linéaire. Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2$. Notons $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ les cordonnées respectives de x et de y dans E. Alors

$$x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) e_i,$$

puis

$$\varphi(x + \lambda y) = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$$

donc φ est linéaire.

On montre que φ est bijective en introduisant l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \end{array}$$

et en vérifiant que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ (à faire !). □

Corollaire 20.43.

On suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B}$ qui contient n vecteurs. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteur de E.

1. La famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_p)$ formée des vecteurs colonnes $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1), ..., \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p)$ est de rang p.
2. La famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice de E si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_p)$ est de rang n.

Démonstration.
On reprend les notations de la proposition. Puisque φ est injective, la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p))$ est libre et on a vu que cela revient à dire que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_p)$ est de rang p.

Puisque φ est surjective, la famille $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice si et seulement si $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p))$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et on a vu que cela revient à dire que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_p)$ est de rang n.

Exercice d'application 20.44. Montrer que la famille de polynômes

$$\mathcal{F} = (X^3 + 3x + 1, 2X^2 - 7X + 2, X^3 + 4X - 1, X^3 + X^2 + X + 1)$$

est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

$\hookrightarrow$ C'est une famille de quatre vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$. Travaillons dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que cette matrice est de rang 4. Par conséquent, elle est libre (autant de pivots que de colonnes) et génératrice (autant de pivots que de lignes). Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Théorème 20.45.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de E_1 et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$ une base de E_2.
E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, \varepsilon_1, ..., \varphi_r)$ est une base de E.
Le cas échéant, $\mathcal{B}$ est appelée **base adaptée** à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.

Démonstration.

- Supposons que E_1 et E_2 sont supplémentaires. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E.
  - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
    $$E = E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p) + \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$$
    donc $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
  - Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_{p+r} \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1}\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{p+r}\varepsilon_r = 0_E$. Alors
    $$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in E_1} = \underbrace{(-\lambda_{p+1})\varepsilon_1 + \cdots + (-\lambda)_{p+r}\varepsilon_r}_{\in E_2}$$
    donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \in E_1 \cap E_2$ et $\lambda_{p+1}\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{p+r}\varepsilon_r \in E_1 \cap E_2$. Puisque E_1 et E_2 sont supplémentaires, on obtient $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Par conséquent, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$.
    Or $(e_1, ..., e_p)$ est libre, d'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
    De même, on montre que $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{p+r} = 0$.
    Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre.

  Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de E : c'est une base de E.
- Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E. En particulier, $(e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est libre donc, d'après la Proposition 20.30, E_1 et E_2 sont en somme directe.
  De plus, $\mathcal{B}$ engendre E, donc
  $$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p) + \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_r) = E.$$
  Par conséquent, E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
- Finalement on a démontre par double implication que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E. □

20.1.4. Opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille

Définition 20.46.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **opération élémentaire** sur les vecteurs de cette famille

- la permutation de deux vecteurs de cette famille ;
- la multiplication d'un des v_i par un scalaire non nul :
- la transformation d'un des vecteurs v_i en $v_i + \alpha v_j$ où α est un scalaire et v_j un autre vecteur de la famille (**transvection**).

Proposition 20.47.

Si on effectue une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille de vecteurs de E, alors la famille obtenue garde le même caractère libre, lié, générateur ou base que la famille initiale.
Idem si l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration.

- Avec la permutation de deux vecteurs, c'est évident.
- Vu que l'ordre des vecteurs n'influe pas sur les caractères étudiés, on multiplie le premier vecteur par un scalaire. Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. Soit α un scalaire non nul. On considère la famille $\mathcal{G} = (\alpha v_1, v_2, \dots, v_n)$.
  Supposons que $\mathcal{F}$ est libre.
  Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E &\Rightarrow (\alpha\lambda_1)v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \\ &\Rightarrow \alpha\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \qquad \text{car } \alpha \neq 0\end{aligned}$$

  Ainsi, si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est libre.
  Supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $x \in E$. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = x$. Alors on a $\dfrac{\lambda_1}{\alpha}(\alpha v_1) + \cdots + \lambda_n v_n = x$ donc $x \in \text{Vect}(\mathcal{G})$. Donc $E \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$ or il est clair que $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset E$ et donc $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$ donc $\mathcal{G}$ est génératrice.
  Comme on peut également obtenir $\mathcal{F}$ à partir d'une dilatation d'un vecteur de $\mathcal{G}$, on a que $\mathcal{G}$ libre implique $\mathcal{F}$ libre et que $\mathcal{G}$ génératrice implique $\mathcal{F}$ génératrice.
- On reprend $\mathcal{F}$. Soit $\alpha \in \mathbf{K}$. On considère $\mathcal{H} = (v_1 + \alpha v_2, v_2, \dots v_n)$.
  Supposons que $\mathcal{F}$ est libre.
  Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1(v_1 + \alpha v_2) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + (\lambda_2 + \alpha\lambda_1)v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_1\alpha = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\end{aligned}$$

  Ainsi, si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{H}$ est libre.
  Supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $x \in E$. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = x$. Alors on a $\lambda_1(v_1 + \alpha v_2) + (\lambda_2 - \lambda_1\alpha)v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_n v_n = x$ donc $x \in \text{Vect}(\mathcal{H})$. Donc $E \subset \text{Vect}(\mathcal{H})$ et donc $\text{Vect}(\mathcal{H}) = E$ donc $\mathcal{H}$ est génératrice.
  Comme on peut également obtenir $\mathcal{F}$ à partir d'une transvection d'un vecteur de $\mathcal{H}$, on a que $\mathcal{H}$ libre implique $\mathcal{F}$ libre et que $\mathcal{H}$ génératrice implique $\mathcal{F}$ génératrice.

□

Exercice d'application 20.48. On considère la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (X^3 - 1, X^3 - X, X^3 - X^2, X^3)$ de vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$. Est-elle libre, génératrice, une base de $\mathbf{R}_3[X]$?

$\hookrightarrow$ La famille $(-v_1 + v_4, -v_2 + v_4, -v_3 + v_4, v_4) = (1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ donc c'est une base donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

◇◇

Remarque technique 20.49. Pour déterminer le caractère libre ou générateur d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs dans un espace vectoriel dont on connaît une base $\mathcal{B}$, on procède par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$ pour obtenir une famille échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Pour ce faire, on part de la matrice M des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ et l'on applique la méthode du pivot sur les colonnes de M pour obtenir une matrice échelonnée par colonne.

Exercice d'application 20.50.

1. Étudier le caractère libre ou générateur de (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (-1, 2, -1)$, $v_2 = (2, -1, 3)$ et $v_3 = (2, 5, 5)$.
2. La famille (P, Q, R) de $\mathbf{R}_3[X]$ telle que $P = -2+3X^2+X^3$, $Q = 1+2X+X^3$, $R = 4X+3X^2+X^3$ est-elle liée ou libre ?

$\hookrightarrow$

1. La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{3} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$$

Cette matrice est échelonnée, contient une colonne nulle et la 3ème ligne ne contient pas de pivot, donc la famille de ses vecteurs colonnes est une famille liée non-génératrice de $\mathbf{R}^3$. Comme (v_1, v_2, v_3) se transforme en cette famille par opérations élémentaires sur les vecteurs, (v_1, v_2, v_3) est une famille liée non-génératrice de $\mathbf{R}^3$.

2. La matrice de (P, Q, R) dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_1 \Longleftrightarrow C_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & \boxed{-6} \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

Cette matrice est échelonnée sans colonne nulle, donc la famille de ses vecteurs (P_2, Q_2, R_2) est libre. Cette matrice ne contient pas un pivot par ligne, donc la famille (P_2, Q_2, R_2) n'est pas génératrice.

Comme (P_2, Q_2, R_2) a été obtenue à partir de (P, Q, R) par opérations élémentaires sur les vecteurs, (P, Q, R) est également une famille libre non-génératrice de $\mathbf{R}_3[X]$.

◇◇

20.2. Dimension d'un espace vectoriel

20.2.1. Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 20.51.

On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** si, et seulement si, il existe une famille finie de vecteur de E qui soit génératrice de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemple 20.52. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. $\{0_E\} = \text{Vect}\,(0_E)$, donc $\{0_E\}$ est de dimension finie.
2. $\mathbf{K}^n = \text{Vect}\,(e_1, ..., e_n)$ où e_i est le n-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf à la i-ième, égale à 1. Donc $\mathbf{K}_n$ est de dimension finie.
3. $\mathbf{K}_n[X] = \text{Vect}\,(1, X, \ldots, X^n)$ est de dimension finie.
4. $\mathcal{M}_2(\mathbf{K}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est de dimension finie.
   Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbf{N}^\star$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie.
5. $\left\{ y \in D^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \,\middle|\, y'' + y = 0 \right\} = \text{Vect}\,(\cos, \sin)$ est de dimension finie.

Exercice d'application 20.53. Montrer que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie.

$\hookrightarrow$ Supposons que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension finie. Alors il existe $n \in \mathbf{N}^\star$, $P_1, ..., P_n \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\mathbf{K}[X] = \text{Vect}\,(P_1, ..., P_n)$. Posons $r = \max(\deg(P_1), ..., \deg(P_n))$. Alors toute combinaison linéaire des vecteurs $P_1, ..., P_n$ est de degré r au maximum et en particulier $X^{r+1} \notin \text{Vect}\,(P_1, ..., P_n)$, d'où $X^{r+1} \notin \mathbf{K}[X]$ ce qui est absurde.
Finalement, $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie.

20.2.2. Existence de bases

Définition 20.54.

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est **incluse** dans une famille $\mathcal{G}$ de E si tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont des vecteurs de $\mathcal{G}$. On note alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Théorème 20.55 - Théorème de la base incomplète.

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{F}$ une famille libre telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Autrement dit, la famille $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs de la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration.
Soit $\mathcal{G} = (x_1, ..., x_n)$ une famille génératrice de E. On construit une famille $(\mathcal{L}_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de la façon suivante :

- on pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$.
- pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\mathcal{F}_k$ la famille constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{L}_k$ et du vecteur x_{k+1} puis on pose

$$\mathcal{L}_{k+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_k \text{ si la famille } \mathcal{F}_k \text{ est liée} \\ \mathcal{F}_k \end{cases}$$

Par construction, on remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $\mathcal{L}_i$ est libre et $x_1, ..., x_n \in \text{Vect}(\mathcal{L}_i)$ (cela se vérifie à l'aide d'une récurrence finie).
En particulier, la famille $\mathcal{L}_n$ est libre et $x_1, ..., x_n \in \mathcal{L}_n$. Ainsi $\text{Vect}(\mathcal{L}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $x_1, ..., x_n$ donc il contient $\text{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Or $\text{Vect}(x_1, ..., x_n) = E$ car la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E. Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{L}_n) = E$: la famille $\mathcal{L}_n$ est génératrice de E.
Libre et génératrice, la famille $\mathcal{L}_n$ est une base de E obtenue en ajoutant certains vecteurs x_i à la famille $\mathcal{L}$. □

◇◇◇

Remarque technique 20.56. La démonstration précédente est constructive : elle donne une méthode pour compléter une famille libre en une base, dans un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice d'application 20.57. Vérifier que la famille $((1, 2, 3), (5, 0, 1))$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ et la compléter en une base de $\mathbf{R}^3$.

↪ Notons $y_1 = (1, 2, 3)$ et $y_2 = (5, 0, 1)$. La famille (y_1, y_2) est libre dans $\mathbf{R}^3$ car elle constituée de deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ non colinéaires.
Complétons la en une base de $\mathbf{R}^3$, en lui ajoutant certains des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3).
On suit l'algorithme décrit dans la preuve précédente :

- La famille (y_1, y_2, e_1) est-elle libre ? Cela revient à regarder si $e_1 \in \text{Vect}(y_1, y_2)$ car la famille (y_1, y_2) est libre. S'il existait a, b réels tels que $e_1 = ay_1 + by_2$, alors on aurait $a + 5b = 1$, $2a = 0$ et $3a + b = 0$, ce qui est absurde. Donc e_1 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs y_1 et y_2 et la famille (y_1, y_2, e_1) est encore libre.
- La famille (y_1, y_2, e_1, e_2) est-elle libre ? Regardons si $e_2 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$. Après calculs, on obtient $\frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 2e_1 = e_2$, donc $e_2 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$.
- On s'intéresse donc ensuite à la famille (y_1, y_2, e_1, e_3). On remarque que $y_2 - 5e_2 = e_3$, donc $e_3 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$.

Finalement, la famille $\mathcal{F} = (y_1, y_2, e_2)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^3$. De plus cette famille est génératrice de $\mathbf{R}^3$ car $e_1, e_2, e_3 \in \text{Vect}(y_1, y_2, e_1)$ et (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

◇◇◇

◇◇◇

Remarque technique 20.58. En réalité, il est plus simple et plus rapide de travailler avec les matrices des coordonnées des vecteurs y_1, y_2 dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$

Exercice d'application 20.59. Reprendre l'exercice d'application précédent.

↪ La famille (y_1, y_2) est une base de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 3, ce qui est impossible car cette matrice ne compte que deux colonnes. On sait donc qu'il manque un vecteur pour obtenir une base. Au brouillon, on réduit la matrice pour savoir où sont placés les pivots :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ \boxed{2} & 0 \\ 3 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

(on aurait pu également placer les pivots autrement). Cette matrice est donc de rang 2, mais si on lui ajoute la colonne e_1 on obtient une matrice de rang 3. Au propre, on vérifie simplement que la famille (y_1, y_2, e_1) est une base de $\mathbf{R}^3$ en montrant que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, y_2, e_1)$ est de rang 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -14 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, en choisissant d'autres pivots au départ, on aurait évidemment pu choisir le vecteur e_2 ou e_3 suivant la place du pivot manquant...

Exercice d'application 20.60. On se place dans $\mathbf{R}^5$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. On considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 4, -3, -2, 1)$, $v_2 = (-1, -4, 2, 3, 1)$, $v_3 = (2, 8, 1, 2, 3)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre et la compléter en une base.

$\hookrightarrow$ La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & \boxed{-1} & 7 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & \boxed{-1} & 0 \\ -2 & 1 & \boxed{13} \\ 1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

Donc, $\mathcal{F}$ est libre. En suivant une suite similaire d'opérations puis en permutant les vecteurs , on peut obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \boxed{13} & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 15 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la famille $(v_1, v_2, v_3, e_2, e_5)$ est une base de $\mathbf{R}^5$.

◇◇◇

On en déduit le résultat fondamental suivant.

Théorème 20.61 - Théorème de la base extraite.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E contient une base de E.

Démonstration.
On applique le théorème précédent avec $\mathcal{F}$ une famille contenant un seul vecteur non nul de $\mathcal{G}$. Dans ce cas $\mathcal{F}$ est bien libre. □

Corollaire 20.62.

Tout espace vectoriel de dimension finie contient au moins une base.

En pratique, pour extraire une base d'une famille génératrice, on pourra utiliser la méthode suivante.

◇◇◇

Remarque technique 20.63. On suppose que $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \ldots, g_p\}$ est une famille génératrice de E. On écrit la matrice de $\mathcal{G}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on effectue des opérations élémentaires sur ses vecteurs en suivant la méthode du pivot sur les colonnes pour obtenir une famille $\mathcal{F}$ échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Les derniers vecteurs de $\mathcal{F}$ sont nuls. En les retirant à $\mathcal{F}$ on obtient que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice à n vecteurs de E. On voit alors que pour n indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de $[\![1, p]\!]$, le $k-$ième vecteur de f_k de $\mathcal{F}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}$. Donc la famille $(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n})$ de n vecteurs de E est génératrice de E et donc une base de E.

Exercice d'application 20.64. Soit $v_1 = (1, 4, 8)$, $v_2 = (-1, -4, 2)$, $v_3 = (1, 6, 9)$ et $v_4 = (1, 5, 9)$. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbf{R}^3$ est génératrice et en extraire une base.

↪ La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$
$$\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & \boxed{-1} & 10 \end{pmatrix}$$
$$\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a un pivot par ligne dans cette matrice échelonnée, donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice. En faisant attention aux permutations faites, on voit que v_2 est une combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc (v_1, v_3, v_4) est toujours génératrice. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base.

◇◇

20.2.3. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 20.65.

Le **cardinal** d'une famille finie de vecteurs de E est le nombre de vecteurs (distincts ou non) qui la composent.

Proposition 20.66.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie,

- le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E ;
- une famille libre qui a autant d'éléments qu'une famille génératrice est une base.

Lemme 20.67.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de E. Si $\mathcal{G}$ est génératrice de E et si tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

Démonstration du Lemme 20.67.
Soit u un vecteur de E. On sait que u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$. Or tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ donc u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ engendre E. □

Démonstration de la Proposition 20.66.
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une famille génératrice de E.

Supposons qu'il existe une famille libre $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ à p éléments telle que $p \geqslant n$.

On va montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice (avec éventuellement une permutation des g_i).

$\triangleright$ Comme $(g_1, \dots, g_n)$ est génératrice, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\ell_1 = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n$. Puisque ℓ_1 n'est pas nul, les α_i ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation des g_i on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On a alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1}\ell_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}g_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}g_n.$$

Ainsi, tout vecteur de la famille génératrice $(g_1, \dots, g_n)$ est combinaison linéaire de la famille $(\ell_1, g_2, \dots, g_n)$ et donc $(\ell_1, g_2, \dots, g_n)$ est une famille génératrice.

$\triangleright$ Soit $k < n$, supposons que $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice. Il existe donc des scalaires $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que

$$\ell_{k+1} = \beta_1\ell_1 + \cdots + \beta_k\ell_k + \beta_{k+1}g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n$$

La famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1})$ est une famille libre en tant que famille extraite d'une famille libre, ainsi ℓ_{k+1} n'est pas combinaison linéaire de $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ et donc les coefficients $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation des vecteurs $g_{k+1}, \dots, g_n$, on peut supposer que $\beta_{k+1} \neq 0$. Ainsi,

$$g_{k+1} = -\frac{\beta_1}{\beta_{k+1}}\ell_1 - \cdots - \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\ell_k + \frac{1}{\beta_{k+1}}\ell_{k+1} - \frac{\beta_{k+2}}{\beta_{k+1}}g_{k+2} - \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_{k+1}}g_n.$$

Tout vecteur de la famille génératrice $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est combinaison linéaire de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n)$ et donc $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n)$ est une famille génératrice.

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice.

En particulier lorsque $p = n$, pour $k = n$, on obtient que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est génératrice (ce qui prouve d'ailleurs le 2ème point de la proposition).

Si $p > n$, alors la sous-famille $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est aussi une famille libre, et elle contient $n+1$ éléments. Mais alors ℓ_{n+1} est une combinaison linéaire des vecteurs $\ell_1, \dots, \ell_n$ ce qui contredit le fait que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est libre. □

Définition 20.68.

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel non réduit au vecteur nul ($E \neq \{0\}$).
Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments.
Cet entier n est appelé la **dimension** de E sur $\mathbf{K}$ et noté $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbf{K}}(E)$ lorsqu'il est important de préciser le corps de base.

Démonstration.
Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Notons n_1 le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_1$ et n_2 le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_2$.

- Comme $\mathcal{B}_1$ est libre et que $\mathcal{B}_2$ est génératrice de E, on a $n_1 \leqslant n_2$.
- Comme $\mathcal{B}_2$ est libre et que $\mathcal{B}_1$ est génératrice de E, on a $n_2 \leqslant n_1$.

Finalement, $n_2 = n_1$. □

Remarque 20.69. Par convention, l'ensemble vide est une base de $\{0\}$, donc $\dim(\{0\}) = 0$.

Exemple 20.70. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. D'après les bases canoniques déjà vues,

1. $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}) = 1$. Plus généralement, $\dim(\mathbf{K}^n) = n$.
2. $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$. Plus généralement, $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) = 2n$.
3. $\mathbf{K}_n[X]$ est une espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbf{K}$.
4. Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.

5. Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

⚠ **Attention ⚠.** Pour un espace vectoriel de dimension infinie, **on ne peut pas écrire** $\dim(E) = +\infty$.

Proposition 20.71.

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

1. Toute famille libre a au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la proposition précédente. □

20.2.4. Caractérisation des bases

Théorème 20.72.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}$. Soit $f = (e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs (autant que la dimension). Il suffit que $\mathcal{F}$ soit libre ou génératrice pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E.

Démonstration.
Le cas $n = 0$ est évident. Supposons $n \neq 0$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La famille $\mathcal{B}$ compte donc n vecteurs. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est donc une matrice carrée d'ordre n.

Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice de rang n (autant de pivots que de colonnes), donc elle compte également autant de pivots que de lignes et par conséquent elle est génératrice, ce qui permet de conclure que c'est une base de E.

Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice de rang n (autant de pivots que de lignes), donc elle compte également autant de pivots que de colonnes et par conséquent elle est libre, ce qui permet de conclure que c'est une base de E. □

◇◇

Remarque technique 20.73. En pratique, pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal n est une base d'un espace vectoriel de dimension n, on montre que cette famille est libre.

Exercice d'application 20.74. Montrer que la famille $(1, j)$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$.

↪ La famille $(1, j)$ est une famille libre car les vecteurs 1 et j ne sont pas colinéaires (dans $\mathbf{C}$ vu comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel). Or $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$, donc $(1, j)$ est une base de $\mathbf{C}$.

Exercice d'application 20.75. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $\mathcal{F} = (X^2 + 3, X - 1, X + 1)$ est-elle une base ?

↪ Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} a(X^2+3) + b(X-1) + c(X+1) = 0 &\iff aX^2 + (b+c)X + 3a - b = 0 \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b + c &= 0 \\ 3a - b + c &= 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc $(X^2 + 3, X - 1, X + 1)$ est une famille libre formée de trois vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$. De plus, $\dim(\mathbf{R}_2[X]) = 3$, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

◇◇

◇◇

Remarque technique 20.76. Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$ muni d'une base $\mathcal{B}$, alors une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice carrée de rang n.

Exercice d'application 20.77. Reprendre l'exercice d'application précédent.

$\hookrightarrow$ La famille $\mathcal{F} = (X^2+3, X-1, X+1)$ est une famille de vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$. Travaillons dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$:

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3, donc $\mathcal{F}$ est une base.

◇◇

20.2.5. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 20.78.

Soit $r \in \mathbf{N}$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_r)$ une famille de vecteurs de E (famille vide si $p = 0$).
On appelle **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et on le note $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_r)$. Autrement dit

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_r) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)).$$

Remarque 20.79. Dans la définition, $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant r$ car la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Proposition 20.80.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteurs de E. Alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Démonstration.
La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et puisque $\mathcal{F}$ compte r vecteurs, dire que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension r revient à dire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, ce qui revient également à dire qu'elle est libre (car elle est génératrice par définition). □

Remarque 20.81. Le rang d'une famille de vecteurs, c'est le cardinal de la plus grande famille libre qu'on peut extraire de cette famille.

Exercice d'application 20.82. Calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$, où u, v et w désignent respectivement les suites de terme général

$$u_n = 2^3 + 3, \qquad v_n = \mathrm{e}^n - n, \qquad w_n = 3 + n^2.$$

$\hookrightarrow$ La famille $\mathcal{F}$ est constituée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Est-elle libre ?
Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $au + bv + cw = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $au_n + bv_n + cw_n = 0$. On pourra prendre trois valeurs particulières de n et regarder le système formé par les trois égalités. Utilisons plutôt les limites. On a $u_n \sim 2^n$, $v_n \sim \mathrm{e}^n$ et $w_n \sim n^2$, donc u et w sont négligeables devant v.
Supposons $b \neq 0$. Alors

$$au_n + bv_n + cw_n \sim bv_n \sim b\mathrm{e}^n.$$

En particulier, $au + bv + cw$ tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de b) en $+\infty$, ce qui est absurde car $au + bv + cw = 0$.
Donc $b = 0$ et ainsi $au+cw = 0$. La suite w est négligeable devant la suite u donc, si $a \neq 0$, $au+cw \sim au$ et à nouveau $au + cw$ tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de a) ce qui est absurde car $au + cw = 0$.
Donc $a = 0$ et ainsi $cw = 0$. En particulier, $cw_0 = 0$, puis $c = 0$.
Ainsi on a montré que $a = b = c = 0$, donc la famille (u, v, w) est libre.
Libre et génératrice de $\mathrm{Vect}\,(u, v, w)$, c'est une base de $\mathrm{Vect}\,(u, v, w)$, d'où $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

◇◇

Remarque technique 20.83. Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs lorsqu'on travaille en dimension finie, on écrit la matrice de cette famille de vecteurs dans une base, et on utilise la méthode du pivot sur les colonnes pour obtenir une famille échelonnée. Le nombre de vecteurs non nuls est alors le nombre de pivots.

Exercice d'application 20.84. Dans $\mathbf{R}^4$, calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où

$$e_1 = (1, 2, 3, 4), \quad e_2 = (0, 2, 0, 1), \quad e_3 = (2, 1, -1, 2), \quad e_4 = (-1, 3, 4, 3).$$

$\hookrightarrow$ Cette famille compte quatre vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Est-elle libre ? Travaillons dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \quad &\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 4 & \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 & 7 \\ -15 & 0 & 0 & -15 \\ 3 & 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 10 & \boxed{1} & 0 & 11 \end{pmatrix} \\
&\sim_L \begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 7 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cette matrice est de rang 3 et la famille $\mathcal{F}$ compte quatre vecteurs, donc $\mathcal{F}$ n'est pas libre. En revanche, la famille formée des vecteurs e_1, e_2, e_3 (correspondant aux colonnes où l'on a choisi les pivots) est libre d'après le calcul précédent (la matrice associée a autant de pivots que de colonnes). La famille (e_1, e_2, e_3) est libre et la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est liée donc (cf. Proposition 20.26) $e_4 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$. On en déduit que $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$, donc la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Étant libre, c'est une base de $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Par conséquent, la dimension de $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est 3, ce qui prouve que $\dim(\mathcal{F}) = 3$.

Exercice d'application 20.85. Dans $\mathbf{R}^4$, on pose $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 3, 4, 5)$, $v_3 = (1, 4, 5, 2)$ et $v_4 = (2, 5, 7, 9)$ et on note $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Calculer le rang de la famille $\mathcal{F}$.

$\hookrightarrow$ La matrice de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & \boxed{-4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a un pivot par ligne dans cette matrice échelonnée, donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice. En faisant attention aux permutations faites, on voit que v_2 est une combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc (v_1, v_3, v_4) est toujours génératrice. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base. Ainsi $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$.

◇◇

20.3. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

20.3.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 20.86.

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration.
Posons $n = \dim(E)$.

- Considérons l'ensemble des familles libres dans F. Ces familles sont également libres dans E et E est dimension n donc elle sont au maximum de cardinal n. Posons

$$A = \{\text{Card}(\mathcal{F}) \,:\, \mathcal{F} \text{ est une famille libre de } F\}.$$

  L'ensemble A est une partie non vide (par convention, l'ensemble vide est libre donc $0 \in A$) et majorée par n d'après ce que l'on vient d'expliquer. Par conséquent, cette partie possède un plus grand élément, noté p : il existe donc une famille $(f_1, ..., f_p)$ de p vecteurs de F qui soit libre.
  Soit $x \in F$. La famille $(f_1, ..., f_p, x)$ est une famille de $p + 1$ vecteurs de F donc elle n'est pas libre (car p est le nombre maximal de vecteurs d'une famille libre de vecteur de F).
  La famille $(f_1, ..., f_p)$ est libre et la famille $(f_1, ..., f_p, x)$ est liée, donc $x \in \text{Vect}\,(f_1, ..., f_p)$.
  On a montré que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs $f_1, ..., f_p$, donc la famille $(f_1, ..., f_p)$ est génératrice de F. Libre et génératrice, c'est une base de F, donc $\dim(F) = p$. Or $p \leqslant n$ car n majore A. Donc $\dim(F) \leqslant n$.
- Supposons $\dim(F) = \dim(E)$. La famille $(f_1, ..., f_p)$ précédemment introduite est une famille libre dans E et son cardinal vaut $\dim(E)$, donc c'est une base de E. En particulier, cette famille est génératrice de E. Elle est également génératrice de F (c'est une base de F) donc

$$F = \text{Vect}\,(f_1, ..., f_p) = E.$$

□

Remarque technique 20.87. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. F et G des sous-espaces vectoriels de E. Pour prouver que $F = G$, il suffit de prouver que

$$F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G).$$

20.4. Somme de deux sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 20.88.

Soit E un **K**$-$espace vectoriel et k et n deux entiers tels que $1 \leqslant k < n$.
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, , e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $G = \text{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors F et G sont en somme directe.
- Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

Démonstration. • Supposons que $\mathcal{F}$ est libre.
Soit $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x+y=0$. Par définition de F et G, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k, \qquad y = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \lambda_n e_n$$

Donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc $x = 0$ et $y = 0$. D'après la caractérisation des sommes directes, F et G sont en somme directe.

- Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors F et G sont en somme directe par le premier point. $F \oplus G \subset E$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E. De plus, pour tout $x \in E$, $x \in \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $F \oplus G$. Donc $E \subset F \oplus G$. □

Théorème 20.89.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont supplémentaires.
(ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
(iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Démonstration.
Notons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_r)$ une base de G.

- Preuve de (i)⇒(ii) et (i)⇒(iii).
Supposons que F et G sont supplémentaires. Alors on sait que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base (adaptée) de $F \oplus G$ c'est-à-dire de E. En considérant le nombre de vecteurs de ces bases, on obtient $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
On sait par ailleurs que $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.
- Preuve de (ii)⇒(i).
L'hypothèse $F \cap G = \{0\}$ entraîne que F et G sont en somme directe donc $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base (adaptée) de $F \oplus G$. Donc $\dim(F \oplus G) = p + r = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et ainsi $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E. Ainsi, $F + G = E$ et finalement, F et G sont supplémentaires dans E.
- Preuve de (iii)⇒(i).
L'hypothèse $F + G = E$ entraîne que $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une famille génératrice de E (en effet, tout $x \in E$ peut s'écrire $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, et en écrivant $x_F = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$ et $x_G = \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_r g_r$, on obtient $x = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_r g_r$).
L'hypothèse $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ donne $p + r = n$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de n vecteurs de E, donc une base de E. D'après la proposition précédente, F et G sont supplémentaires. □

Exercice d'application 20.90. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tels que } x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

↪ Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in E &\iff x + y + z = 0 \\
&\iff \exists \lambda, \quad \mu \in \mathbf{R}, \begin{cases} x &= -\lambda - \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) \\
&\iff (x, y, z) \in \text{Vect}\,((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))
\end{aligned}$$

Donc $E = \text{Vect}\,((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Comme $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, E est donc de dimension 2.

F est évidement de dimension 1. On a donc $\dim(E) + \dim(F) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$.

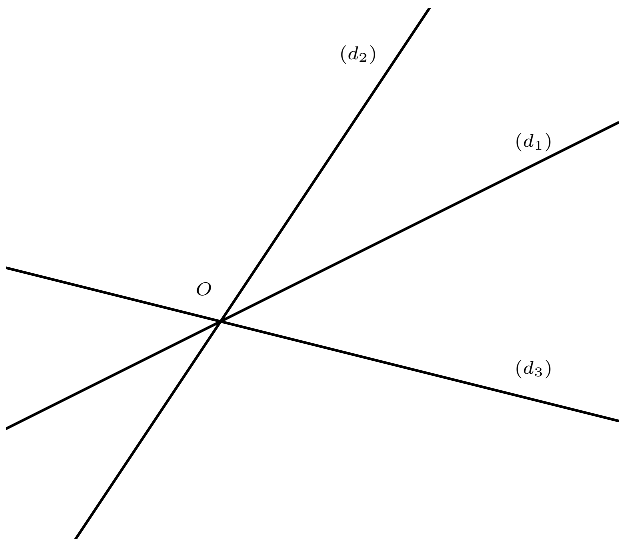
Soit $(x, y, z) \in F \cap E$. $x \in F$ donc $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Comme $(x, y, z) \in E$, $\lambda + \lambda + \lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $(x, y, z) = 0$. Ainsi, $F \cap E = \{0\}$ donc F et E sont supplémentaires.

Théorème 20.91.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
Il existe alors dans E un sous-espace vectoriel G tel que F et G soient supplémentaires.

Démonstration.
Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E en lui adjoignant des vecteurs $g_1, \ldots, g_r$.
Par définition, on a $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p)$ et l'on pose $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, \ldots, g_r)$.
Comme $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de E, les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E. □

Remarque 20.92. Attention, il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. Prenons l'exemple du plan vectoriel, représenté ci-dessous. (d_2) et (d_3) sont deux supplémentaires de la droite vectoriel (d_1) (toute droite vectorielle distincte de (d_1) convient).



◇◇

Remarque technique 20.93. Pour déterminer un supplémentaire de F dans E, on procède ainsi :

1. on déterminer une base de F ;
2. on complète cette famille en une base de E ;
3. les vecteurs rajoutés engendrent un supplémentaire de F.

Exercice d'application 20.94. Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x = y \text{ et } z = 0 \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^3$.

↪ $F = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 0))$, donc $((1, 1, 0))$ est une base de F (famille libre car constituée d'un seul vecteur et génératrice par définition).
Complétons cette famille en une base de $\mathbf{R}^3$. Travaillons dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

de rang 3, donc $((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
Finalement, $G = \mathrm{Vect}\,((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^3$.

◇◇

Théorème 20.95 - Formule de Grassmann.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration.
$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F car c'est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F et F est de dimension finie, donc $F \cap G$ est de dimension finie. Posons $p = \dim(F)$, $q = \dim(G)$ et $r = \dim(F \cap G)$.
$F \cap G \subset F$ donc $r \leqslant p$ et $F \cap G \subset G$ donc $r \leqslant q$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_r)$ une base de $F \cap G$.
Puisque $F \cap G \subset F$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_r)$ est une famille libre de vecteurs de F donc cette famille peut être complétée en une base de F : il existe donc $a_1, a_2, ..., a_{p-r} \in F$ tel que $(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_{p-r})$ soit une base de F.
Pour les mêmes raisons, il existe $b_1, ..., b_{q-r} \in G$ tels que $(e_1, ..., e_r, b_1, ..., b_{q-r})$ soit une base de G.
Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_{p-r}, b_1, ..., b_{q-r})$ est une base de $F+G$.

- $F = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_{p-r})$ et $G = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r, b_1, ..., b_{q-r})$, donc

$$\begin{aligned} F+G &= \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_{p-r}) + \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r, b_1, ..., b_{q-r}) \\ &= \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_{p-r}, e_1, ..., e_r, b_1, ..., b_{q-r}) \\ &= \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r, a_1, ..., a_{p-r}, b_1, ..., b_{q-r}). \end{aligned}$$

  Par conséquent, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $F+G$ (et $F+G$ est de dimension finie).
- Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_1, ..., \mu_{p-1}, \nu_1, ..., \nu_{q-r} \in \mathbf{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p-r} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{q-r} \nu_i b_i = 0_E.$$

  Alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p-r} \mu_i a_i}_{\in F} = \underbrace{\sum_{i=1}^{q-r} (-\nu_i) b_i}_{\in G}.$$

  Donc $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p-r} \mu_i a_i \in F \cap G$ et $\sum_{i=1}^{q-r} \nu_i b_i \in F \cap G$.
  Or $F \cap G = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r)$. Par conséquent, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{q-r} (-\nu_i) b_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$.
  Alors $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{q-r} \nu_i b_i = 0_E$.
  Or $(e_1, ..., e_r, b_1, ..., b_{q-r})$ est une famille libre car c'est une base de G. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, q-r]\!]$, $\nu_i = 0$ (et $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$).
  De manière analogue, on obtient que $\mu_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p-r]\!]$ puis $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Finalement, $\mathcal{B}$ est une base de $F+G$, donc

$$\dim(F+G) = r + p - r + q - r = p + q - r.$$

□

20.5. Applications linéaires en dimension finie

20.5.1. Image d'une base

Théorème 20.96.

Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors la famille $((u(e_1), ..., u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Démonstration.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) \in \mathrm{Im}(u)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. La famille $\mathcal{B}$ est une base de E donc elle est génératrice de E. Par conséquent, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ tels que $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. L'application u étant linéaire, on en déduit

$$x = u(a) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(e_i).$$

ce qui montre que x est combinaison linéaire de $u(e_1), ..., u(e_n)$.

On a montré que tout vecteur x de $\mathrm{Im}(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u(e_1), ..., u(e_n)$ et que ces vecteurs appartiennent à $\mathrm{Im}(u)$. Donc $(u_(e_1), ..., u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. □

Exemple 20.97. Considérons

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ & P & \longmapsto & XP' - P(0) \end{array}$$

On vérifie que $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_2[X], \mathbf{R}[X])$. La famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$, donc $(u(1), u(X), u(X^2))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. On calcule :

$$u(1) = -1, \quad u(X) = X \times 1 - 0 = X, \quad u(X^2) = X \times 2X - 0 = 2X^2,$$

donc

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(-1, X, 2X^2\right) = \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2\right) = \mathbf{R}_2[X].$$

Remarque 20.98. En particulier, $\dim(u(E)) \leqslant \dim(F)$.

Théorème 20.99.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F.
Alors, il existe une unique application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_k) = f_k$$

Cette application est définie de la manière suivante : pour tout $x \in E$, en notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$,

$$u(x) = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$$

On résume souvent cette proposition par la phrase :
« **Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ.** »

Démonstration.
Montrons que l'application u ainsi définie est linéaire.

Soient $x, y \in E$. Alors, il existe $x_, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in E$, tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors,

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) e_k \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda x + \mu y$ a pour coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$: $(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$. Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) f_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k f_k + \sum_{k=1}^{n} \mu y_k f_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k f_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k f_k \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire. Montrons que u est unique.

Soit $v \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que ir tpit $k \in [\![1, n]\!]$, $v(e_k) = f_k$. Montrons que $v = u$.

Alors, pour tout $x \in E$, en notant $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on a $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Par linéarité de v, on a donc que $v(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k v(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k = u(x)$.

Donc pour tout $x \in E$, $u(x) = v(x)$, d'où $v = u$. □

Exercice d'application 20.100. Déterminer l'unique application $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ telle que

$$u(1,0,0) = (1,-1), \quad u(0,1,0) = (2,3), \quad u(0,0,1) = (0,0).$$

↪ On obtient, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$u(x,y,z) = x \cdot u(1,0,0) + y \cdot u(0,1,0) + z \cdot (0,0,1) = (x + 2y, -x + 3y).$$

Corollaire 20.101.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u et v deux applications linéaires de E dans F.
Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = v(e_k)$, alors les applications u et v sont égales.
On résume souvent cela ainsi :
« **deux applications linéaires qui coïncident sur une base de E sont égales.** »

20.5.2. Rang d'une application linéaire

Définition 20.102.

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, on dit que f est de rang fini et l'on appelle **rang** de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. On la note $\mathrm{rg}(f)$.

Remarque 20.103. Pour que u soit de rang fini, il est suffisant que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1. F est de dimension finie (car $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F) ;
2. E est de dimension finie (car si $(e_1,..,e_p)$ est une base de E, alors $(u(e_1),...,u(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$, ce qui prouve que u est de rang fini avec $\mathrm{rg}(u) \leqslant p$).

Remarque 20.104. Si E est de dimension finie et si $(e_1,...,e_p)$ est une famille génératrice de E, alors

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1),...,u(e_p))$$

car la famille $(u(e_1),...,u(e_p))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ et, par définition,

$$\mathrm{rg}(u(e_1),...,u(e_p)) = \dim \mathrm{Vect}\left((u(e_1),...,u(e_p)\right).$$

Exercice d'application 20.105. Déterminer le rang de u : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x-y) \end{array}$.

$\hookrightarrow$ $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$, donc $(u(1,0),u(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Donc

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u(1,0),u(0,1)) = \mathrm{rg}((1,1,2),(1,-1,-1)) = 2$$

car la famille $((1,1,2),(1,-1,-1))$ est par définition génératrice de $\mathrm{Vect}\left((1,1,2),(1,-1,-1)\right) = \mathrm{Im}(u)$ et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice d'application 20.106. Déterminer le rang de u : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$.

$\hookrightarrow$ $(1,X,...,X^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$, donc $(u(1),u(X),...,u(X^n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(0,1,2X,...,nX^{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(1,2X,nX^{n-1}\right).$$

La famille $(1,2X,...,nX^{n-1})$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. De plus, elle est libre car c'est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$. Par conséquent, $\mathrm{rg}(u) = n$.

Proposition 20.107.

Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Si f et g sont de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g))$.
2. Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
3. Si f est de rang fini et si g est un isomorphisme, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration. 1. • On sait que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Comme $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension finie, il en va de même pour $\mathrm{Im}(g \circ f)$ donc $g \circ f$ est de rang fini. Comme $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(g))$, on a $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
• On sait que $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$ donc $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f))$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.

2. $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}((g\circ f)\circ f^{-1})\subset \mathrm{Im}(g\circ f)$ donc $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}(g\circ f)$ et c'est gagné.
3. On a $\mathrm{Im}(g\circ f)=g(\mathrm{Im}(f))$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie donc $g(\mathrm{Im}(f))$ est de dimension finie. Notons $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et comme g est injective, $g(\mathcal{B})$ est libre. Or on sait que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ donc $g(\mathcal{B})$ est une famille génératrice $g(\mathrm{Im}(f))$. Au final, $g(\mathcal{B})$, qui a autant de vecteurs que $\mathcal{B}$, est une base de $\mathrm{Im}(g\circ f)$ donc $\mathrm{rg}(g\circ f)=\mathrm{rg}(f)$.

□

Théorème 20.108.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

1. f est injective $\iff (f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre $\iff \mathrm{rg}(f)=n$.
2. f est surjective $\iff (f(e_1),\dots,f(e_n))$ est génératrice de $F\iff \mathrm{rg}(f)=p$.
3. f est bijective $\iff (f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de $F\iff \mathrm{rg}(f)=p=n$.

Démonstration.
Les implications directes de la première colonne ont déjà été prouvées (Propositions 20.9 et 20.31).

1. Si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre. Soit $x\in\mathrm{Ker}(f)$. $\mathcal{B}$ est une base de E donc $x=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n$ avec $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{K}$.
   $f(x)=\lambda_1f(e_1)+\cdots+\lambda_nf(e_n)$ Comme $x\in\mathrm{Ker}(f)$, $f(x)=0$ donc $0=\lambda_1f(e_1)+\cdots+\lambda_nf(e_n)$. Comme $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre, $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Donc $x=0$.
   $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ donc f est injective. Donc f injective équivaut à $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre.
   Si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre, alors c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{rg}(f)=n$.
   Si $\mathrm{rg}(f)=n$, alors $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre. Donc les équivalences de la première ligne sont démontrées.
2. Si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est génératrice. Soit $x\in F$. Alors il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{K}$ tels que $x=\lambda_1f(e_1)+\cdots+\lambda_nf(e_n)$. Par linéarité, $x=f(\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n)$. Donc $x\in\mathrm{Im}(f)$.
   On en déduit que $\mathrm{Im}(f)=F$ et donc que f est surjective.
   Si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une famille de F génératrice de F, alors $\mathrm{rg}((f(e_1),\dots,f(e_n)))=\dim(F)=p$.
   Réciproquement, si $\mathrm{rg}((f(e_1),\dots,f(e_n)))=p=\dim(F)$, alors $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est génératrice. Donc les équivalences de la deuxième ligne sont démontrées.

□

Définition 20.109.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F.

Corollaire 20.110.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. S'il existe une application linéaire injective de E vers F, alors $\dim(E)\leqslant\dim(F)$.
2. S'il existe une application linéaire surjective de E vers F, alors $\dim(F)\leqslant\dim(E)$.
3. Si E est de dimension n, alors E est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
4. E et F sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Démonstration.
On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Si il existe f injective de E vers F, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, donc $\dim(F) \geqslant n = \dim(E)$.
2. Si il existe f surjective de E vers F, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F, donc $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$.
3. L'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \end{array}$$
est un morphisme d'après le Théorème 20.99. De plus, l'image de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ est $\mathcal{B}$ donc φ est bijective d'après le Théorème 20.108, donc est un isomorphisme. donc E et $\mathbf{K}^n$ sont isomorphes.
4. Si E et F ont la même dimension, alors ils sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{K}^n$. Donc il existe des isomorphismes $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{K}^n$ et $\psi : \mathbf{K}^n \longrightarrow F$. Alors $\psi \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme.
Réciproquement si E et F sont isomorphes, ils ont la même dimension d'après les deux premiers points.

□

Corollaire 20.111.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}$$

Démonstration.
C'est une conséquence directe du Théorème 20.108. En effet, si E et F sont de même dimension, on a $p = n$ dans la dernière colonne d'équivalences du théorème et toutes les propositions du théorème sont équivalentes. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Ce résultat est faux en dimension infinie. Par exemple, l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est surjective mais pas injective.

Corollaire 20.112.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'application u est un automorphisme dès que u est injective ou surjective.

20.5.3. Théorème du rang

Lemme 20.113.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F. $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E.

Démonstration.
Notons $n = \dim(E)$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dont on note $(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n)$ une base. Le Lemme **??** assure que $(f(\varepsilon_{r+1}), ..., f(\varepsilon_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Vect}\,(f(\varepsilon_{r+1}), ..., f(\varepsilon_n))$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$, *i.e.* G est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$. □

Théorème 20.114 - Théorème du rang.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Autrement dit,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$$

Démonstration.
Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. On a

$$\dim(E) = \dim(G) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

et d'après le lemme précédent G est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$ donc

$$\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

□

Chapitre 21

Représentation matricielle des applications linéaires

Qu'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?[1]

Dans tout ce chapitre, **K** désigne **R** ou **C**.

21.1. Matrice d'une application linéaire

21.1.1. Définition

Soit E et F deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.

On note $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de F.

Soit u une application linéaire de E dans F.

On a vu dans un chapitre précédent qu'en dimension finie, une application linéaire entre deux espaces vectoriels est entièrement déterminée par l'image d'une base donc l'application u est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u(e_j)$ $(j \in [\![1, p]\!])$.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on peut exprimer le vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$: il existe un unique $n-$uplet de scalaires $(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})$ tel que

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\ f_i = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \cdots + a_{n,j} f_n,$$

les scalaires $(a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})$ étant les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

La donnée de la famille de scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ définit donc entièrement l'application linéaire u, et

1. Un Kinder injectif, car son noyau est réduit à $\{0\}$.

nous pouvons la présenter à l'aide de la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1),\dots,u(e_p)) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{matrix}$$

dont les colonnes sont les matrices-colonnes qui représentent les vecteurs $u(e_1),\dots,u(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Définition 21.1.

On reprend les notations précédentes.
On appelle **matrice de l'application linéaire** u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$, définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1),\dots,u(e_p))$$

Dans le cas où u est un endomorphisme de E (c'est-à-dire où $E = F$), on peut choisir (mais ce n'est pas obligatoire) la même base au départ et à l'arrivée et, dans ce cas, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u).$$

Remarque 21.2. La matrice d'un endomorphisme est une matrice carrée.

Exemple 21.3. Notons $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et considérons

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (3x-2y-z, x+4z) \end{array}$$

On a

$$u(b_1) = (3,1) = 3c_1 + c_2, \qquad u(b_2) = (-2,0) = -2c_1, \qquad u(b_3) = (-1,4) = -c_1 + 4c_2$$

d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant la base $\mathcal{D} = ((1,1),(1,0))$ de $\mathbf{R}^2$ et cherchons la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. On a :

$$\begin{aligned} u(1,0,0) &= (3,1) = 1\cdot(1,1) + 2\cdot(1,0), \\ u(0,1,0) &= 0\cdot(1,1) + (-2)\cdot(1,0), \\ u(0,0,1) &= (-1,4) = 4\cdot(1,1) + (-5)\cdot(1,0), \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 21.4. Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de l'application D suivante relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

↪ On a

$$D(1) = 0, \qquad D(X) = 1, \qquad D(X^2) = 2X, \qquad D(X^3) = 3X^2$$

d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 21.5. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E (de dimension n). Considérons l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

⚠ **Attention** ⚠**.** On fera attention au fait que si l'on prend pas la même base dans au départ et à l'arrivée alors la matrice de Id_E dans ces bases n'est pas la matrice identité.

Exemple 21.6. Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ (on vérifie facilement que c'est une base de $\mathbf{R}^3$) et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

21.1.2. Image d'un vecteur

Proposition 21.7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $u \in E$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Démonstration.

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. On a $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot e_k$.

Puisque u est linéaire, on en déduit $u(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot u(e_k)$. Or par définition, $u(e_k)$ a pour coordonnées dans $\mathcal{B}_F$: $\begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} f_i.$$

Donc,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} f_i \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (a_{i,k} x_k) f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k \right) f_i$$

Finalement, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{p} a_{n,k} x_k \end{pmatrix} = AX.$ □

Exercice d'application 21.8. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $u(1,1,1)$ puis $u(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

↪ On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(1,1,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Donc $u(1,1,1) = (3,0,7)$. En reproduisant le même calcul, on trouve $u(x,y,z) = (x+2y, -2x+3y-z, 4y+3z)$.

Exercice d'application 21.9. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau de u.

↪ Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Notons (a_0, a_1, a_2) ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (ce sont ses coefficients). Alors :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(u) & \iff & u(P) = 0 \\ & \iff & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(P)) = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 + 2a_1 & = & 0 \\ 4a_0 + 5a_1 + 3a_2 & = & 0 \\ a_1 - a_2 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Or

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$P \in \mathrm{Ker}(u) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & -2a_1 \\ a_2 & = & a_1 \end{array} \right. \iff P = a_1(-2 + X + X^2).$$

Finalement, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(-2 + X + X^2\right)$.

21.1.3. Opérations sur les applications linéaires et calcul matriciel

Proposition 21.10.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v).$$

Démonstration.
La j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u + v)$ est formée des coordonnées de $(\lambda u + v)(e_j)$ dans $\mathcal{B}_F$. Or les coordonnées de $u(e_j)$ (resp. $v(e_j)$) dans $\mathcal{B}_F$ constituent la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$), d'où le résultat puisque $(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j)$. □

Corollaire 21.11.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.
L'application est linéaire d'après la proposition précédente. De plus, l'application est bijective car une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base.

Corollaire 21.12.

$\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Démonstration.
On utilise $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ (en effet, une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est formée des matrices $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j), où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$) et le corollaire précédent. □

Proposition 21.13.

Soit G un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $r \in \mathbf{N}^\star$ et soit $\mathcal{B}_G$ une base de G. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{B}_E = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1,\dots,f_q)$, $\mathcal{B}_G = (g_1,\dots,g_r)$,

$$A = (a_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q \\ 1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u), \quad B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \text{ et } C = (c_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v\circ u).$$

Par définition des scalaires $a_{j,k}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$, on a

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ eu(e_k) = \sum_{j=1}^{q} a_{j,k} f_j, \qquad \forall j \in [\![1,q]\!],\ v(f_j) = \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} g_i, \qquad \forall k \in [\![1,p]\!],\ v\circ u(e_k) = \sum_{i=1}^{r} c_{i,k} g_i$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a aussi :

$$\begin{aligned} v \circ u(e_k) = v\left(u(e_k)\right) &= v\left(\sum_{j=1}^{q} a_{j,k} f_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{q} a_{j,k} v(f_j) = \sum_{j=1}^{q} \left(a_{j,k} \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} g_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{r} a_{j,k} b_{i,j} g_i = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{q} b_{i,j} a_{j,k}\right) g_i \end{aligned}$$

Ainsi par unicité des coordonnées dans une base, on obtient

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \forall k \in [\![1, p]\!], \qquad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j} a_{j,k}.$$

On constate donc que l'on a : $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v).M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Il faut bien prendre garde à l'ordre des bases et celui des matrices ! On rappelle que la produit matriciel n'est pas commutatif !

Corollaire 21.14 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$.
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.
3. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)\right)^k$ (on rappelle que $u^k = u \circ \cdots \circ u$).

Démonstration.
Les points 1. et 2. sont des conséquences directes des Proposition 21.10 et 21.13 respectivement. De plus, le point 3. s'obtient à l'aide du point 2. et d'une récurrence immédiate. □

Exercice d'application 21.15. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par $u(x, y) = (3x+6y, -x-2y)$. Déterminer la matrice A de u relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et, à partir de celle-ci, montrer que u est un projecteur.

↪ On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors $u \circ u$ a pour matrice A^2 relativement à la base canonique. Or $A^2 = A$. Les endomorphismes $u \circ u$ et u ont donc la même matrice relativement à la base canonique, on en déduit qu'ils sont égaux : $u \circ u = u$ et on vient de montrer que u est un projecteur.

21.1.4. Représentation des isomorphismes

Dans ce paragraphe, on suppose que E et F sont de même dimension $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 21.16.

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. Le cas échéant,

$$M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)\right)^{-1}.$$

Démonstration.

- Supposons que u est un isomorphisme.

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_E}(u\circ u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

et

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u^{-1}\circ u) = M_{\mathcal{B}_F}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

ce qui prouve que $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible et que $M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1}$.

- Réciproquement, suppose $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ inversible. Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que u est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On sait que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Or $u(x) = 0_F$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0$ et, comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0$ (toutes les coordonnées de x sont nulles), ce qui signifie que $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. Puisque $0_E \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Ainsi u est injective et avec $\dim(E) = \dim(F)$, on en déduit que u est un isomorphisme. □

Corollaire 21.17 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible. Le cas échéant,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)^{-1}.$$

Exercice d'application 21.18. En déterminant l'endomorphisme Φ associé à la matrice suivante relativement à la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$, montrer que cette matrice est inversible et donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

$\hookrightarrow$ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\Phi(X^k)$ a pour coordonnées $(\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots, \binom{k}{k}, 0, \ldots, 0)$ relativement à la base canonique, donc

$$\Phi(X^k) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} X^p = (X+1)^k.$$

Finalement, $\Phi : P \longmapsto P(X+1)$.
Notons Ψ l'endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ défini par $\Psi(P) = P(X-1)$. Alors $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id} = \Psi \circ \Phi$, ce qui montre que Φ est un automorphisme, d'automorphisme inverse Ψ : la matrice A est donc inversible (ce qu'on pouvait facilement observer puisqu'elle est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux non tous nuls) et son inverse est :

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}(\Psi) = \begin{pmatrix} (-1)^0\binom{0}{0} & (-1)^1\binom{1}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & (-1)^2\binom{1}{1} & \cdots & (-1)^{n+1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+n}\binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 21.19.

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$. La famille $(a_1, \ldots, a_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible.

Démonstration.
Notons u l'endomorphisme de E défini pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ par $u(e_i) = a_i$, de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(a_1,\dots,a_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$. Alors,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(a_1,\dots,a_n) \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) \text{ est inversible} \\ & \text{si et seulement si} & u \text{ est un automorphisme de } E \\ & \text{si et seulement si} & (u(e_1),\dots,u(e_n)) \text{ est une base de } E \\ & \text{si et seulement si} & (a_1,\dots,a_n) \text{ est une base de } E. \end{array}$$

□

21.2. Changements de bases

21.2.1. Changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

Soit x un vecteur de E dont on note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, autrement dit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i.$$

On note X et X' les matrices colonnes représentant x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Comment passe-t-on de X' à X ?

Comme $x = \mathrm{Id}_E(x)$, on peut écrire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) M_{\mathcal{B}'}(x).$$

La j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Définition 21.20.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ dont la j-ième colonne (pour tout $j \in [\![1,n]\!]$) est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc la matrice carrée de type $n \times n$:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1,\dots,e'_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$$

telle que $\forall j \in [\![1,n]\!],\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

Remarque 21.21. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ (attention au sens de l'écriture !).

◇◇

Remarque technique 21.22. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ permet de calculer les coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Soit $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. On remarque que $x = \mathrm{Id}_E(x)$, ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, d'où

$$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times X'.$$

Pour déterminer les coordonnées X' dans $\mathcal{B}'$, il s'agit donc de résoudre un système linéaire (ou d'inverser la matrice de passage).

Exercice d'application 21.23. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Considérons $E = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base (u_θ, v_θ) avec $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$, $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (en exercice : vérifier que c'est bien une base).

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Soit $e \in \mathbf{R}^2$. On note (x, y) les coordonnées de e dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de e dans $\mathcal{B}'$.

↪

1. On a $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. Notons (x', y') les coordonnées de e dans $\mathcal{B}'$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de trigonométrie,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$\begin{cases} x' &= \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ y' &= -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

◇◇

Proposition 21.24.

Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$, autrement dit

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \qquad \text{et} \qquad (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

Réciproquement, toute matrice inversible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ constituée des vecteurs colonnes de la matrice M.

Démonstration.

- Tout d'abord, puisque la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est une matrice représentant l'application Id_E qui est bijective, elle est inversible. Plus précisément,

$$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E))^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

- Pour la réciproque, il suffit de vérifier que les vecteurs colonnes de M forment bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Puisque M représente l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui transforme la base canonique $\mathcal{B}$ en les vecteurs colonnes de M, ces derniers vecteurs forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ si et seulement si l'endomorphisme est bijectif, ce qui est le cas car M est inversible. □

Proposition 21.25.

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ trois bases de E.

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}.$$

Démonstration.
On a $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$. □

Exemple 21.26. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, considérons $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec :

$$e'_1 = (1,0,0), \qquad e'_2 = (1,1,0), \qquad e'_3 = (1,1,1).$$

On a

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or $e'_1 = e_1$ et $e'_2 = e_1 + e_2$, donc $e_2 = e'_2 - e'_1$. Enfin, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$ donc $e_3 = e'_3 - e'_2$. Donc

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21.2.2. Formules de changement de bases

Proposition 21.27 - Formule de changement de bases.

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \text{et } Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$$

ou encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = (P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Démonstration.
On a $u = \mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A & \mathcal{C} \\ E & \xrightarrow{\quad u \quad} & E \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \uparrow \mathrm{Id}_E & & \mathrm{Id}_F \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{B}} = [P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}]^{-1} \\ E & \xrightarrow{\quad u \quad} & F \\ \mathcal{B}' & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = A' & \mathcal{C}' \end{array}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

□

Corollaire 21.28 - Cas particulier des endomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = P^{-1}AP$$

ou encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'},$$

et pour tout entier naturel n,

$$(A')^n = P^{-1}A^nP.$$

Démonstration.
Les deux premières égalités sont une conséquence directe de la proposition. La dernière relation est obtenue en utilisant la formule de changement de bases pour l'endomorphisme u^n. □

Exemple 21.29. Reprenons l'espace de polynômes $\mathbf{R}_3[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$ et de la base $\mathcal{B}' = (X^3, X^2(X+1), X(X+1)^2, (X+1)^3)$ définie précédemment.

On considère l'endomorphisme de dérivation d'un polynôme : $D : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$.

L'expression de l'endomorphisme D dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la matrice représentant D dans la base $\mathcal{B}'$, on utilise la proposition précédente (formule de changement de base) : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse (on la donne ici sans calcul, à vous de le faire) est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D)$ en calculant

$$\begin{aligned} P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D)\ P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D). \end{aligned}$$

En reprenant le polynôme Q de coordonnées $(2, 1, -3, 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$, les coordonnées de Q' dans la base $\mathcal{B}'$ sont égales à

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(D)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que si $Q = 2X^3 + X^2(X+1) - 3X(X+1)^2 + (X+1)^3$ alors

$$Q'(X) = -7X^3 + 11X^2(X+1) - 4X(X+1)^2.$$

Exercice d'application 21.30. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et on considère

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x-2y, 2x-2y) \end{array}$$

1. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Soit $c_1 = (1,2)$ et $c_2 = (2,1)$. Justifier que $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Donner $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ et le lien entre A et A'.

↪

1. $f(1,0) = (3,2)$ et $f(0,1) = (-2,-2)$, donc $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
2. c_1 et c_2 ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc $\mathcal{C}$ est une famille libre. En outre, $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = 2 = \dim(\mathbf{R}^2)$, donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
   De plus, $f(c_1) = (-1,-2) = -c_1$ et $f(c_2) = (4,2) = 2c_2$, donc

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   D'après les formules de changement de bases, $A' = P^{-1}AP$ où $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 21.31. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et considérons les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$. On peut montrer que $E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^4$ (cf. TD). On considère la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Déterminer la matrice de s relativement à la base canonique.

↪ Notons $\mathcal{B}' = (e_1+e_2, e_3+e_4, e_1-e_2, e_3-e_4)$. C'est une base de $\mathbf{R}^4$ (car E_1 et E_2 sont supplémentaires et les deux couples de vecteurs sont respectivement des bases de E_1 et de E_2). Alors, puisque $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de changement de bases :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) &= P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s)P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, $s(x,y,z,t) = (y,x,t,z)$.

21.3. Noyau, image et rang d'une matrice

21.3.1. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

A toute application linéaire on associe une unique matrice. Réciproquement, la donnée d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définit une unique application linéaire u de E dans F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = A$: en effet, u est alors entièrement définie par les relations :

$$u(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\ f_i, u(e_2) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}\ f_i, \ldots, u(e_p) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,p}\ f_i.$$

Définition 21.32.

Soit A une matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$$

de sorte que la matrice de l'application linéaire φ dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est la matrice A.

Exemple 21.33. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. L'application linéaire canoniquement associée est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x+5y \end{pmatrix} \end{array}$$

21.3.2. Noyau et image d'une matrice

Définition 21.34.

Soit A une matrice de format $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. On note φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle **noyau** de la matrice A et l'on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de l'application linéaire φ_A canoniquement associée à A, autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi_A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \;\middle|\; AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \right\}.$$

- On appelle **image** de A et l'on note $\mathrm{Im}(A)$ l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A, autrement dit,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\varphi_A) = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \right\}$$

$$= \left\{ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \;\middle|\; \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}),\ AX = Y \right\}.$$

Remarque 21.35. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A. Alors

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, \ldots, C_n\right).$$

En effet, notons $(E_1, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Alors, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $AE_k = C_k$, donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(AE_1, \dots, AE_p) = \mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_p)$.

Exemple 21.36. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} x+2y \\ -x \\ 3x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Remarque technique 21.37. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est une matrice, on peut déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ à l'aide d'un pivot de Gauss.

- L'ensemble des solutions du système linéaire associé à $AX = 0$ est $\mathrm{Ker}(A)$ (ainsi la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est égal au nombre d'inconnues secondaires, à savoir p moins le nombre de pivots). Les solutions doivent être écrites sont forme d'un vecteur colonne.
- Pour déterminer $\mathrm{Im}(A)$, il y a plusieurs méthodes :
  - on peut chercher $r = \mathrm{rg}(A)$ à l'aide de $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ et du théorème du rang, puis chercher r colonnes de A linéairement indépendantes ;
  - on peut faire un pivot sur les colonnes : les colonnes non nulles forment alors une base de $\mathrm{Im}(A)$ (les colonnes "nulles" correspondant aux colonnes linéairement dépendantes des colonnes sélectionnées dans la base) ;
  - on peut faire un pivot sur les lignes : on repère les colonnes avec un pivot. Les colonnes correspondantes dans la matrice de départ forment une base de $\mathrm{Im}(A)$ (en effet, chercher une relation de dépendance sur les colonnes revient à résoudre le système associé à la matrice ; on peut donner exprimer les colonnes sans pivots, correspondant aux inconnues secondaires, uniquement avec les colonnes avec pivots, correspondant aux inconnues principales).

Exercice d'application 21.38. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

↪ On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

21.3.3. Rang d'une matrice

Définition 21.39.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle **rang** de A, note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A : $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Remarque 21.40. Le rang de A correspond au rang de ses vecteurs **colonnes** (car les colonnes de A sont les images des vecteurs de la bases canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ par l'application linéaire canoniquement associée à A).

Exemple 21.41. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 2$, car la famille de deux vecteurs considérée est libre (les deux vecteurs étant non colinéaires).

Exemple 21.42. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs colonnes de A : $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont tels que $v_3 = v_1 + v_2$ et v_1 et v_2 sont non colinéaires. On a donc $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3) = \dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)) = 2$ et l'on a donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Proposition 21.43.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On a $0 \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

Démonstration.
Le rang de A est le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. Comme ces vecteurs colonnes sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui est de dimension n, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$. □

Théorème 21.44.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)).$$

Démonstration.
Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}, F}(u)$, $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}), E)$ l'application qui envoie la base canonique $\mathcal{C}_p$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{B}_E$. De même, notons $\psi \in \mathcal{L}(F, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ qui envoie $\mathcal{B}_F$ sur la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_p & \overset{A}{\longrightarrow} & \mathcal{C}_n \\ \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \xrightarrow[\varphi_A]{} & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_p, \mathcal{B}_E}(\phi) = I_p \;\big|\; \phi & & \psi \;\big|\; \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_n}(\psi) = I_n \\ E & \xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)]{u} & F \\ \mathcal{B}_E & & \mathcal{B}_F \end{array}$$

Alors ψ et ϕ sont des isomorphismes et $\psi \circ u \circ \phi$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ qui a pour matrice relativement aux bases canoniques :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_n}(\psi) \times A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_p, \mathcal{B}_E}(\phi) = I_n \times A \times I_p = A.$$

Ainsi, $\psi \circ u \circ \phi$ est l'application linéaire canoniquement associée à A. Il s'ensuit $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\psi \circ u \circ \phi)$ et l'invariance du rang d'une application linéaire par composition avec un isomorphisme assure que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$. □

Proposition 21.45.

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbf{N}^\star$. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Notons $\mathcal{B}$ une base de E. Alors
$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)).$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Considérons l'application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(^n, E)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $\varphi(e_i) = u_i$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, on a alors
$$\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n)$$
et d'après le théorème précédent, $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi)$. Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, d'où le résultat. □

Théorème 21.46 - Théorème du rang.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors
$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

Démonstration.
On applique le théorème du rang à l'application linéaire canoniquement associée à A. □

Exercice d'application 21.47. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

↪ On remarque que la somme des deux premières colonnes de A est égale à la troisième, donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$, donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) \leqslant 2$. Or la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(A)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) \geqslant 2$. Finalement, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$ et
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
Enfin, le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$, d'où
$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Remarque 21.48. Nous avions précédemment défini le rang d'une matrice A comme le rang du système linéaire de matrice A, c'est-à-dire le nombre de pivots. Nous allons voir que ces deux notions coïncident.

Théorème 21.49.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Alors
$$\mathrm{rg}(UA) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AV).$$

Démonstration.
Puisque U est inversible, alors l'application linéaire canoniquement associe $u : X \longmapsto UX$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Notons $f : X \longmapsto AX$. Alors UA est la matrice relativement aux bases canoniques de $u \circ f$. Or, par invariance du rang par composition avec un isomorphisme, $\mathrm{rg}(u \circ f) = \mathrm{rg}(f)$. Avec $\mathrm{rg}(u \circ f) = \mathrm{rg}(UA)$ et $\mathrm{rg}(f) = (A)$ on obtient le résultat.
La preuve est similaire pour montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AV)$. □

Puisque les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice reviennent à multiplier ladite matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 21.50.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$.
1. Si $A \underset{L}{\sim} B$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
2. Si $A \underset{C}{\sim} B$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Exercice d'application 21.51. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

↪ On commence par l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 3 & \boxed{3} & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Théorème 21.52.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que

$$A = UJ_{n,p,r}V$$

où $J_{n,p,r}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf ceux de position (i, i), avec $i \in [\![1, r]\!]$, qui valent 1 :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0_{r,p-r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ \hline & 0_{n-r,r} & & & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$$

On peut plus simplement écrire la matrice $J_{n,p,r}$ en utilisant la notation par blocs :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_{r,r} & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$$

Démonstration.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ de dimension $p-r$ et admet par conséquent un supplémentaire (que nous noterons H) de dimension r. Considérons

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\in H}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_p}_{\in \mathrm{Ker}(A)})$$

adaptée à la décomposition $H \oplus \mathrm{Ker}(A)$. On sait qu'alors $(Ae_1, \dots, Ae_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Or, pour $k \in [\![r+1, p]\!]$, $Ae_k = 0$, donc la famille $(Ae_1, \dots, Ae_r)$ est encore génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. Or cette famille contient $r = \dim(\mathrm{Im}(A))$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$. En particulier cette famille est libre. Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-r}$ tels que $\mathcal{C} = (Ae_1, \dots, Ae_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-r})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Notons φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A) = J_{n,p,r}$:

$$\begin{array}{c} \\ Ae_1 \\ Ae_2 \\ \vdots \\ Ae_r \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-r} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_r & e_{r+1} & \cdots & e_p \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ à la base $\mathcal{B}$ et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ à la base $\mathcal{C}$ alors, d'après les formules de changement de bases, $J_{n,p,r} = Q^{-1}AP$, ou encore $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$. On en déduit le résultat puisque les matrices de passage sont inversible. □

Exemple 21.53. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu précédemment que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Introduisons $C_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Par exemple, $C_3 = E_1$ convient (preuve laissée en exercice).
Vérifions que $\mathcal{E} = (E_1, E_2, D)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Comme cette famille comporte autant de vecteurs que la dimension, il nous suffit de vérifier qu'elle est libre. Or la famille (E_1, E_2) est libre et $D \notin \mathrm{Vect}\,(E_1, E_2)$ (il suffit de regarder la troisième composante), donc (E_1, E_2, D) est bien une famille libre donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Puisque $AE_1 = C_1$, $AE_2 = C_2$ et $AD = 0$, l'application linéaire canoniquement associée à A a pour matrice relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$:

$$J_{3,3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices U et V du théorème sont ici :

- U est la matrice de passage de (E_1, E_2, E_3) à la base $\mathcal{C}$, à savoir
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
- V est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base (E_1, E_2, E_3), et puisque $D = E_1 + E_2 - E_3$, alors $E_3 = E_1 + E_2 - D$, d'où
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 21.54.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Démonstration.
D'après le théorème précédent, en notant $r = \mathrm{rg}(A)$, il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ telles que $A = UJ_{n,p,r}V$. Alors $A^\top = V^\top J_{n,p,r}^\top U^\top$. Or $J_{n,p,r}^\top = J_{n,p,r}$, d'où $\mathrm{rg}(J_{n,p,r}^\top) = r$. De plus, comme U et V sont inversibles, alors $U^\top$ et $V^\top$ le sont également et donc $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(J_{n,p,r}^\top) = r$. □

Le rang d'une matrice est donc aussi le rang de ses vecteurs lignes. Ceci permet de montrer que les deux notions de rang pour une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée et nombre de pivots) coïncident. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Notons R l'unique matrice échelonnée réduite en ligne équivalentes par lignes à A. Puisque $A \underset{L}{\sim} R$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R)$. Notons r le nombre de pivots de R. Alors les r premières lignes de R forment une famille libre de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ (on rappelle que dans la matrice R, les pivots valent 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne) et les lignes restantes de R sont nulles. Ainsi, le rang des lignes de R est égal à r, le nombre de pivots, ce qui prouve le résultat.

Remarque 21.55. Dans le cas d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application linéaire canoniquement associée $u_A : X \longmapsto AX$ est alors un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. D'après ce que l'on a vu sur la caractérisation des endomorphismes en dimension finie, on a alors :

A est inversible	si et seulement si	$\mathrm{rg}(A) = n$
	si et seulement si	$u_A : X \longmapsto AX$ est injective
		i.e. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), AX = 0 \Longrightarrow X = 0$
	si et seulement si	$u_1 : x \longmapsto AX$ est surjective
		i.e. $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ AX = Y$

On retrouve des caractérisations des matrices inversibles vues dans le chapitre sur le calcul matriciel.

Chapitre 22

Déterminant

22.1. Déterminant d'une matrice carrée

Dans la suite, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si l'on désigne par $C_1, \dots, C_n$ les matrices colonnes de A qui sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on notera $A = [C_1; \dots; C_n]$.

Définition 22.1.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$. L'application f est dite **linéaire par rapport à la $i-$ième colonne** de sa variable, où $i \in [\![1, n]\!]$ si, et seulement si, pour toutes matrices colonnes $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_i', C_{i+1}, \dots, C_n$, et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$f\big([C_1; \dots; C_{i-1}; \lambda C_i + \mu C_i'; C_{i+1}; \dots; C_n]\big) = \lambda f\big([C_1; \dots; C_{i-1}; C_i; C_{i+1}; \dots; C_n]\big) + f\big([C_1; \dots; C_{i-1}; C_i'; C_{i+1}; \dots; C_n]\big)$$

Exercice d'application 22.2. L'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array}$$

est-elle linéaire par rapport aux colonnes de sa variable ?

$\hookrightarrow$ Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1} \in \mathbf{R}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$f\begin{pmatrix} a+\lambda x & c \\ b+\lambda y & d \end{pmatrix} = (a+\lambda x)d - (b+\lambda y)c = ad - bc + \lambda(xc - yc) = f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda f\begin{pmatrix} x & c \\ y & d \end{pmatrix}.$$

De même, $f\begin{pmatrix} a & c+\lambda x \\ b & d\lambda y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda f\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$.
Ainsi, f est linéaire par rapport aux colonnes de sa variable.

Exercice d'application 22.3. Déterminer l'ensemble des applications de $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ linéaires par rapport aux colonnes de leur variable.

$\hookrightarrow$ Soit F convenable. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On remarque que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc, par linéarité par rapport à la première colonne,

$$F(M) = aF\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} + bF\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

De même, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$F\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = cF\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + dF\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$F\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix} = cF\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + dF\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $F(M) = acF\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + adF\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bcF\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bdF\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, on peut montrer que les applications ainsi définies sont linéaires par rapport aux colonnes de leur variable.

Définition 22.4.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$. L'application f est dite **antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable** si, et seulement si, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i < j$, et pour toutes matrices colonnes $C_1, \ldots, C_n$, on a

$$f\big([C_1; \ldots; C_i; \ldots; C_j; \ldots; C_n]\big) = -f\big([C_1; \ldots; C_j; \ldots; C_i; \ldots; C_n]\big).$$

Autrement dit, si $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est obtenue à partir de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ en échangeant deux colonnes, alors $f(M') = -f(M)$.

Exercice d'application 22.5. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array}$ est-elle symétrique par rapport aux colonnes de sa variable ?

↪ Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$.

$$f(M') = cb - ad = -f(M).$$

Donc f est symétrique par rapport aux colonnes de sa variable.

Exercice d'application 22.6. Déterminer l'ensemble des applications de $\mathcal{F}(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ linéaires et antisymétriques par rapport aux colonnes de leur variable.

↪ On a vu précédemment (cf. Exercice d'application 22.3) que

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = acF\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + adF\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bcF\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bdF\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or, F étant antisymétrique,

$$F\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = adF\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - bcF\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $F\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ad - bc)F(I_2)$. La réciproque reste à faire.

On admet le résultat suivant :

Théorème 22.7 - Déterminant d'une matrice carrée.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
2. f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
3. $f(I_n) = 1$, où I_n désigne la matrice identité de taille n.

Cette application est appelée **l'application déterminant**. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le scalaire $f(A)$ sera noté $\det(A)$ et sera appelé le déterminant de la matrice A.

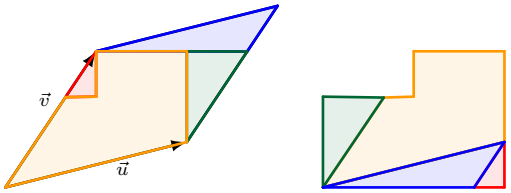
Si $A = (a_{i,j})$, le déterminant de A sera aussi noté : $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{vmatrix}$

Exemple 22.8. Avec l'Exercice d'application 22.5, on obtient que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Interprétation géométrique

On munit le plan d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2 \backslash \{0, 0\}$. On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), et on pose $A = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$. L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\big|\det(A)\big|$.



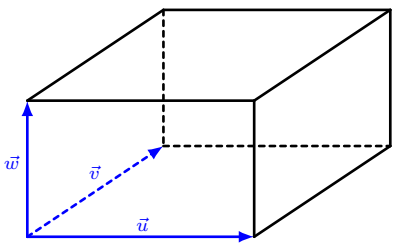
Exemple 22.9. On peut montrer que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - (x_3y_2z_1 + x_2y_1z_3 + x_1y_3z_2).$$

Pour vérifier cette formule, il faut vérifier que les trois points de la définition sont satisfaits (linéarité par rapport aux colonnes, antisymétrie et le déterminant de l'identité doit valoir 1). Il ne faut PAS retenir cette formule (cf. méthodes de calcul d'un déterminant plus loin).

Interprétation géométrique.

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\vec{\mathcal{E}}$. On peut démontrer que $\big|\det(A)\big|$ est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{w}(x_3, y_3, z_3)$.



22.2. Propriétés du déterminant

Proposition 22.10.

Soit A une matrice carrée de taille n.

1. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
2. Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. 1. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Soit i tel que C_i est la colonne nulle.

Alors, par linéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on a :

$$\det([C_1, \dots, C_{i-1}, 2C_i, C_{i+1}, \dots, C_n]) = 2\det([C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n]).$$

Donc $\det(A) = 2\det(A)$, d'où $\det(A) = 0$.

2. Permuter deux colonnes identiques ne change pas la matrice A, mais change la valeur de son déterminant en son opposé (par antisymétrie du déterminant) : $\det(A) = -\det(A)$, puis $\det(A) = 0$. □

Exercice d'application 22.11. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(2A) = 2^2 \det(A)$.

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad \det(2A) &= \begin{vmatrix} 2\times 1 & 2\times(-1) \\ 2\times 2 & 2\times 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2\times(-1) \\ 2 & 2\times 3 \end{vmatrix} && \text{(linéarité par rapport à la 1ère colonne)} \\
&= 2\times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} && \text{(linéarité par rapport à la 2e colonne)} \\
&= 2^2 \det(A).
\end{aligned}$$

On peut généraliser :

Proposition 22.12.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Démonstration.
La matrice λA est obtenue à partir de A en multipliant **chacune** des colonnes de A par λ. La linéarité du déterminant par rapport aux colonnes fournit alors le résultat : pour chacune des colonnes, on peut « sortir » un facteur λ et comme il y a n colonnes en tout, on obtient $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. □

22.2.1. Opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 22.13 - Opérations élémentaires sur les colonnes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}^\star$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ un couple d'entiers distincts. Notons A' la matrice obtenue à partir de A à l'aide de l'opération élémentaire sur les colonnes décrit pour chaque cas.

1. Opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: $\det(A') = \det(A)$.
   Autrement dit le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A.
2. Opération $C_i \leftrightarrow C_j$: $\det(A') = -\det(A)$.
   Autrement dit le déterminant de A change de signe si l'on permute deux colonnes de A.
3. Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$: $\det(A') = \alpha \det(A)$.
   Autrement dit le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une colonne de A par α.

Démonstration.
1. Opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$. On utilise la linéarité par rapport à la i-ième colonne de A' : on obtient alors $\det(A') = \det(M) + \alpha \det(A_1)$ où A_1 est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne i par la colonne j. Ainsi A_1 possède deux colonnes identiques, d'où $\det(A_1) = 0$.
2. Opération $C_i \leftrightarrow C_j$. A' est obtenue à partir de A en échangeant deux colonnes. Par antisymétrie du déterminant, on en déduire $\det(A') = -\det(A)$.
3. Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$. Par linéarité par rapport à la i-ième colonne de M', on obtient $\det(A') = \alpha \det(A)$. □

Exercice d'application 22.14. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

↪ On peut déterminer $\det(A)$ à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes en s'inspirant du pivot de Gauss sur les colonnes.

- On effectue les opérations élémentaires $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A_1$$

  La matrice A_1 obtenue possède le même déterminant que A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

- On effectue l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ sur A_1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A_2.$$

  La matrice A_2 obtenue possède le même déterminant que A.

- Ainsi, en utilisant successivement la linéarité par rapport à la deuxième puis par rapport à la troisième colonne, on peut se ramener au déterminant de I_3 que l'on connaît :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

puisque $\det(I_3) = 1$.

On peut généraliser le procédé afin d'obtenir le déterminant d'une matrice triangulaire quelconque.

Proposition 22.15.

1. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

⚠ **Attention** ⚠**.** Le déterminant d'une matrice qui n'est pas triangulaire n'est pas nécessairement le produit de ses coefficients diagonaux.

22.2.2. Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 22.16.

Soit $A, E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice E étant produit de matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes. Alors

$$\det(AE) = \det(A) \times \det(E).$$

Démonstration.
Il faut vérifier l'égalité pour chaque matrice d'opération élémentaire.

- Opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ (où $\alpha \in \mathbf{K}^\star$). Elle correspond à la multiplication à droite par la matrice de dilatation $D_i(\alpha)$:

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\alpha} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

  $D_i(\alpha)$ est obtenue à partir de I_n après l'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ donc, d'après la Proposition 22.13, $\det(D_i(\alpha)) = \alpha$ car $\det(I_n) = 1$ (on pouvait aussi reconnaître une matrice diagonale).
  Notons $A' = AD_i(\alpha)$. Alors A' est la matrice obtenue à partir de A après l'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$. La Proposition 22.13 assure que $\det(A') = \alpha \det(A)$. Donc

$$\det(AD_i(\alpha)) = \det(A) \times \det(D_i(\alpha)).$$

- Opération $C_i \leftrightarrow C_j$. Elle correspond à la multiplication à droite par la matrice de transposition $P_{i,j}$:

$$P_{i,j} = P_{i,j} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \boxed{1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{1} & \ddots & \boxed{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

  Par le même argument que précédemment, on obtient $\det(AP_{i,j}) = \det(A)\det(P_{i,j})$.

- Opération $C_i \leftrightarrow C_i + \alpha C_j$. Elle correspond à la multiplication à droite par la matrice de transvection $T_{j,i}(\alpha)$:

$$T_{j,i}(\alpha) = T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \boxed{\lambda} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

  Par le même argument que précédemment, on obtient $\det(AP_{i,j}) = \det(A)\det(P_{i,j})$.
- Il ne reste plus qu'à conclure à l'aide d'une récurrence sur le nombre de matrices élémentaires présentes dans E. □

Théorème 22.17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration.
- Supposons A inversible. Alors $A \sim_C I_n$. Ainsi, il existe une matrice E, produit de matrices élémentaires, telle que $A \times E = I_n$. On sait que $\det(AE) = \det(A) \times \det(E)$. Or $\det(I_n) = 1$, donc $\det(A)\det(E) = 1$, puis $\det(A) \neq 0$.
- Réciproquement, supposons $\det(A) \neq 0$. Notons R l'unique matrice échelonnée réduite en colonnes qui est équivalente en colonnes à A : il existe une matrice E produit de matrices élémentaires telle que $AE = R$. Ainsi $\det(A) \times \det(E) = \det(AE) = \det(R)$.
  E étant inversible (car chacune des opérations élémentaires l'est, cf. cours sur les matrice), $\det(E) \neq 0$ (d'après le premier point de la preuve). De plus, $\det(A) \neq 0$ par hypothèse. Donc $\det(R) \neq 0$. Or R est une matrice triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1 ou 0 (ceux qui valent 1 sont les pivots).
  $$\det(R) = \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}$$
  car R est triangulaire. Puisque $\det(R) \neq 0$, on en déduit que les coefficients diagonaux sont non nuls, donc ils sont tous égaux à 1. Ainsi $R = I_n$.
  On vient de montrer que $A \sim_C I_n$, donc A est inversible. □

22.2.3. Déterminant d'un produit, d'un inverse, d'une transposée

Théorème 22.18.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
1. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
2. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. 1. Procédons par disjonction de cas, suivant si B est inversible ou non.
- Supposons B non inversible. Alors $\det(B) = 0$, donc $\det(A)\det(B) = 0$.
  Montrons par l'absurde que AB n'est pas inversible. Supposons AB inversible.
  Il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $(AB)C = I_n = C(AB)$. On a alors, par associativité du

produit matriciel, $(CA)B = I_n$. Montrons qu'alors B est inversible.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(B)$. On a $X = (CA)BC = (CA)0 = 0$, donc $\mathrm{Ker}(B) \subset \{0\}$, puis $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$. Le théorème du rang assure alors que $\mathrm{rg}(B) = n$, donc B est inversible, ce qui est contradictoire.
La matrice AB n'est donc pas inversible, donc $\det(AB) = 0$ et l'égalité proposée est vérifiée.

- Supposons B inversible. Alors $B \sim_C I_n$ et il existe un produit de matrices élémentaires tel que $BE = I_n$.
Alors $A = A(BE) = (AB)E$ et E est un produit de matrices élémentaires, donc d'après la Proposition 22.16,
$$\det(A) = \det(AB) \times \det(E).$$
D'autre part, $BE = I_n$ et E est produit de matrices élémentaires, donc
$$\det(B) \times \det(E) = \det(I_n) = 1.$$
En multipliant la premier égalité par $\det(B)$, on obtient alors
$$\det(A) \times \det(B) = \det(AB) \times \det(E) \times \det(B) = \det(AB).$$

2. $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$, puis $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. □

Théorème 22.19.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\det(A^\top) = \det(A)$.

Démonstration (idée de la preuve).
On distingue suivant si A est inversible ou non.

- Si A n'est pas inversible, alors $A^\top$ non plus, donc $\det(A) = 0 = \det(A^\top)$ et le résultat est vrai.
- Si A est inversible, alors $A \sim_C I_n$ et il existe une matrice E qui est produit de matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes telle que $AE = I_n$. En particulier, $A = E^{-1}$, donc A est elle-même produit de matrices d'opérations élémentaires sur les colonnes (car l'inverse d'un produit est égal au produit des inverses, en ordre inverse, et l'inverse d'une matrice élémentaire est encore une matrice élémentaire). Comme la transposée d'un produit est égal au produit des transposées en ordre inverse, il suffit donc de vérifier le résultat pour les matrices d'opérations élémentaires, ce qui est laissé au lecteur à titre d'exercice. □

Puisque les colonnes de $A^\top$ sont les lignes de A, de l'égalité $\det(A^\top) = \det(A)$ on tire les résultats suivants.

Corollaire 22.20.

1. L'application det est linéaire par rapport à chacune des lignes de sa variable.
2. Le déterminant est antisymétrique par rapport aux lignes de sa variable.
3. Si l'une des lignes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
4. Si deux lignes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Corollaire 22.21 - Opérations élémentaires sur les lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.

1. Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne de A.
2. Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux lignes de A.
3. Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une ligne de A par α.

22.3. Calcul pratique d'un déterminant

Définition 22.22.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle **mineur** d'indice (k,ℓ) le déterminant $\Delta_{k,\ell}(A)$ de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la ligne k et la colonne ℓ.

Exemple 22.23. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Pour déterminer le mineur d'ordre $(3,3)$, on barre (éventuellement mentalement) la troisième ligne et la troisième colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\Delta_{3,3}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

De même, le mineur d'ordre $(4,2)$ est

$$\Delta_{4,2}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Proposition 22.24 - Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
On note $\Delta_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

1. Développement par rapport à la ligne L_{i_0} : soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. On a
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det(\Delta_{i_0,j}).$$
2. Développement par rapport à la colonne C_{j_0} : soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$. On a
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \det(\Delta_{i,j_0}).$$

Démonstration.
Ce résultat est admis. □

Voici ce que ce résultat donne pour les matrice de taille 3 et 4.

- Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : on met en exposant à gauche des coefficients entre parenthèses la valeur de $(-1)^{i+j}$ où i et j sont les numéros respectifs de la ligne et de la colonne de ce coefficient.

Développement suivant une colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{(+)}a & {}^{(-)}b & {}^{(+)}c \\ {}^{(-)}d & {}^{(+)}e & {}^{(-)}f \\ {}^{(+)}g & {}^{(-)}h & {}^{(+)}k \end{vmatrix} = \begin{cases} a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la première colonne)} \\ -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\ c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la troisième colonne)} \end{cases}$$

Développement suivant une ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{(+)}a & {}^{(-)}b & {}^{(+)}c \\ {}^{(-)}d & {}^{(+)}e & {}^{(-)}f \\ {}^{(+)}g & {}^{(-)}h & {}^{(+)}k \end{vmatrix} = \begin{cases} a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la première ligne)} \\ -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la deuxième ligne)} \\ g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la troisième ligne)} \end{cases}$$

- Voici un exemple de développement d'un déterminant d'une matrice d'ordre $n \geqslant 4$.

  Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbf{K}$.

  Le développement suivant la première colonne donne :

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} {}^{(+)}a_{1,1} & {}^{(-)}a_{1,2} & {}^{(+)}a_{1,3} & {}^{(-)}a_{1,4} \\ {}^{(-)}a_{2,1} & {}^{(+)}a_{2,2} & {}^{(-)}a_{2,3} & {}^{(+)}a_{2,4} \\ {}^{(+)}a_{3,1} & {}^{(-)}a_{3,2} & {}^{(+)}a_{3,3} & {}^{(-)}a_{3,4} \\ {}^{(-)}a_{4,1} & {}^{(+)}a_{4,2} & {}^{(-)}a_{4,3} & {}^{(+)}a_{4,4} \end{vmatrix} &= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{4,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

  Remarquons qu'on peut calculer ce déterminant car le calcul fait apparaître des déterminants de matrices d'ordre 3, que l'on sait calculer (ou l'on peut plus simplement continuer et se ramener à des déterminants de matrices d'ordre 2).

  On dispose donc d'une méthode pour calculer le déterminant des matrices d'ordre 4.

  En procédant de la même façon (développement suivant une ligne ou une colonne), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 5 en faisant intervenir des déterminants de matrices d'ordre 4 qu'on calcule suivant la méthode précédente.

  En itérant le procédé, on peut définir par récurrence une méthode de calcul du déterminant d'une matrice d'ordre n à partir des déterminants de matrices d'ordre $n-1$.

Exemple 22.25. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $\det(A)$ en développant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2(-2-9) + (1-9) - 2(3+6) = -4.$$

On aurait aussi pu développer par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(6-3) - 2(3+6) + (1+4) = -4.$$

Remarque 22.26.
- Dans la formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, si on écrit bien les termes dans l'ordre dans lequel on les rencontre, les signes sont alors alternés.
- En général, on préfère choisir de développer par rapport à une ligne ou une colonne qui contient des zéros, cela fait d'autant moins de calculs à faire. Il est d'ailleurs recommandé de faire des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes pour faire apparaître un maximum de zéros sur une même ligne ou sur une même colonne avant de développer par rapport à celle-ci.
- Développer par rapport à une ligne ou une colonne peut permettre de trouver une relation de récurrence lorsqu'il s'agit de calculer un déterminant de taille n. Voir TD.

Exercice d'application 22.27. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

↪ Avant de développer par rapport à une ligne ou une colonne, effectuons l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, ce qui ne change pas le déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

On effectue maintenant un développement par rapport à la première ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour rajouter un 0 dans la deuxième colonne :

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe enfin par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

22.4. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 22.28.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Le **déterminant** d'une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de n vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, est le déterminant de la matrice $M_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ représentant ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det\big(M_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)\big).$$

Remarque 22.29. On notera que le nombre de vecteurs de la famille doit être égal à la dimension de E ! (Le déterminant d'une matrice étant défini uniquement pour les matrices carrées).

Exercice d'application 22.30. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, calculer le déterminant relativement à cette base de $(X+1, X(X-1), X^2-1)$.

↪ On a

$$\det_{\mathcal{B}}(X+1, X(X-1), X^2-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Proposition 22.31.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0$.

Démonstration.
$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E. □

Cela assure en particulier que bien que les déterminants d'une famille de vecteurs dans deux bases distinctes ne sont généralement pas égaux, ils sont simultanément nuls ou non nuls.

Exemple 22.32. Puisque $\det_{(1,X,X^2)}(X+1, X(X-1), X^2-1) \neq 0$, alors la famille $(X+1, X(X-1), X^2-1)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

22.5. Déterminant d'un endomorphisme

Considérons un endomorphisme f d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Notons A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$, A' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On a $A = PA'P^{-1}$ donc

$$\det(A) = \det(PA'P^{-1}) = \det(P)\det(A')\det(P') = \det(P)\det(A)\frac{1}{\det(P)} = \det(A).$$

On vient de montrer que les déterminants de toutes les matrices représentant l'endomorphisme f sont égaux. Cette propriété nous permet définir le déterminant d'un endomorphisme :

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Les matrices de f relativement à une base quelconque de E ont toutes le même déterminant. Ce determinant commun est appelé **déterminant** de f et est noté $\det(f)$.

Remarque 22.33.
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Notons u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors $\det(u_A) = \det(A)$.

Exercice d'application 22.34. Considérons u : $\begin{array}{ccc} R^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, -2x+3z, x+3y-2z) \end{array}$.

Calculer le déterminant de u.

↪ Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$\det(u) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -13.$$

On déduit des propriétés du déterminant d'une matrice et des matrices des endomorphismes :

Proposition 22.35.

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbf{K}$.

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$ et donc $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$.
4. f est bijective si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.
5. Si f est bijective, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Démonstration.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)) = \det(I_n) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda f)) = \det(\lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \lambda^n \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(g\circ f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g\circ f)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g))\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(g)\det(f)$.
4. $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0 \iff \det(f) \neq 0$.
5. Supposons f bijective. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$, donc $\det(f^{-1}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))} = \frac{1}{\det(f)}$. □

Chapitre 23

Espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

23.1. Produit scalaire

23.1.1. Définition

Définition 23.1.

On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

1. φ est **bilinéaire** : pour tout $e \in E$, $x \longmapsto \varphi(x,e)$ et $x \longmapsto \varphi(e,x)$ sont linéaires :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\quad \varphi(\lambda x + z, y) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(z,y),$$

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\quad \varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,z).$$

2. φ est **symétrique** : pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
3. φ est **définie positive** : pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque technique 23.2.

1. Pour montrer la bilinéarité, il suffit de prouver la symétrie puis la linéarité en l'une des variables. En effet, si φ est symétrique et $x \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire, alors, pour $(x,y,z,\lambda) \in E^3 \times \mathbf{R}$,

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x, y+\lambda z) & = & \varphi(y+\lambda z, x) & \text{car } \varphi \text{ est symétrique} \\ & = & \varphi(y,x) + \lambda\varphi(y,z) & \text{car pour tout } e \in E,\ \varphi(\cdot, e) \text{ est linéaire} \\ & = & \varphi(x,y) + \lambda\varphi(z,y) & \text{car } \varphi \text{ est symétrique} \end{array}$$

2. Si φ est bilinéaire, alors on sait que pour tout $e \in E$, $\varphi(0_E, e) = 0 = \varphi(e, 0_E)$. Pour montrer que φ est définie, on peut donc se contenter de prouver l'implication : si $\varphi(x,x) = 0$ alors $x = 0_E$.
3. Montrer que φ est définie est rarement trivial et nécessite souvent des justifications. On veillera donc à prouver l'aspect défini avec la plus grande rigueur.

Exercice d'application 23.3. Montrer que l'application φ : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ ((x_1,y_1),\ (x_2,y_2)) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 \end{array}$ est un produit scalaire.

↪

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. Notons $x = (x_1, y_1)$ et $y = (y_1, y_2)$.
$$\varphi(y, x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \varphi(x, y)$$
donc φ est symétrique.
2. Soit $(x, x', y) \in (\mathbf{R}^2)^3$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Notons $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$.
$$\varphi(x+\lambda x', y) = (x_1+\lambda x'_1)y_1 + (x_2+\lambda x'_2)y_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + \lambda(x'_1y_1 + x'_2y_2) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x', y)$$
donc $x \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire. Or φ étant symétrique, $y \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
3. Soit $x \in \mathbf{R}^2$ avec $x = (x_1, x_2)$. $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 = 0 \geqslant 0$ car c'est une somme de réels positives. De plus,
$$\varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1^2 = 0 \text{ et } x_2^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \Longleftrightarrow x = (0, 0).$$
Donc φ est définie positive.

Finalement, φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$.

◇◇

Notation 4. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est généralement noté $\langle x, y\rangle$ (ou $(x \mid y)$ ou encore $x \cdot y$).

Définition 23.5.

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace euclidien**.

23.1.2. Exemples de référence

Produit scalaire canonique dans $\mathbf{R}^n$

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Si $x \in \mathbf{R}^n$, on notera $(x_1, ..., x_n)$ ses coordonnées dans $\mathbf{R}^n$. Considérons
$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$
est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ est appelé **produit scalaire canonique**.

1. Symétrie. Soit $x, y \in \mathbf{R}^n$.
$$\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y\rangle .$$
2. Bilinéarité. Soit $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} \langle x + \lambda z, y\rangle &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda z_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i + \lambda z_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^n z_i y_i \\ &= \langle x, y\rangle + \lambda \langle z, y\rangle \end{aligned}$$
ce qui montre que pour tout $e \in E$, $\langle \cdot, e\rangle$ est linéaire. La bilinéarité s'en déduit par symétrie.

3. Définie positivité. Soit $x \in \mathbf{R}^n$.
$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$$
en tant que somme de termes positifs. Si de plus $\langle x, x\rangle = 0$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i^2 = 0$ donc $x_i = 0$. Finalement $x = 0_E$. On vient de montrer que l'application est définie positive.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Un produit scalaire dans $\mathscr{C}^0([a\,;\,b]\,, \mathbf{R})$

Soit a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Dans $E = \mathscr{C}^0([a\,;\,b]\,, \mathbf{R})$,
$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (f, g) & \longmapsto & \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
est un produit scalaire.

1. Symétrie. Soit $f, g \in E$.
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \langle f, g\rangle$$
donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
2. Bilinéarité. Soit $f_1, f_2, g \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} \langle f_1 + \lambda f_2, g\rangle &= \int_a^b (f_1(t) + \lambda f_2(t))g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f_1(t)g(t) + \lambda f_2(t)g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b f_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \langle f_1, g\rangle + \lambda\langle f_2, g\rangle\,. \end{aligned}$$
Donc pour tout $g \in E$, $f \longmapsto \langle f, g\rangle$ est linéaire. Par symétrie, $f \longmapsto \langle g, f\rangle$ est linéaire, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.
3. Définie positivité. Soit $f \in E$.
$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
Or $a \leqslant b$ et pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f^2(t) \geqslant 0$ car f est à valeurs réelles. Par positivité de l'intégrale, $\langle f, f\rangle \geqslant 0$. De plus, on sait que f^2 est continue sur le segment $[a\,;\,b]$ car $f \in E$ donc, si $\langle f, f\rangle = 0$ alors pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f^2(t) = 0$, donc $f = 0_E$.
On vient de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

23.1.3. Norme euclidienne

Définition 23.6.

Pour $x \in E$, on appelle **norme euclidienne** de x et on note $\|x\|$ le réel $\sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Définition 23.7.

Un élément x de E est dit **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Exemple 23.8.
- Dans $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont tous unitaires.
- Pour tout $x \in E$, si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire.

Proposition 23.9.

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$.
2. Pour tout $x \in E$ et pour tout réel λ, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Démonstration.
1. Soit $x \in E$. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$. De plus,
$$\|x\| = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_E$$
car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.
2. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
$$\begin{array}{rcll} \|\lambda x\|^2 & = & \langle \lambda x, \lambda x\rangle & \\ & = & \lambda \langle x, \lambda x\rangle & \text{(linéarité par rapport à la première variable)} \\ & = & \lambda^2 \langle x, x\rangle & \text{(linéarité par rapport à la deuxième variable)} \\ & = & \lambda^2 \|x\|^2 . & \end{array}$$
En composant par la racine carrée, on obtient $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. □

Théorème 23.10 - Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $x, y \in E$.
$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.
Soit $x, y \in E$. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \lambda & \longmapsto & \|x + \lambda y\|^2 \end{array} .$$
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
$$\begin{array}{rcll} f(\lambda) & = & \|x + \lambda y\|^2 & \\ & = & \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle & \\ & = & \langle x, x + \lambda y\rangle + \lambda \langle y, x + \lambda y\rangle & \text{(linéarité par rapport à la première variable)} \\ & = & \langle x, x\rangle + \lambda \langle x, y\rangle + \lambda \langle y, x\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle & \text{(linéarité par rapport à la deuxième variable)} \\ & = & \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle + \lambda^2 \|y\|^2 & \text{(symétrie)} \end{array}$$
L'application f est donc une application polynomiale de degré au plus 2. Or pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 \geqslant 0$.
- Si $y \neq 0_E$, alors $\|y\| \neq 0$ donc f est polynomiale de degré 2. Etant à valeurs positives, son discriminant $4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$ est négatif ou nul, d'où $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$. Il s'ensuit, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$;
$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\| .$$

- Si $y = 0$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ par linéarité. D'autre part $\|x\|\,\|y\| = 0$, donc l'inégalité est encore vraie.

Il reste à voir le cas d'égalité si $y \neq 0_E$.

- Supposons que $\langle x, y\rangle = \|x\| \times \|y\|$. Alors le discriminant de f est nul ce qui entraîne que f admet une racine double λ_0. Ainsi $\|x + \lambda_0 y\|^2 = 0$, puis $x + \lambda_0 y = 0_E$. Ainsi x et y sont colinéaires.
- Réciproquement, supposons que x et y sont colinéaires. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha x + \beta y = 0_E$. De plus, $\alpha \neq 0$ car sinon on aurait $\beta y = 0_E$ ce qui est absurde puisque $y \neq 0_E$ et $\beta \neq 0$.
  Posons $\lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}$. On a $x + \lambda_1 y = 0_E$, donc $f(\lambda_1) = 0$. Ainsi f est polynomiale de degré 2 et possède une racine, donc son discriminant est positif ou nul. Or on a montré que ce dernier est négatif, donc le discriminant est nul. Ainsi $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$. □

Exemple 23.11. 1. Dans $E = \mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire canonique, pour $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

ou de manière équivalente

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

En particulier, si $y = (1, \ldots, 1)$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

2. Dans $E = \mathscr{C}^0([a\,;b]\,, \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on a pour $(f, g) \in E^2$,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

En particulier pour $g : t \longmapsto 1$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{(b-a)\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

En particulier, si f est une fonction continue et périodique de période T,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Le lecteur averti reconnaîtra la **valeur efficace** du signal f dans le membre de droite de cette inégalité et la **valeur moyenne** dans le membre de gauche.

Proposition 23.12 - Inégalités triangulaires.

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. Première inégalité triangulaire. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
2. Cas d'égalité. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \alpha \geqslant 0,\ x = \alpha y$ ou $\exists \alpha \geqslant 0,\ y = \alpha x$.
3. Seconde inégalité triangulaire. $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x + y\|$.

Démonstration.
En développant par bilinéarité et en utilisant la symétrie, on obtient

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x, y\rangle \leqslant |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$, ainsi
$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$
i.e. $\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$. Puisque les normes sont positives et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$, alors
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$
ce qui prouve l'inégalité triangulaire.
2. Il y a égalité si et seulement si $|\langle x, y\rangle| = \langle x, y\rangle = \|x\| \times \|y\|$. Or on sait que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires, *i.e.* si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Dans les deux cas, $\langle x, y\rangle$ est du signe de α. Or $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ équivalent à $\langle x, y\rangle \geqslant 0$. Finalement, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement s'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
3. On remarque que $x = (x+y) + (-y)$ donc d'après la première inégalité triangulaire, $\|x\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$, ou encore $\|x\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$. On en déduit
$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|.$$
De même, en échangeant les rôles de x et y, on obtient
$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|.$$
Puisque $\big|\, \|\|-\|y\|\,\big| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$, on peut conclure. □

Proposition 23.13 - Identités remarquables.

Soit $(x, y) \in E^2$.
1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
3. $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
4. Identité de polarisation. $\langle x, y\rangle = \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2 - \left\|\frac{1}{2}(x-y)\right\|^2$.

Démonstration.
Pour les trois premières identités, il suffit d'écrire le membre de gauche à l'aide du produit scalaire et de développer par bilinéarité, puis d'utiliser la symétrie. L'identité de polarisation s'obtient en faisant la différence des deux première identités remarquables. □

23.2. Orthogonalité

23.2.1. Vecteurs orthogonaux

Définition 23.14.

Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Exemple 23.15.
1. 0_E est orthogonal à tout vecteur de E.
2. Dans $\mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire canonique, posons $x = (1, \ldots, 1)$. Les vecteurs
$$(0, \ldots, 0), \quad (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, 0, \ldots, 0), \quad (2, -1, -1, 0, \ldots, 0)$$
sont tous orthogonaux à x.

Exercice d'application 23.16. Dans l'espace $E = \mathscr{C}^0([0\,;1]\,,\mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on considère les applications $f_1 : t \longmapsto 1$, $f_2 : t \longmapsto \cos(\pi t)$ et $f_3 : t \longmapsto \sin(\pi t)$.
Parmi ces trois vecteurs, lesquels sont orthogonaux ?

$\hookrightarrow$ On a $\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^1 \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $f_1 \perp f_2$.
$\langle f_1, f_3\rangle = \int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \neq 0$, donc f_1 et f_3 ne sont pas orthogonaux.
$\langle f_2, f_3\rangle = \int_0^1 \cos(\pi t)\sin(\pi t) = \int_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc f_2 et f_3 sont orthogonaux.

Exercice d'application 23.17. Dans $\mathbf{R}_2[X]$, on considère l'application φ définie pour tout $(P,Q) \in \mathbf{R}_2[X]^2$ par

$$\varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ, déterminer l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $P = 1 + X + X^2$.

$\hookrightarrow$

1. φ est clairement symétrie et la bilinéarité est simple à obtenir. Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$.

$$\varphi(P,P) = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 \geqslant 0$$

en tant que somme de termes positifs. De plus, si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, donc P est un polynôme de degré au plus 2 qui admet 3 racines : on en déduit que P est nul. Ainsi φ est définie positive. On vient de montrer que φ est un produit scalaire.

2. Soit $A = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} A \perp P &\iff \langle A, P\rangle = 0 \\ &\iff P(-1)A(-1) + P(0)A(0) + P(1)A(1) = 0 \\ &\iff (a_0 - a_1 + a_2) + a_0 + 3(a_0 + a_1 + a_2) = 0 \\ &\iff 5a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des polynômes A qui sont orthogonaux à P est

$$\left\{ -\frac{2}{5}a_1 - \frac{4}{5}a_2 + a_1X + a_2X^2 \ :\ (a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(X - \frac{2}{5}, X^2 - \frac{4}{5}\right).$$

Proposition 23.18.

Soit $x \in E$. Si x est orthogonal à tout vecteur de E, alors $x = 0_E$.

Démonstration.
x est en particulier orthogonal à lui-même, d'où $\langle x,x\rangle = 0$ et ainsi $x = 0_E$. □

23.2.2. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 23.19.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal** de F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{\, x \in E \mid \forall y \in F,\ x \perp y \,\}.$$

Exemple 23.20. Avec la Proposition 23.18, on a $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition 23.21.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F possède une famille génératrice finie $(u_1, \dots, u_p)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$x \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ x \perp u_i.$$

Démonstration.
Le sens direct est évident car les vecteurs u_i sont des vecteurs de F.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x \perp u_i$. Soit $y \in F$. Puisque $(u_1, ..., u_p)$ est une famille génératrice de f, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ tel que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \times 0 = 0$$

ce qui montre que $x \perp y$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $y \in F$, alors $x \in F^\perp$. □

Exercice d'application 23.22. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\,((1, \dots, 1))$.

↪ Soit $x \in \mathbf{R}^n$. D'après la proposition précédente,

$$x \in F^\perp \iff x \perp (1, \dots, 1) \iff \langle x, (1, \dots, 1) \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Ainsi, $F^\perp = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$.

Exercice d'application 23.23. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$, déterminer l'orthogonal de $F = \mathbf{R}_1[X]$.

↪ Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$ tel que $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Puisque $F = \text{Vect}\,(1, X)$, la proposition précédente assure que

$$\begin{aligned}
P \in F^\perp &\iff \begin{cases} P \perp 1 \\ P \perp X \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \langle P, 1 \rangle = 0 \\ \langle P, X \rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P(-1) + P(0) + P(1) = 0 \\ -P(-1) + P(1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3a_0 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $F^\perp = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)$.

Exercice d'application 23.24. Dans $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\,(x \mapsto 1)$.

↪ $F^\perp = \{ f \in E \mid \langle f, x \mapsto 1 \rangle = 0 \} = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

Théorème 23.25.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
$F^\perp \subset E$, $0_E \in F^\perp$. Soit $(x, y, \lambda) \in (F^\perp)^2 \times \mathbf{R}$. Pour tout $z \in F$,

$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda x + y \in F^\perp$. Ainsi, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. □

23.2.3. Familles orthogonales

Définition 23.26.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j.$$

- On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille orthonormale** lorsque les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Exemple 23.27.

1. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale : soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0 \times 0 + \cdots + 1 \times 0 + \cdots + 0 \times 1 + \cdots + 0 \times 0 = 0$. Si $i = j$, alors $\langle e_i, e_j\rangle = 0^2 + \cdots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 1$.
2. Dans $\mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Considérons les vecteurs

$$f_1 : t \longmapsto 1, \qquad f_2 : t \longmapsto \cos(\pi t), \qquad f_3 : t \longmapsto \sin(\pi t).$$

La famille (f_1, f_2, f_3) n'est pas orthogonale car f_1 et f_3 ne sont pas orthogonaux.

Exercice d'application 23.28. Dans $\mathscr{C}^0([0\,;\,2\pi], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ (à faire : vérifier que cette application est bien un produit scalaire), considérons les vecteurs :

$$f_1 : t \longmapsto \frac{1}{2}, \qquad f_2 : t \longmapsto \cos(t), \qquad f_3 : t \longmapsto \sin(t).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est orthonormale.

↪ On a

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_2\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\
\langle f_2, f_3\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = 0 \\
\langle f_3, f_1\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\
\langle f_1, f_1\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2} = 1 \\
\langle f_2, f_2\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = 1 \\
\langle f_3, f_3\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = 1
\end{aligned}$$

Théorème 23.29.

Une famille orthogonale ne comprenant pas 0_E est libre. En particulier, une famille orthonormale est une famille libre.

Démonstration.
Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille orthogonale de E telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \neq 0_E$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$. Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda u_i, u_k \right\rangle = \langle 0_E, u_k \rangle = 0_E.$$

Par ailleurs,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, u_k \rangle = \lambda_k \langle u_k, u_k \rangle = \lambda_k \|u_k\|^2$$

car pour $i \neq k$, $u_i \perp u_k$ donc $\langle u_i, u_k \rangle = 0$.
Ainsi, $\lambda_k \|u_k\|^2 = 0$. Donc $\lambda_k = 0$ ou $\|u_k\|^2 = 0$, *i.e.* $u_k = 0$. Or $u_k \neq 0$, donc $\lambda_k = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on vient de montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.
Le cas particulier d'une famille orthonormale s'en déduit puisque les vecteurs d'une telle famille sont unitaires donc non nuls. □

Théorème 23.30 - Théorème de Pythagore.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 .$$

Démonstration.
Notons $v = \sum_{i=1}^{p} u_i$. Calculons $\|v\|^2$:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, v \rangle .$$

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. On a

$$\langle u_i, v \rangle = \left\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle u_i, u_k \rangle .$$

Or la famille $(u_1, ..., u_p)$ est orthogonale, donc pour $k \neq i$, $\langle u_i, u_k \rangle = 0$. Ainsi $\langle u_i, v \rangle = \langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2$.
En reportant dans l'expression de $\|v\|^2$, on obtient :

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 ,$$

ce qui prouve le résultat. □

⚠ **Attention** ⚠. Le théorème de Pythagore présenté ici n'est qu'une **implication**.

23.3. Espaces euclidiens

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension n non nulle.

23.3.1. Bases orthonormales

Définition 23.31.

Une base de E est dite **orthonormale** si c'est une famille orthonormale.

Exemple 23.32. Dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormale.

Proposition 23.33.

Une famille orthonormale de n vecteurs de E est une base orthonormale.

Théorème 23.34.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $x, y \in E$. Notons

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

1. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \langle x, e_i \rangle$;
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$;
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Démonstration. 1. On sait que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, e_i \rangle = x_i$$

car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale (donc $\langle e_k, e_i \rangle = 0$ si $k \neq i$ et $\langle e_i, e_i \rangle = 1$).

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle x, y = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y.$

3. $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = X^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$ □

Exercice d'application 23.35. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base orthonormale et déterminer l'expression de ce produit scalaire.

↪ *Analyse.* Supposons qu'un tel produit scalaire existe. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Le vecteur x a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$. Ainsi, si $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ le produit scalaire de x et y est donné par :

$$\langle x, y \rangle = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3 y_3.$$

Synthèse. Laissée en exercice (il faut vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et que la famille $\mathcal{B}$ est bien une base orthonormale pour ce produit scalaire).

23.3.2. Existence de bases orthonormales

Théorème 23.36 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthogonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de E vérifiant :

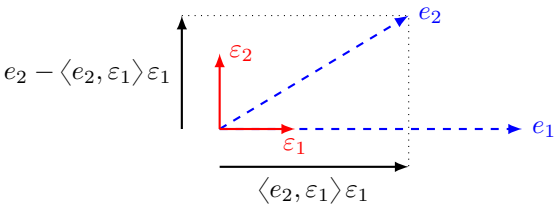
1. pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$;
2. pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle \geqslant 0$.

La famille obtenue est appelée l'**orthonormalisée** par le procédé de Gram-Schmidt de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

On a tout compris quand on a compris le cas $n = 2$. On veut transformer une famille libre quelconque (e_1, e_2) en une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1}{\|e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1\|}.$$

La première formule normalise e_1, *i.e.* le rend unitaire.
La second formule commence par transformer e_2 et $e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$, ce qui consiste à retrancher à e_2 sa composante suivant ε_1 qui vaut $\varepsilon e_2, \varepsilon_1 \varepsilon_1$. Le vecteur ainsi obtenu est orthogonal à ε_1, mais il ne peut pas être unitaire c'est pourquoi on le divise par sa norme.



Démonstration.
Pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, on pose H_p : « si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ vérifiant 1. et 2. ».

- Soit (e_1) une famille libre de E. Alors $e_1 \neq 0_E$ donc on peut poser $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$. La famille (ε_1) est orthonormale, $\text{Vect}(\varepsilon_1) = \text{Vect}(e_1)$ et $\langle e_1, \varepsilon_1 \rangle = \|e_1\| > 0$. Donc H_1 est vraie.
- Soit $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que H_p soit vraie. Soit $(e_1, \dots, e_{p+1})$ une famille libre de E.
  D'après H_p, puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle > 0$.
  Déterminons ε_{p+1} en raisonnant par analyse/synthèse.
  - *Analyse.* Supposons qu'un vecteur ε_{p+1} convenable existe. Alors

    $$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$$

    donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbf{R}$ tels que $\varepsilon_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k e_k$.
    Or $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et on sait que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varepsilon_k$.
    Finalement, $\varepsilon_{p+1} = \alpha e_{p+1} + \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_p \varepsilon_p$, où l'on a noté plus simplement α le réel α_{p+1}. L'intérêt de cette écriture est que nous allons pouvoir exploiter l'orthonormalité de la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$.
    Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Alors,

    $$\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_i \rangle = \alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \langle \varepsilon_k, \varepsilon_i \rangle = \alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle + \lambda_i.$$

Or $\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_i \rangle = 0$, donc $\lambda_i = -\alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle$. On vient d'obtenir que

$$\varepsilon_{p+1} = \alpha \left(e_{p+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer α. Pour cela, calculons $\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle$. De même que précédemment, on obtient :

$$\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle = \alpha \langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle .$$

Or on sait que $\|\varepsilon_{p+1}\| = 1$ et que $\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle > 0$, ce qui montre que $\alpha = \frac{1}{\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle} > 0$.
Finalement, on a obtenu que si ε_{p+1} existe, alors

$$\varepsilon_{p+1} = \alpha \left(e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle e_{p+1}, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 - ... - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \varepsilon_p \right),$$

où α est l'unique réel strictement positif tel que $\|\varepsilon_{p+1}\| = 1$.

- *Synthèse.* Introduisons le vecteur

$$a_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k.$$

Vérifions que a_{p+1} est orthogonal à ε_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, a_{p+1}) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$.
Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

$$\begin{aligned} \langle a_{p+1}, \varepsilon_i \rangle &= \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \langle \varepsilon_k, \varepsilon_i \rangle \\ &= \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle - \langle e_{p+1}, \varepsilon_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est orthonormale, donc $\langle \varepsilon_k, \varepsilon_i \rangle = 0$ si $k \neq i$ et $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 1$. Ainsi a_{p+1} est orthogonal à tous les ε_i, $i \in [\![1, p]\!]$.
Par ailleurs, remarquons que $a_{p+1} \neq 0_E$ car sinon $e_{p+1} \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. Or on sait que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ (par hypothèse de récurrence), ainsi on aurait $e_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ce qui est absurde puisque la famille $(e_1, \ldots, e_{p+1})$ est libre.
Ainsi $a_{p+1} \neq 0_E$. On peut donc introduire $\varepsilon_{p+1} = \frac{1}{\|a_{p+1}\|} a_{p+1}$ (cf. phase d'analyse) : ε_{p+1} est alors unitaire et orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, p]\!]$. Puisque la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est orthonormale, alors c'est également le cas de la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1})$.
Vérifions que $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1})$. Puisque, via H_p, $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ et $\varepsilon_{p+1} = \frac{1}{\|a_{p+1}\|} a_{p+1}$, il nous suffit de vérifier que $e_{p+1} \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, a_{p+1})$ et que $a_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$. Or

$$a_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, e_{p+1})$$

donc $a_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ puisque $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. Par ailleurs,

$$e_{p+1} = a_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, a_{p+1}),$$

On en déduit alors que $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1})$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que $\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle &= \left\langle a_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k, \varepsilon_{p+1} \right\rangle \\ &= \langle a_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle + \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle \langle \varepsilon_k, \varepsilon_{p+1} \rangle \\ &= \langle a_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle && (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1}) \text{ est orthonormale} \\ &= \|a_{p+1}\| \end{aligned}$$

d'où $\langle e_{p+1}, \varepsilon_{p+1} \rangle > 0$.

On vient de montrer que H_{p+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence assure que H_p est vraie pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$ (l'assertion n'est intéressante que pour $p \neq n$ car il n'existe pas de familles libres contenant strictement plus de n vecteurs). □

◇◇

Remarque technique 23.37. Cette démonstration est constructive et donne un algorithme de calcul des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$:

1. on pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$;
2. pour $k \in [\![2, p]\!]$, on calcule $a_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ puis on pose le vecteur normalisé $\varepsilon_k = \frac{1}{\|a_k\|} a_k$.

Exercice d'application 23.38. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, considérons les vecteurs

$$e_1 = (1,0,1), \qquad e_2 = (1,1,1), \qquad e_3 = (-1,1,0).$$

La famille (e_1, e_2, e_3) (la vérification est laissée en exercice). Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille.

↪

1. On calcule $\|e_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$. On pose donc $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.
2. Soit $a_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$. Calculons ses coordonnées :

$$\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+0+1) = \sqrt{2}.$$

Ainsi $a_2 = e_2 - \sqrt{2}\varepsilon_1 = e_2 - e_1 = (0,1,0)$. De plus, ce vecteur est unitaire. On pose donc $\varepsilon_2 = (0,1,0)$.

3. Soit $a_3 = e_3 - \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$. On a :

$$\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+0+0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle = 0+1+0 = 1.$$

Ainsi $a_3 = e_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(-1,0,1)$. Alors $\|a_3\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On pose donc $\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.

Finalement, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille orthonormale de $\mathbf{R}^3$, donc une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$.

Exercice d'application 23.39. Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$, orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

↪

1. On a $\|1\|^2 = 1+1+1 = 3$. Posons $E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Posons $A_2 = X - \langle X, E_1 \rangle E_1$.

$$\langle X, E_1 \rangle = -E_1(-1) + E_1(1) = 0$$

Ainsi $A_2 = X$. Or $\|A_2\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$. On pose donc $E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X$.

3. Posons $A_3 = X^2 - \langle X^2, E_1 \rangle E_1 - \langle X^2, E_2 \rangle E_2$.

$$\langle X^2, E_1 \rangle = E_1(-1) + E_1(1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \langle X^2, E_2 \rangle = E_2(-1) + E_2(1) = 0.$$

Ainsi $A_3 = X^2 - \frac{2}{3}$. Or $\|A_3\|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$. On pose donc $E = \frac{\sqrt{6}}{2}(X^2 - \frac{2}{3})$.

Finalement la famille (E_1, E_2, E_3) est une famille orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$ (c'est même une base orthonormale puisqu'elle comporte $3 = \dim(\mathbf{R}_2[X])$ vecteurs).

Exercice d'application 23.40. Dans $\mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, considérons les vecteurs

$$f : t \longmapsto 1, \qquad g : t \longmapsto t, \qquad h : t \longmapsto t^2.$$

La famille (f, g, h) est libre (vérification laissée en exercice). Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille.

$\hookrightarrow$

1. $\|f\|^2 = \int_0^1 1^2 \,\mathrm{d}t = 1$. On pose donc $\varepsilon_1 : t \longmapsto 1$.
2. Posons $a_2 = g - \langle g, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$.
$$\langle g, \varepsilon_1 \rangle = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
Ainsi, $a_2 = g - \frac{1}{2}\varepsilon_1$. De plus,
$$\|a_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-\frac{1}{2})^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$
On pose donc $\varepsilon_2 = 2\sqrt{3}(g - \frac{1}{2}\varepsilon_1)$, *i.e.* $\varepsilon_2 : t \longmapsto \sqrt{3}(2t - 1)$.
3. Posons $a_3 = h - \langle h, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle h, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$. Calculons :
$$\langle h, \varepsilon_1 \rangle = \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \langle h, \varepsilon_2 \rangle = 2\sqrt{3} \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$
Ainsi $a_3 = h - \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\varepsilon_2$ c'est-à-dire $a_3 : t \longmapsto t^2 - \frac{1}{3} - (t - \frac{1}{2})$. On a alors
$$\|a_3\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{180}.$$
On pose donc $\varepsilon_3 = 6\sqrt{5}a_3$, donc $\varepsilon_3 : t \longmapsto \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$.

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est alors une famille orthonormale.

◇◇

Corollaire 23.41.

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Démonstration.
Un espace euclidien est de dimension finie, donc il possède une base. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à l'une des bases fournit alors une base orthonormale. □

Corollaire 23.42.

Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration.
Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de E est en particulier une famille libre, qui peut donc être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète) : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fournit alors une base orthonormale de E, dont les p premiers vecteurs sont les vecteurs $e_1, ..., e_p$ de notre famille orthonormale de départ. □

23.4. Projection orthogonale sur un espace de dimension finie

Dans cette partie, E est un espace préhilbertien et V est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie non nulle.

23.4.1. Projeté orthogonal

Définition 23.43.

Soit $x \in E$. Il existe un unique vecteur de V, note $p_V(x)$, tel que $x - p_V(x) \in V^\perp$. $p_V(x)$ est appelé **projeté orthogonal** de x sur V.

Démonstration.
- *Analyse.* Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$. Puisque V est un sous-espace de E, on peut le munir du produit scalaire de E. De plus, V est de dimension finie, donc c'est un espace euclidien. Il s'ensuit que V possède une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$. Alors :
  - $y \in V$ donc $y = \sum_{i=1}^{p} \langle y, e_i \rangle e_i$.
  - $x - y \in V^\perp$, donc pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\langle x - y, e_i \rangle = 0$, puis $\langle y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$.

  Ainsi, $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$ ce qui prouve l'unicité d'un tel vecteur s'il existe.
- *Synthèse.* Posons $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors $y \in V$. Vérifions que $x - y \in V^\perp$.
  Puisque $V = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$, vérifier que $x - y \in V^\perp$ équivaut à vérifier que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $x - y \perp e_k$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

  $$\langle x - y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle$$

  car $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale. Ainsi $\langle x - y, e_k \rangle = 0$ et l'on vient de montrer que $x - y \in V^\perp$.

Finalement, on a montré qu'il existe un unique vecteur $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$. □

Remarque technique 23.44. Pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur a sur un sous-espace vectoriel de dimension finie V, il y a deux méthodes.

1. On détermine une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ de V ; alors $p_V(a) = \sum_{k=1}^{p} \langle a, e_k \rangle e_k$ (cf. démonstration précédente).
2. On utilise $p_V(a) \in V$ et $a - p_V(a) \in V^\perp$.

Exercice d'application 23.45. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, posons $V = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$. Soit $a = (x, y, z)$. Déterminer $p_V(a)$.

↪

1. Une base orthonormale de V est $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Ainsi,

$$p_V(a) = \langle a, v_1 \rangle v_1 = \left(\frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3} \right).$$

2. Puisque $p_V(a) \in V$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $p_V(a) = \lambda(1, 1, 1)$. De plus, $a - p_V(a) \in V^\perp$ donc $a - p_V(a) \perp (1, 1, 1)$. Ainsi $x - \lambda + y - \lambda + z - \lambda = 0$ d'où $\lambda = \frac{x+y+z}{3}$, et on retrouve le résultat obtenu avec la méthode 1.

Exercice d'application 23.46. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1), (1, 0, 1))$. Soit $a = (x, y, z)$. Déterminer $p_V(a)$.

↪ $p_V(a) \in V$ donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tel que $p_V(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1) = (\lambda + \mu, \lambda, \lambda + \mu)$.
De plus, $a - p_V(a) \in V^\perp$, donc $a - p_V(a) \perp (1, 1, 1)$ et $a - p_V(a) \perp (1, 0, 1)$. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - \lambda - \mu + y - \lambda + z - \lambda - \mu & = & 0 \\ x - \lambda - \mu + z - \lambda - \mu & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & y \\ \lambda + \mu & = & \frac{x+z}{2} \end{array} \right.$$

Finalement, $p_V(a) = \left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right)$.

Exercice d'application 23.47. Dans $\mathscr{C}^0([0\,;\,1]\,,\mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, considérons $V = \mathrm{Vect}\,(t\mapsto 1, t\mapsto t)$. Déterminer le projeté orthogonal sur V de $h : t\longmapsto t^2$.

$\hookrightarrow$ $p_V(h)$ est caractérisé par $p_V(h)\in V$ et $h-p_V(h)\in V^\perp$. Ainsi, il existe $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ tels que $p_V(h) = \lambda f+\mu g$ et $h-p_V(h)$ est orthogonal à f et à g. Ainsi,

$$0 = \langle h-p_V(h), f\rangle = \int_0^1 (t^2-\lambda-\mu t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}-\lambda-\frac{\mu}{2},$$

et

$$0 = \langle h-p_V(h), g\rangle = \int_0^1 (t^3-\lambda t-\mu t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{3}.$$

Donc λ et μ sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\frac{\mu}{2} & = & \frac{1}{3}\\ \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{3} & = & \frac{1}{4}\end{array}\right.$$

On obtient alors $\lambda = -\frac{1}{6}$ et $\mu = 1$. Ainsi, le projeté orthogonal de h sur V est :

$$p_V(h) : t\longmapsto t-\frac{1}{6}.$$

Remarque 23.48. Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille libre de E et $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ est son orthonormalisée de Gram-Schmidt, on a déterminé les expressions des ε_k en fonction des e_i :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|}e_1 \quad\text{et}\quad \forall k\in[\![2,n]\!],\ \varepsilon_k = \frac{1}{\|a_k\|}a_k \text{ où } a_k = e_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle e_k,\varepsilon_i\rangle\varepsilon_i.$$

On remarque alors que $a_k = e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$, où $F_{k-1} = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_{k-1}) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k-1})$.

23.4.2. Supplémentaire orthogonal

Proposition 23.49.

On a

$$V\oplus V^\perp = E.$$

On dit que $V^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal** de V dans E.

Démonstration.

- Soit $x\in E$. On a $x = p_V(x)+x-p_V(x)$, avec $p_V(x)\in V$ et $x-p_V(x)\in V^\perp$, ce qui qui montre que $E\subset V+V^\perp$.
  Or $V+V^\perp\subset E$, donc $E = V+V^\perp$ par double inclusion.
- Soit $x\in V$. Alors

  $$\underbrace{x}_{\in V^\perp}\perp\underbrace{x}_{\in V}.$$

  Donc $\langle x,x\rangle = 0$, puis $x = 0_E$. Ainsi $V\cap V^\perp\subset\{0_3\}$. L'autre inclusion étant toujours vraie, on obtient $V\cap V^\perp = \{0_E\}$.

Finalement, $V\oplus V^\perp = E$. □

On déduit immédiatement les résultats suivants.

Corollaire 23.50.

p_V est la projection sur V parallèlement à $V^\perp$.

Corollaire 23.51.

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

23.4.3. Distance à un sous-espace

Théorème 23.52 - Inégalité de Bessel.

Soit $x \in E$.

$$\|p_V(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Démonstration.
On a $x - p_V(x) \perp p_V(x)$ donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - p_V(x) + p_V(x)\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2$$

puis $\|x\|^2 \geqslant \|p_V(x)\|^2$. La racine carrée étant une application croissante sur $\mathbf{R}_+$,

$$\|x\| \geqslant \|p_V(x)\|.$$

□

Théorème 23.53.

Soit $x \in E$. $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V vérifiant

$$\|x - p_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

Démonstration.
Vérification de l'égalité. Soit $y \in V$. Montrons que $\|x - p_V(x)\| \leqslant \|x - y\|$.
On a $x - p_V(x) \in V^\perp$ et $y \in V$, ainsi que $p_V(x) \in V$. Donc $x - p_V(x) \perp p_V(x) - y$. Le théorème de Pythagore fournit alors :

$$\|x - p_V(x) + p_V(x) - y\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y\|^2$$

d'où

$$\|x - y\|^2 \geqslant \|x - p_V(x)\|^2.$$

Les normes étant des réels positifs, on a donc $\|x - p_V(x)\| \leqslant \|x - y\|$. Ceci étant vrai pour tout $y \in V$ et comme $p_V(x) \in V$, on en déduit $\|x - p_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$.

Unicité. Montrons maintenant que $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V ayant cette propriété. Soit $y_0 \in V$ vérifiant $\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$. Montrons que $y_0 = p_V(x)$.
On sait que $y_0, p_V(x) \in V$ donc $\|x - y_0\| \leqslant \|x - p_V(x)\|$ (par définition de y_0 et puisque $p_V(x) \in V$) et $\|x - p_V(x)\| \leqslant \|x - y_0\|$ (par la propriété démontrée avant sur $p_V(x)$ et puisque $y_0 \in V$). Par double inégalité,

$$\|x - p_V(x)\| = \|x - y_0\|.$$

Or

$$x - y_0 = \underbrace{x - p_V(x)}_{\in V^\perp} + \underbrace{p_V(x) - y_0}_{\in V}.$$

Puisque $x - p_V(x) \perp p_V(x) - y_0$, le théorème de Pythagore assure que

$$\|x - y_0\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y_0\|^2 .$$

Or $\|x - y_0\| = \|x - p_V(x)\|$, donc $\|p_V(x) - y_0\| = 0$ puis $y_0 = p_V(x)$ ce qui prouve l'unicité. □

Définition 23.54.

On appelle **distance** de x à V et on note $d(x, V)$ le réel :

$$d(x, V) = \min_{y \in V} \|x - y\| .$$

On a donc

$$d(x, V) = \|x - p_V(x)\| .$$

Exemple 23.55. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, reprenons $V = \text{Vect}\,((1,1,1))$ et $a = (x, y, z)$. On a vu précédemment que $p_V(a) = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1)$. Alors :

$$_d(a, V)^2 = \|a - p_V(a)\|^2 = \left(\frac{2x - y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x + 2y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x - y + 2z}{3}\right)^2 .$$

Exemple 23.56. On reprend l'Exercice d'application 23.47. La distance de $h : t \longmapsto t^2$ au sous-espace V engendré par les fonctions $f : t \longmapsto 1$ et $g; t \longmapsto t$ est

$$d(h, V)^2 = \|h - p_V(h)\|^2 = \int_0^1 (h(t) - p_V(h)(t))^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{36 \times 5}.$$

Finalement, $d(h, V) = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

Exercice d'application 23.57. Dans $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, fixons $(a, b) \neq (0, 0)$ et

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; ax + by = 0 \right\} .$$

Soit $u = (x_0, y_0)$. Calculer $d(u, D)$.

↪ Notons p la projection orthogonale sur D et q la projection orthogonale sur $D^\perp$. Remarquons que $p + q = \mathrm{Id}_E$, d'où $q = \mathrm{Id}_E - p$. Par conséquent, $u - p(u) = q(u)$. Puisque $d(u, D) = \|u - p(u)\|$, alors $d(u, D) = \|q(u)\|$. Déterminons donc $q(u)$.
Pour tout $(x, y) \in D$, $ax + by = 0$, ce qui montre que $(a, b) \in D^\perp$. En particulier, $D^\perp \neq \{(0, 0)\}$. De plus, $(-b, a) \in D$ donc $D \neq \{(0, 0)\}$. Or $\dim(D) = \dim(D^\perp) = \dim(\mathbf{R}^2) = 2$ donc on a nécessairement $\dim(D) = \dim(D^\perp) = 1$. Alors $(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, b))$ est une base orthonormale de $D^\perp$, d'où

$$q(u) = \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b) \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b) = \frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}(a, b).$$

Finalement,

$$d(u, D) = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chapitre 24

Séries numériques

Une infinité de mathématiciens entrent dans un bar. Le premier commande une bière.
Le deuxième commande une demi-bière.
Le troisième commande un quart de bière.
Le quatrième commande un huitième de bière...
Le barman finit par en avoir marre et sert deux bières.

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On se donne également $n_0 \in \mathbf{N}$.

24.1. Généralités

« Numérique » signifie « réelle ou complexe » .

24.1.1. Définitions, premiers exemples

Définition 24.1.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe.
On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ définie par

$$\forall N \geqslant n_0, \quad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

Cette série se note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur la valeur de n_0.
Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre S_N est appelé la **somme partielle** de rang N de la série de terme général u_n.

Définition 24.2.

La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ est convergente. Sa limite finie est alors appelée **somme de la série** $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
Autrement dit, si $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ est convergente,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{N} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est **divergente**.

Remarque 24.3.
- Comme pour les suites, il faut faire la différence entre la série, le terme général de la série et la somme de la série.
- Une série est une suite.
- Une somme partielle d'une série est un scalaire.
- Étudier la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou non. Deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exercice d'application 24.4. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} n$. En déduire la nature (convergente ou divergente) de cette série.

↪ Pour tout N entier naturel, la somme partielle de rang N de la série $\sum n$ est

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

La suite $(\frac{N(N+1)}{2})_{N\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente.

Exercice d'application 24.5. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$. En déduire que la série converge et donner sa somme.

↪ Pour tout N entier naturel, la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n\geqslant 1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ est

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

(on reconnaît une somme télescopique). La suite $(1-\frac{1}{N+1})_{N\in\mathbf{N}}$ converge vers 1 donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Exercice d'application 24.6. Monter que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

↪ Notons, pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$, $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$. On a, pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$,

$$S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(N+1)^2} \geqslant 0$$

donc $(S_N)_{N\in\mathbf{N}^\star}$ est convergente. En outre, pour $k \geqslant 2$, $0 < k(k-1) \leqslant k^2$, donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$,

$$S_N \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Donc (S_N) est croissante et majorée, donc convergente.

Exercice d'application 24.7. Montrer que la **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

↪ Pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$. On a, pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_{N+1} - H_n = \frac{1}{N+1} > 0.$$

Donc la suite (H_N) est strictement croissante. Le théorème de la limite monotone assure que H admet une limite ℓ dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Or, pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_{2N} - H_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Donc si $\ell \in \mathbf{N}$, on obtient avec l'égalité précédente, $\ell - \ell \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Il s'ensuit que la série harmonique diverge.

Remarque 24.8. Soit n_0 et n_1 deux entiers naturels. Les séries associées aux suites $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_1}$ sont de même nature. Autrement dit les premiers termes de la suite n'interviennent pas sur la convergence ou la divergence de la série de terme général u_n. Par contre, dans le cas où la série converge, les sommes $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $S' = \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n$ sont *a priori* différentes.

Définition 24.9.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ une série numérique **convergente**. Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre

$$R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

est appelé le **reste d'ordre** N de cette série.

En particulier, si $\sum u_n$ converge, on a pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N.$$

24.1.2. Premières propriétés de convergence

Proposition 24.10.

Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente, **alors :**

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.
2. La suite $(R_N)_{N \geqslant n_0}$ des restes d'ordre N de la série converge vers 0.

Démonstration. 1. Pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_n$. u est donc la différence de deux suites convergentes, donc converge et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n = 0.$$

2. De même, en passant à la limite dans la définition de (R_N), on obtient que la suite des restes converge et
$$\lim_{N\to+\infty} R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = 0.$$

□

La contraposée du premier point est souvent utilisée pour repérer "facilement" des séries divergentes.

Corollaire 24.11.

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série numérique. Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.
On dit que cette série **diverge grossièrement**.

Exemple 24.12. 1. La série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement car son terme général diverge.
2. La série $\sum \frac{1}{1+n}$ diverge grossièrement car son terme général converge vers 1.

⚠ **Attention** ⚠**.** Le fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 ne permet pas de prouver que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente. (cf exemple ci-dessous ou la série harmonique)

Exercice d'application 24.13. Montrer que la suite de terme général $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ tend vers 0 mais la série $\sum_{n\geqslant 0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ diverge.

↪ Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Donc $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Regardons les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. On reconnaît une somme télescopique, donc pour tout $N\in\mathbf{N}$,
$$\sum_{n=0}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1.$$
Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Théorème 24.14.

Soient $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ deux séries numériques et λ et μ deux scalaires.

1. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n\geqslant n_0}(\lambda u_n+\mu v_n)$ est convergente et
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n) = \lambda\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n. \qquad \text{(linéarité)}$$
En particulier, la somme de deux séries convergentes est convergente.
2. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ divergente , alors $\sum_{n\geqslant n_0}(u_n+v_n)$ est divergente.

Démonstration. 1. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont convergentes, pour tout $N\geqslant n_0$, on a
$$\sum_{n=n_0}^{N}(\lambda u_n+\mu v_n) = \lambda\sum_{n=n_0}^{N} u_n + \mu\sum_{n=n_0}^{N} v_n.$$

$\sum_{n=n_0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{N} v_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ donc $\sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

2. Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente. On raisonne par l'absurde. Si $\sum(u_n+v_n)$ est convergente, alors par le premier point, $\sum((u_n+v_n)-u_n)$ est convergente, donc $\sum v_n$ est convergente. Ceci est absurde, donc $\sum v_n$ diverge. □

Remarque 24.15. 1. Le premier point du théorème précédent assure que la somme de deux séries convergentes est convergente (c'est le cas $\lambda = \mu = 1$). L'égalité $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ n'a de sens que si les trois séries convergent.

2. Le théorème précédent montre que l'ensemble des suites dont la série associée est convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

3. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum_{n\geqslant n_0} (u_n + v_n)$.

Exemple 24.16. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -n$ sont divergentes. Leur somme $\sum_{n\geqslant 0} 0$ est convergente. Par contre, la série $\sum_{n\geqslant 0} n + \sum_{n\geqslant 0} n = \sum_{n\geqslant 0} 2n$ est divergente.

Corollaire 24.17.

Notons $E = \left\{u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\right\}$. Alors E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ u & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$$

est linéaire.

Démonstration.
Voir le point 1. du théorème précédente. □

Proposition 24.18.

Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

1. $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(u_n)$ convergent. Le cas échéant,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n).$$
2. $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \overline{u_n}$ converge. Le cas échéant,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)}.$$

Démonstration.
Immédiat en utilisant les résultats sur les suites complexes. □

24.1.3. Séries géométriques

Définition 24.19.

On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ où q est un nombre complexe.

Proposition 24.20.

Soit $q \in \mathbf{C}$. On considère la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$.

1. En notant $(S_N)_{N\geqslant 0}$ la suite de ses sommes partielles, on a :
$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad S_N = \begin{cases} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ N+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$
2. La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.
3. Lorsque $|q| < 1$, la somme S de la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est donnée par :
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$
4. Dans le cas où $|q| \geqslant 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ diverge grossièrement, son terme général ne tendant pas vers 0.

Exercice d'application 24.21. Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum 5^n$ 2. $\sum i^n$ 3. $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 4. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$

↪

1. La série diverge grossièrement.
2. La série diverge grossièrement.
3. La série converge vers $\frac{1}{2}$.
4. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n} = \frac{1}{2}\sum \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\sum \left(\frac{1}{4\mathrm{e}}\right)^n$. Comme $\frac{\mathrm{e}}{4}$ et $\frac{1}{4\mathrm{e}}$ sont dans $]0\,;1[$ donc $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4\mathrm{e}}} = \frac{2}{4-\mathrm{e}} + \frac{2\mathrm{e}}{4\mathrm{e}-1}.$$

24.1.4. Séries télescopiques

Définition 24.22.

On appelle **série télescopique** une série numérique $\sum v_n$ dont le terme général v_n peut s'écrire sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$ où (u_n) est une suite numérique.

Proposition 24.23 - Lien entre suite et série.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série télescopique $\sum_{n\geqslant n_0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

Démonstration.
Pour tout $N\in\mathbf{N}$, $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n)=u_N-u_0$. Donc $\sum_{n\geqslant n_0}(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si $(u_N-u_0)_{N\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. □

Remarque 24.24. Dans la proposition précédente, la condition porte uniquement sur la convergence de la suite (u_n) et pas sur la valeur de sa limite. En particulier, il n'est pas nécessaire que la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ soit nulle pour que la série $\sum_{n\geqslant n_0}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

24.2. Séries à termes réels positifs ou nuls

24.2.1. Généralités

Proposition 24.25.

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général u_n est réel positif ou nul.

1. La suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante.
2. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. 1. Pour tout $N\geqslant 1$, $S_{N+1}-S_N=u_{N+1}\geqslant 0$, donc $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est croissante.

2. Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. □

24.2.2. Comparaison de deux séries à termes positifs ou nuls

Théorème 24.26 - Critère de comparaison des séries à termes positifs.

Soit $n_0\in\mathbf{N}^\star$, $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$, $\sum_{n\geqslant n_0}v_n$ deux séries **à termes positifs ou nuls**. On suppose que pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n\leqslant v_n$.

- Si la série $\sum_{n\geqslant n_0}v_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ est divergente, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0}v_n$ est divergente.

Démonstration.
Pour tout $N\geqslant n_0$, on pose $U_N=\sum_{n=n_0}^{N}u_n$ et $V_N=\sum_{n=n_0}^{N}v_n$. On a alors, pour tout $N\geqslant n_0$, $U_N\leqslant V_N$.
Si $\sum v_n$ converge, alors la suite (V_N) converge donc est majorée. Donc (U_N) est également majorée. Comme (U_N) est croissante, elle est donc convergente.

Le deuxième point est la contraposée du premier. □

Exercice d'application 24.27. Donner la nature de la série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $n \geqslant \sqrt{n}$, donc $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après le critère de comparaison de séries à termes positifs.

Exercice d'application 24.28. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$.

↪ Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\sqrt{n^4+n+1} \geqslant \sqrt{n^4} = n^2$, donc

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ converge.

Exercice d'application 24.29. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} (\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n})$.

↪ Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}\right)$.

$\sum \frac{1}{n}$ diverge donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} (\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n})$

Théorème 24.30 - Critère des équivalents pour les séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites **à termes réels positifs ou nuls.** On suppose que les termes de la suite (v_n) ne sont pas nuls au delà d'un certain rang. Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Démonstration.
Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$. C'est à dire $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\frac{3}{2}\sum v_n$ converge et par théorème de comparaison des séries à terme positif, $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{2}v_n$ converge par théorème de comparaison des séries à terme positif, donc $\sum v_n$ converge. □

Exercice d'application 24.31. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin(\frac{1}{2^n})$.

↪ Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{2^n} \in]0;\frac{1}{2}[$. Or sin est positive sur $]0;\frac{1}{2}[$, donc la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ est à termes positifs.

De plus, $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$.

Donc, par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont de même nature. Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ elle est convergente, donc $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

Exercice d'application 24.32. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} (\exp(\frac{1}{n}) - 1)$.

↪ Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{1/n} \geqslant 1$, donc la suite $\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)$ est à termes positifs.

De plus, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right) \sim \frac{1}{n}$.

Donc, par le critère des équivalents de séries à termes positifs, $\sum \left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)$ est divergente.

Exercice d'application 24.33. Déterminer la nature de $\sum \ln(1 - \frac{1}{n^2})$.

↪ Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\frac{1}{n^2} \in]0\,;\,1]$ puis $-\ln(1 - \frac{1}{n^2}) \geqslant 0$.

De plus, $-\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln(1-\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{n^2}$.

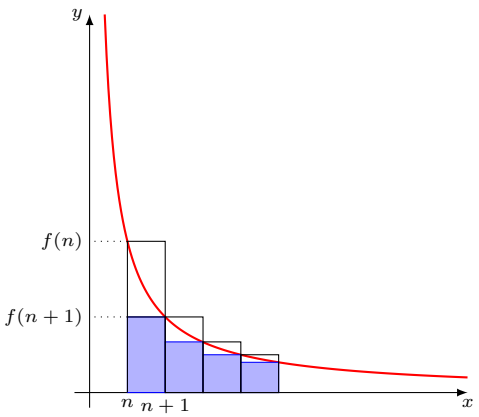
Donc, par le critère des équivalentes pour les séries à termes positifs, $\sum \ln(1-\frac{1}{n^2})$ et $-\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc $\sum \ln(1-\frac{1}{n^2})$ est convergente.

24.2.3. Comparaison avec une intégrale

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

On considère la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$. On note $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles de cette série.

Dans le cas où f est décroissante :



On va encadrer l'aire sous la courbe représentative de f par les sommes partielles.

Soit $n \geqslant n_0$. Alors, par décroissance de f, pour tout $t \in [n; n+1]$,

$$f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1).$$

Puisque f est continue sur le segment $[n\,;\,n+1]$, on peut intégrer l'inégalité entre n et $n+1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t,$$

puis

$$f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1).$$

On somme cette relation pour n allant de n_0 à $N-1$. On obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \geqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n+1).$$

i.e.

$$S_N - f(N) \geqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant S_N - f(n_0).$$

En reprenant ce raisonnement lorsque f est croissante, on obtiendrait :

$$S_N - f(N) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_N - f(n_0).$$

En résumé, nous avons montré le théorème suivant.

Théorème 24.34 - Critère de comparaison série/intégrale.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.
Pour tout $N \geqslant n_0$, on note $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$.

1. Si f est croissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$
$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N).$$
2. Si f est décroissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$,
$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0).$$

Théorème 24.35.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et f une fonction réelle continue, **décroissante** et positive ou nulle sur $[n_0, +\infty[$.

1. La série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N \geqslant n_0}$ converge.
2. En cas de convergence,
$$0 \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) - \lim_{N \to +\infty} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n_0).$$
3. En cas de divergence,
$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N \to +\infty}{\sim} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. 1. Pour tout $N \geqslant n_0$, on note $u_N = \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$ la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$. D'après la proposition précédente, on a donc pour tout $N \in \mathbf{N}$,
$$u_N + f(N) \leqslant S_N \leqslant u_N + f(n_0).$$
$\sum f(n)$ est une série à termes positifs car f est positive.
Si u_N converge, alors S_N est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge d'après la Proposition 24.25.
Réciproquement, si $\sum f(n)$ converge, alors, d'après la Proposition 24.10, la suite $(f(n))_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0. On a alors pour tout $N \geqslant n_0$:
$$S_n - f(N) \geqslant u_N.$$
Or, $S_N - f(N)$ est convergente et u_N est croissante, donc par théorème de comparaison, $(u_N)_{N \geqslant n_0}$ converge.

2. On a pour tout $N \geqslant n_0$,
$$f(N) \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) - \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n_0).$$
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient bien le résultat voulu.

3. En cas de divergence, on a pour tout $N \geqslant n_0$ que

$$1 - \frac{f(N)}{S_N} \leqslant \frac{\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t}{S_N} \leqslant 1 - \frac{f(n_0)}{S_N}.$$

Comme f est positive est décroissante, $f(N)$ est bornée. Comme S_N est croissante non-convergente, elle tend vers $+\infty$. Donc $1 - \frac{f(N)}{S_N} \to$ et $1 - \frac{f(n_0)}{S_N} \to 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc que $\dfrac{\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t}{S_N} \to$, d'où l'équivalent recherché.

□

24.2.4. Les séries de Riemann

Définition 24.36.

On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

Théorème 24.37.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

- diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 0$;
- diverge (mais pas grossièrement) si $0 < \alpha \leqslant 1$;
- converge si $\alpha > 1$.

Démonstration.

- Si $\alpha \leqslant 0$, alors la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est strictement positive et croissante, donc ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Lorsque $\alpha > 0$, nous allons utiliser le principe de comparaison série intégrale.

  On pose, pour tout $N \geqslant 1$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$. Alors, posant la fonction $f_\alpha : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$, on a

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_\alpha(n).$$

  f_α est continue positive et décroissante (car elle est dérivable et sa dérivée $x \longmapsto -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ est négative). Donc, d'après le critère de comparaison série/intégrale,

$$\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + f_\alpha(1) \leqslant S_N \leqslant \int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + f_\alpha(N),$$

  i.e.

$$\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + 1 \leqslant S_N \leqslant \int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{N^\alpha}.$$

  Ainsi la série (S_N) est convergente si et seulement si $(\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t)$ est convergente (en effet, (S_N) est croissante donc si elle est majorée par une suite convergente donc bornée, alors elle converge ; de même pour l'implication réciproque).

  - Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(x)\Big]_1^N = \ln(N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

    Donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge (déjà démontré d'une autre manière !).

◦ Si $\alpha \neq 1$, alors
$$\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^N = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$
La suite de terme général $(N^{1-\alpha})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. On en déduit que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

Exercice d'application 24.38. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{n^3+3n+1}{n^7+n+2}$.

↪ On a $\frac{n^3+3n+1}{n^7+n+2} \sim \frac{1}{n^4}$, donc par comparaison avec une série de Riemann, on obtient que $\sum \frac{n^3+3n+1}{n^7+n+2}$ converge.

Exercice d'application 24.39. Déterminer la nature de la série $\sum \mathrm{Arccos}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $u_n = \mathrm{Arccos}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})$. Donc
$$\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}\big(u_n^2\big)$$
puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\cos(u_n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $u_n^2 \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ puis $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{n}}$. Il s'ensuit que $\sum u_n$ diverge par comparaison avec une série de Riemann.

Remarque 24.40. Le Théorème 24.35 donne les équivalents :
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{si } 0<\alpha<1$$

Exercice d'application 24.41. Déterminer un équivalent de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

↪ C'est une série de Riemann avec un exposant égal à $\frac{1}{2}$, donc elle diverge vers $+\infty$. De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$
puis
$$S_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant S_n.$$
Or
$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2.$$
Ainsi
$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant (2\sqrt{n}2) + 1 = 2\sqrt{n} - 1.$$
Finalement, $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

24.2.5. Comparaison à une série géométrique

Proposition 24.42 - Règle de D'Alembert.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

- si $0 \leqslant \ell < 1$, la série converge ;
- si $\ell > 1$, la série diverge et $\lim u_n = +\infty$;
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration.
On suppose que $\ell \in [0\,;1[$ et montrons que la série $\sum u_n$ converge. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} -_e ll \right| \leqslant \varepsilon$$

Alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \frac{u_{N+1}}{u_N}}_{(n-N) \text{ facteurs}} \times u_N \leqslant (\ell+\varepsilon)^{n-N} u_N.$$

Donc $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_N}{(\ell+\varepsilon)^N}(\ell+\varepsilon)^n$. Comme $\ell + \varepsilon < 1$, la série $\sum(\ell+\varepsilon)^n$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.
Le cas $\ell > 1$ se démontre de manière similaire. □ □

Exercice d'application 24.43. Déterminer la nature de $\sum \frac{\ln n}{2^n}$. On applique le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{2\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc la série $\sum \frac{\ln n}{2^n}$ est convergente.

24.3. Convergence absolue

Définition 24.44.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$ est convergente.

Exemple 24.45. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Théorème 24.46 - Lien entre convergence et absolue convergence.

Si une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. Le cas échéant, on a l'**inégalité triangulaire** :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration.

- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ par : pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n = u_n + |u_n|$. Alors, pour tout n, on a

  $$0 \leqslant v_n \leqslant 2|u_n|.$$

  $\sum |u_n|$ converge par hypothèse, donc est majorée. on en déduit que $\sum v_n$ est aussi majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge. Ainsi, $\sum u_n = \sum v_n - \sum |u_n|$, donc $\sum u_n$ converge.
- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite complexe, alors, pour tout $n \geqslant n_0$, on a
  $0 \leqslant |\,\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\,\mathfrak{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$
  Ainsi, $\sum |\,\mathfrak{Re}(u_n)|$ et $\sum |\,\mathfrak{Im}(u_n)|$ sont des séries à termes positifs et majorées, donc convergentes. $\sum \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes, donc convergentes d'après le premier point. Par linéarité, $\sum \mathfrak{Re}(u_n) + i\,\mathfrak{Im}(u_n)$ est convergente.

- Dans les deux cas, pour tout $N \geqslant n_0$, on a par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} |u_n|.$$

Lorsque ces deux séries sont convergentes, on peut passer à la limite et l'on obtient le résultat.

□

Exercice d'application 24.47. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

↪ $\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaisons des séries à termes positifs, la série $\sum \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ est convergente.

Ainsi, $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice d'application 24.48. Montrer que la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{in}}{n^2}$ converge.

↪ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\left|\frac{\mathrm{e}^{in}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison avec une série de Riemann, la série proposée converge absolument. En particulier, elle est convergente.

Exercice d'application 24.49. Etudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{\mathrm{e}^n}$.

↪ Pour tout $n \geqslant 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{\mathrm{e}^n}$. On a $|u_n| = \frac{\ln n}{\mathrm{e}^n}$. Par croissance comparée, $n^2|u_n| = \frac{n^2 \ln n}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par comparaison avec un série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque 24.50. Une série peut être convergente sans être absolument convergente (cf. exercice d'application suivant). On dit alors que la série est **semi-convergente**.

Exercice d'application 24.51. On considère la **série harmonique alternée** $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Cette série est-elle absolument convergente ? convergente ?
Indication. On pourra admettre qu'il existe une constante γ (appelée **constante d'Euler**) telle que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

↪ La série n'est pas absolument convergente puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\left|\frac{(-1)^{n(1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ est le terme de la série harmonique, qui diverge.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n.$$

Il s'ensuit

$$S_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - (\ln(n) + \gamma) + \mathrm{o}(1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + \mathrm{o}(1).$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2) \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln(2).$$

Ainsi, la série harmonique alternée est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Proposition 24.52 - Un critère d'absolue convergence.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas au-delà d'un certain rang.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration.
Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Donc il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$.

$\sum v_n$ converge, donc $\sum M v_n$ converge.

Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.

$\sum u_n$ est donc absolument convergente. □

◇◇

Remarque technique 24.53. Sous les mêmes hypothèses, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

Exercice d'application 24.54. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n\cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3-5n+2}$?

↪ On a

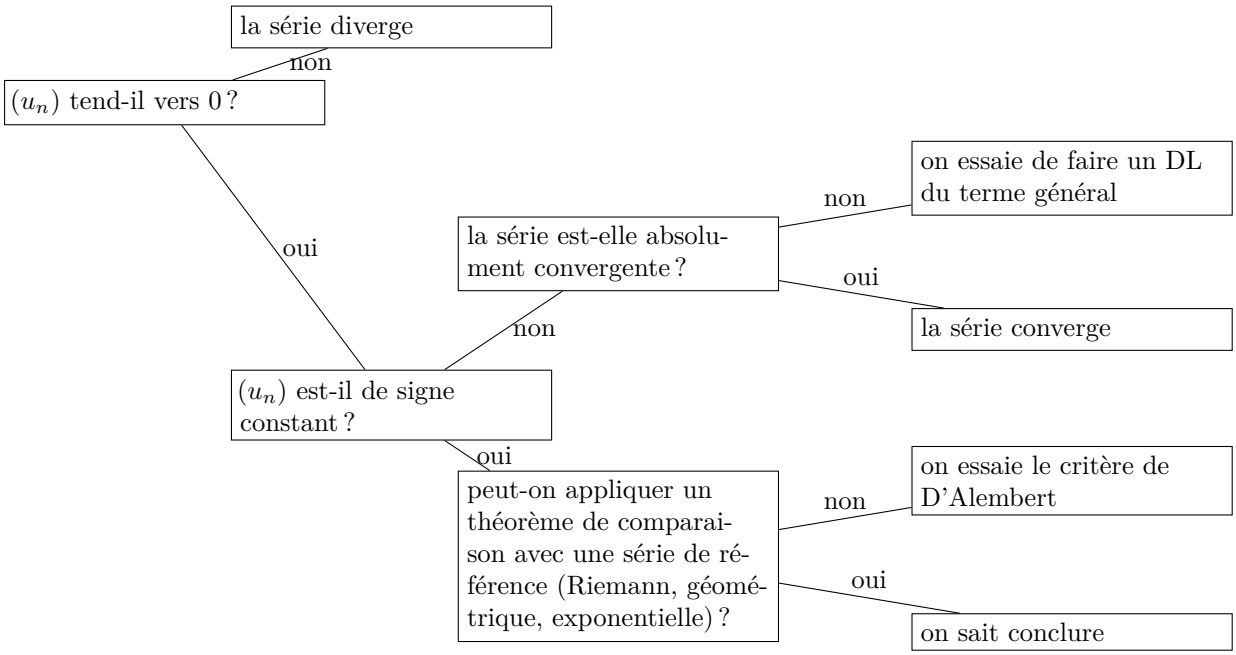
$$\frac{n\cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3-5n+2} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times \frac{\cos(3n+1)}{1-(5/n^2)+(2/n^3)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc $\sum \dfrac{n\cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3-5n+2}$ converge.

◇◇

24.4. Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série $\sum u_n$ à termes quelconques.



24.5. Développement décimal propre d'un nombre réel

On s'intéresse à l'écriture d'un réel sous la forme d'un nombre à virgules. Par exemple, $\dfrac{8}{3} = 2,3333333\ldots$ ou $\pi = 3,14159\ldots$.

Commençons par les nombres réels positifs.

L'écriture $\pi = 3,14159\cdots = \lfloor \pi \rfloor + \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{5}{10^4} + \dfrac{9}{10^5} + \ldots$ amène à l'étude des séries de terme général $\dfrac{a_n}{10^n}$ où, pour tout $n \geqslant 1$, les a_n sont des entiers compris entre 0 et 9.

Une telle série converge, car son terme général $\dfrac{a_n}{10^n}$ est dominé par $\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$, qui est celui d'une série géométrique convergente.

Cette écriture d'un nombre réel n'est pas unique car par exemple $1,0000000\cdots = 0,99999999\ldots$.

En effet, on a $1,00000\cdots = 1$ et $0,\underbrace{9999\ldots9}_{n \text{ chiffres}} = 9\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{10^k} = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1 - 10^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Cependant, nous pouvons montrer (cf ce qui suit), que chaque nombre réel positif a un développement décimal unique dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

Proposition 24.55.

Soit x un nombre réel positif. Il existe une unique suite suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers de $[\![0;9]\!]$ qui ne stationne pas à la valeur 9 et telle que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Cette écriture constitue le *développement décimal propre* de x. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, le nombre a_n a pour valeur $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ et on l'appelle la $n-$ième décimale de x.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$

- Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$ est un entier entre 0 et 9.
  Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a
  $$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$$
  et
  $$10^n x - 10 < 10 \times \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor \leqslant 10^n x,$$
  donc $-1 < a_n < 10$. Comme il est clair que a_n est un entier, on en déduit que $a_n \in [\![0;9]\!]$.
- Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. On a
  $$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \times \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor}{10^n} = \text{ téléscopage } = \frac{\left\lfloor 10^N x \right\rfloor}{10^N} - \lfloor x \rfloor \xrightarrow[N \to +\infty]{} x - \lfloor x \rfloor.$$
  donc la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge et sa somme vaut $x - \lfloor x \rfloor$, ce qui donne l'égalité du théorème.
- Démontrons que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ne stationne pas à la valeur 9.
  Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ a_n = 9$.
  Alors $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} \frac{a_n}{10^n} = 9 \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{10^n}$ est une série géométrique convergente dont la somme vaut $\dfrac{1}{10^{n_0 - 1}}$.
  Cela donne
  $$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0 - 1}}.$$
  On constate alors que $10^{n_0 - 1} x \in \mathbf{Z}$, donc $a_{n_0} = \lfloor 10^{n_0} x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n_0 - 1} x \rfloor = 10^{n_0} x - 10 \times 10^{n_0 - 1} x = 0$, ce qui est absurde car $a_{n_0} = 9$.
- Par l'absurde, supposons qu'il existe deux suites différentes $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ d'entiers de $[\![0;9]\!]$ qui ne stationnent pas à la valeur 9 telles que
  $$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$
  On note alors $n_0 = \min\{n \in \mathbf{N}^\star \mid a_n \neq b_n\}$. Supposons que $a_{n_0} < b_{n_0}$ (quitte à échanger les rôles) c'est-à-dire $a_{n_0} + 1 \leqslant b_{n_0}$. On peut écrire
  $$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0}}$$
  l'inégalité étant stricte puisque l'un au moins des a_n pour $n \geqslant n_0 + 1$ n'est pas égal à 9. On a alors
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0}}.$$
  Par ailleurs, par définition de n_0, on a :
  $$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}}$$
  et donc
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0}}{10^n} + \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0} + 1}{10^n} \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{10^n}.$$
  Comme les termes de la série $\displaystyle\sum \frac{b_n}{10^n}$ sont positifs ou nuls, les sommes partielles de celle-ci sont majorées par la somme de cette série et on a donc
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$$
  ce qui est absurde !

□

Exemple 24.56.
- $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803398875\ldots$
- $\mathrm{e} = 2,71828182846\ldots$

Pour les réels négatifs, la tradition veut que l'on adopte l'écriture décimale de leur valeur absolue précédée du signe –. Par exemple : $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ donc $-\sqrt{2} = -1,414\ldots$ (alors que $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$).

Le développement décimal propre permet de caractériser les nombres rationnels.

Proposition 24.57 - Caractérisation des rationnels.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$. $x \in \mathbf{Q}$ si et seulement si sont développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

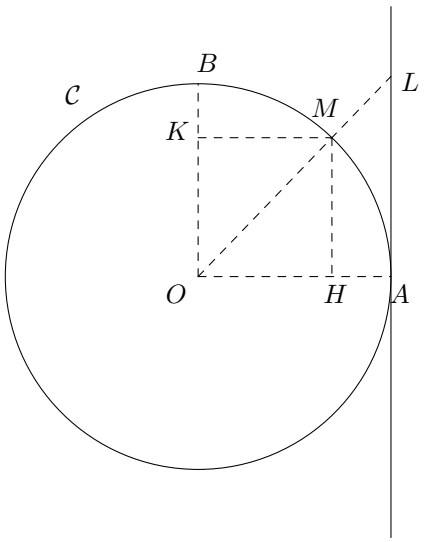
Exemple 24.58. $1/7 = 0,142857142857142857\ldots$

Annexe A

Formulaire de trigonométrie

A.1. Présentation

Soit $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K, projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB), et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A.



On oriente la droite (OA) (resp. (OB), (OL)) par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OL}$).

Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)$, on sait que :

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OH},\quad \sin\alpha = \overline{OK},\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AL}},$$

la tangente de α étant définie si et seulement si L existe, *i.e.* si le point M n'est pas sur la droite (OB), *i.e.* si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

A.2. Formulaire de trigonométrie

Proposition A.1.

Pour tout α réel,

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Démonstration.
En reprenant les notations du paragraphe A.1, on a $OM^2 = 1$, d'où le résultat. □

Proposition A.2 - Angles remarquables.

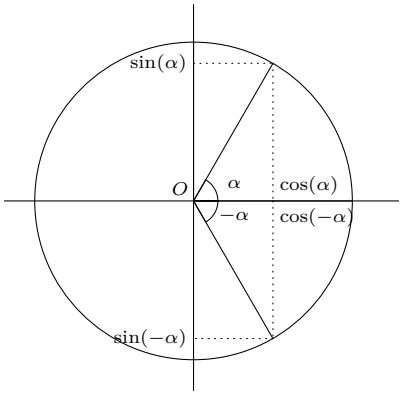
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

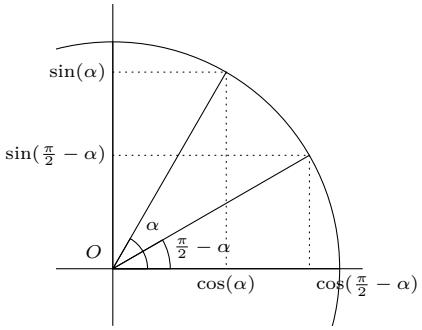
Proposition A.3.

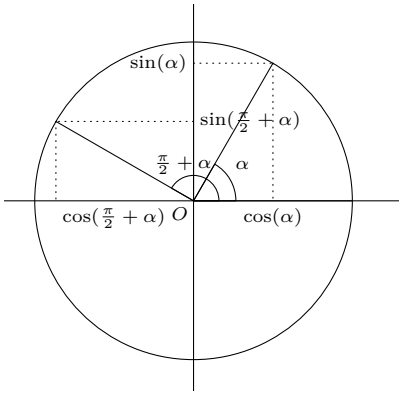
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

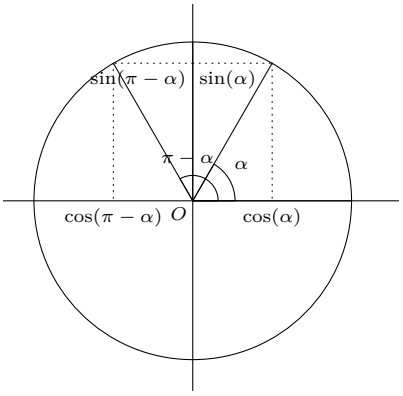
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

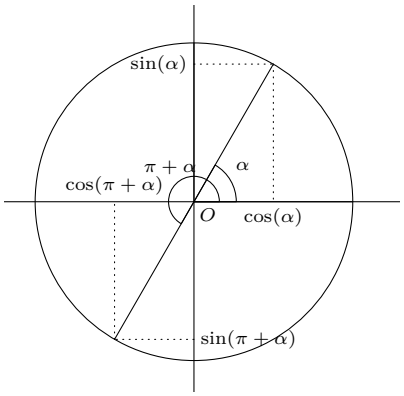
On peut rapidement retrouver ces égalités en dessinant un cercle trigonométrique :











Proposition A.4 - Formules d'addition.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \qquad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

Si de plus, x, y, $x+y$ et $x-y$ ne sont pas des éléments de $\{\pi/2 + k\pi \,:\, k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

Démonstration.
Ces formules sont immédiates en utilisant les nombres complexes. Par exemple,

$$\sin(x+y) = \mathfrak{I}m(\mathrm{e}^{i(x+y)}) = \mathfrak{I}m(\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy}) = \mathfrak{I}m\left(\cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \cos y\sin x\right).$$

Cette proposition permet par ailleurs de démontrer facilement la Proposition A.3. □

En prenant en compte la ligne 1 de la Proposition A.3, seule la première colonne de formules est à mémoriser, la seconde s'en déduisant immédiatement.

Les Propositions A.1 et A.4 fournissent par ailleurs les formules suivantes, qui sont très souvent utiles et donc à connaître par cœur :

Corollaire A.5 - Formules de duplication.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

Si de plus, x n'est pas un élément de $\{\pi/4 + k\pi/2,\ \pi/2 + k\pi \,:\, k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

Exercice d'application A.6. Déterminer la valeur du réel positif $\cos(\pi/8)$.

↪ On a $\cos(\pi/4) = \cos(2\pi/8) = 2\cos^2(\pi/8) - 1$, d'où $\cos^2(\pi/8) = (\sqrt{2}+2)/4$. Puisque $\cos(\pi/8) \geqslant 0$, on obtient $\cos(\pi/8) = \sqrt{(\sqrt{2}+2)/2}$.

Corollaire A.7.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On suppose que x n'est pas un élément de $\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ et on pose $t = \tan(\frac{\pi}{2})$.

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration.
Les formules proviennent directement du Corollaire A.5. □

Proposition A.8 - Somme et différence de deux cosinus, de deux sinus.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Démonstration.
Ces formules se retrouvent rapidement avec l'astuce développée dans le chapitre sur les complexes, concernant la somme ou la différence de deux exponentielles complexes.

- $\cos(x) + \cos(y) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy}) = \mathfrak{Re}\left(2\cos\dfrac{x-y}{2}\mathrm{e}^{i\frac{x+y}{2}}\right)$
  $= \mathfrak{Re}\left(2\cos\dfrac{x-y}{2}\left(\cos\dfrac{x+y}{2} + i\sin\dfrac{x+y}{2}\right)\right) = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}.$
- $\sin(x) + \sin(y) = \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy}) = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}$ en reprenant le calcul précédent.
- Les autres formules sont laissées en exercice. □

Corollaire A.9 - Produit de sinus et de cosinus.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Démonstration.
Ces formules se retrouvent rapidement par combinaison linéaire des formules de base ou en utilisant la formule d'Euler pour linéariser l'expression manipulée.

- $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})(\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy})}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{i(x+y)} + \mathrm{e}^{-i(x+y)} + \mathrm{e}^{i(x-y)} + \mathrm{e}^{-i(x-y)}}{4}$
  $= \dfrac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$
- Les autres points se montrent de la même manière. □

Annexe **B**

Formulaire de dérivées et primitives

B.1. Dérivées usuelles

B.1.1. Formules de dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, λ un complexe et f, g deux fonctions à valeurs complexes définies sur I, dérivables.

La fonction $f+g$ est dérivable et	$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$
La fonction λf est dérivable et	$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$
La fonction fg est dérivable et	$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$
Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et	$\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}}$

Soit I, J deux intervalles de $\mathbf{R}$, f une fonction définie sur I à valeurs dans J, dérivable, et g une fonction à valeurs complexes définie sur J, dérivable.

La fonction $g \circ f$ est dérivable et	$\boxed{(g \circ f)' = f'(g' \circ f)}$

B.1.2. Dérivées des fonctions usuelles

Dans ce tableau, on donne les expressions formelles des dérivées usuelles, sachant que α désigne un réel et que β est un réel strictement positif.

Fonction	Dérivée
$x \longmapsto x^\alpha$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$
$x \longmapsto \beta^x$	$x \longmapsto \ln(\beta)\beta^x$

Fonction	Dérivée
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)^2},\ x \longmapsto 1+\tan^2(x)$
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$
$x \longmapsto \mathrm{th}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2},\ x \longmapsto 1-\mathrm{th}(x)^2$
$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
$x \longmapsto \mathrm{argsh}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$x \longmapsto \mathrm{argch}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$x \longmapsto \mathrm{argth}(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

B.2. Primitives usuelles

Dans ce tableau, $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}\backslash\{-1\}$, $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1\}$ et $a \in \mathbf{R}^{+\star}$. Le domaine de validité désigne les intervalles sur lesquels les primitives des fonctions réelles considérées sont valides.

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto x^p$	$x \longmapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$	$\mathbf{R}^{+\star}$ ou $\mathbf{R}^{-\star}$
$x \longmapsto x^q$	$x \longmapsto \dfrac{x^{q+1}}{q+1}$	$\mathbf{R}^{+\star}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbf{R}^{+\star}$ ou $\mathbf{R}^{-\star}$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[,\ k \in \mathbf{Z}$
$x \longmapsto \mathrm{cotan}(x)$	$x \longmapsto \ln(\lvert\sin(x)\rvert)$	$]k\pi, (k+1)\pi[,\ k \in \mathbf{Z}$

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert\tan(x/2)\rvert)$	$]k\pi,(k+1)\pi[,\ k\in\mathbf{Z}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert\tan(x/2+\pi/4)\rvert)$	$]-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi[,\ k\in\mathbf{Z}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)^2}$	$x \longmapsto -\mathrm{cotan}(x)$	$]k\pi,(k+1)\pi[,\ k\in\mathbf{Z}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)^2}$	$x \longmapsto \tan(x)$	$]-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi[,\ k\in\mathbf{Z}$
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \mathrm{th}(x)$	$x \longmapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \mathrm{cotanh}(x)$	$x \longmapsto \ln(\lvert\mathrm{sh}(x)\rvert)$	$\mathbf{R}^{+\star}$ ou $\mathbf{R}^{-\star}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert\mathrm{th}(x/2)\rvert)$	$\mathbf{R}^{+\star}$ ou $\mathbf{R}^{-\star}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$	$x \longmapsto 2\,\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$	$x \longmapsto -\coth(x)$	$\mathbf{R}^{+\star}$ ou $\mathbf{R}^{-\star}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$	$x \longmapsto \mathrm{th}(x)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}\,\mathrm{argth}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a,a[$
	$x \longmapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert\right)$	$]-\infty,-a[$ ou $]-a,a[$ ou $]a,+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a,a[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{argsh}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbf{R}$
	$x \longmapsto \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{argch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]a,+\infty[$
	$x \longmapsto \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert)$	$]-\infty,-a[$ ou $]a,+\infty[$

Annexe C

Plan d'étude d'une fonction

1. Si l'ensemble de départ de f n'est pas précisé dans l'énoncé, on détermine le domaine de définition de f. Pour cela, on détermine l'ensemble E des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
2. Détecter une éventuelle parité/imparité/périodicité et réduire en conséquence le domaine d'étude.
3. Calcul des limites aux bords de E. On rappelle que ces calculs peuvent nous indiquer l'existence d'asymptotes :
   - si, pour $a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors la courbe représentative de f présente en a une asymptote verticale d'équation $x = a$.
   - si, pour $b \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors la courbe représentative de f a une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
4. Pour l'étude de variations, on vérifie que les variations ne sont pas évidentes (cas d'une somme de fonctions croissantes, d'une composée de fonctions croissantes, etc.). Dans le cas contraire, on utilise la dérivée de la fonction :
   (a) On justifie sur que la fonction est dérivable, en écrivant explicitement l'ensemble sur lequel on travaille.
   (b) On calcule la dérivée, qu'on cherche à factoriser le plus possible (en vue d'une étude de signe).
   (c) On étudie le signe de la dérivée. La plupart du temps, il suffit de résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$, d'inconnue réelle $x \in E$ (éventuelle $f'(x) = 0$ si on précise les points d'annulation de la dérivée dans le tableau de signe).
   (d) On conclut ; soit avec une phrase, soit avec un tableau de signes pour la dérivée et de variations pour la fonction (il faut alors justifier chaque élément apparaissant dans les tableaux).

   Il faut vérifier avant de terminer que tous les résultats obtenus sont cohérents.
5. Esquisser un graphe résumant l'étude en faisant apparaître les asymptotes horizontales ou verticales détectées. On peut y souligner des valeurs ou des tangentes notables.

Exercice d'application C.1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x+1} \end{array}$, dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.
2. Étudier la fonction f.

↪

1. Puisque le domaine de définition de f est $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$, le centre de symétrie ne peut avoir que -1 comme abscisse. Pour $x \in \mathbf{R}^\star$,

$$b = \frac{f(-1+x) + f(-1-x)}{2} = 2,$$

donc $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie de coordonnées $(-1, 2)$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude de la fonction à $]-1, +\infty[$.

2. On a :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2x - 1 = -3.$$

Comme $x \longmapsto x + 1$ est positive sur $]-1, +\infty[$, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty.$$

Ainsi $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2,$$

donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

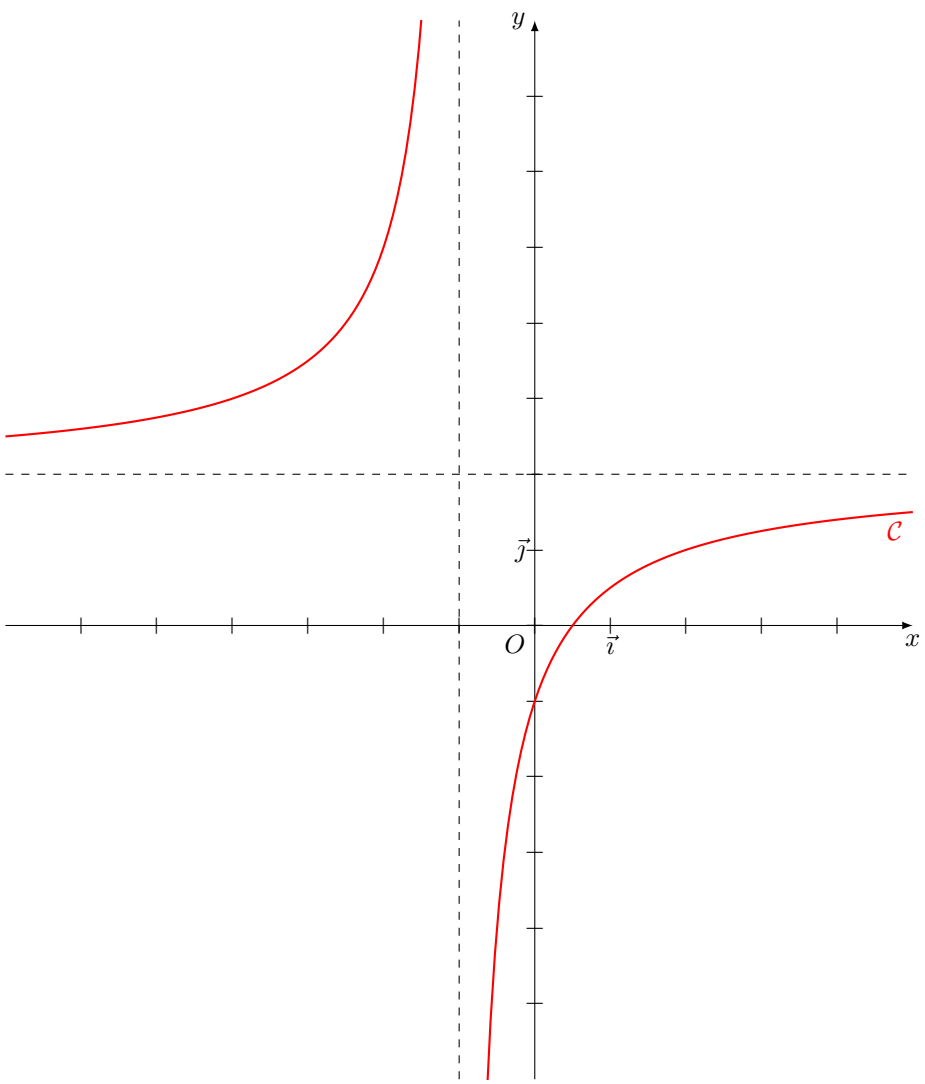
La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions affines et, pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

En utilisant la propriété de symétrie de $\mathcal{C}$, on obtient :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2


y
x
O
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$
$\mathcal{C}$

Annexe D

Relations d'ordre (hors-programme)

On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E toute assertion logique associant à certains couples (x, y) d'éléments de E la valeur logique « Vrai ». Le cas échéant, on note $x \mathcal{R} y$. Par exemple, « être de la même taille » est une relation binaire sur l'ensemble des être humains.

Définition D.1.

On appelle **relation d'ordre** sur un ensemble E toute relation binaire sur E vérifiant :

(1) pour tout $x \in E$, $x \mathcal{R} x$ (**réflexivité**) ;

(2) pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ implique $x = y$ (**antisymétrie**) ;

(3) pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ implique $x \mathcal{R} z$ (**transitivité**).

On dit que deux éléments de E sont **comparables** pour une relation d'ordre $\mathcal{R}$ lorsque $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$. Si deux éléments quelconques de E sont comparables, on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre total**. Dans le cas contraire, l'ordre est dit **partiel**.

Si x et y sont deux éléments d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$, écrire $x \leqslant y$ signifie avant tout que x et y sont comparables, puis ensuite seulement que x est « plus petit » que y. Ceci ne pose pas de problème dans les ensembles totalement ordonnées puisque alors tous les éléments sont comparables entre E. Par contre, si $(E, \leqslant)$ n'est pas totalement ordonné, alors, pour $a \in E$,

$$\forall x \in E, \quad x \leqslant a,$$

n'est pas synonyme de

$$\forall x \in E, \quad a \leqslant x \Longrightarrow x = a.$$

La première assertion peut se traduire par « tous les éléments x de E sont comparables à a et ils satisfont tous $x \leqslant a$ », tandis que la seconde assertion signifie plutôt « si on trouve un élément x comparable à a et supérieur à a, alors $x = a$ ».

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On considère sur E la relation binaire définie par : pour tout $(x, y) \in E^2$, $x < y$ si et seulement si ($x \leqslant y$ et $x \neq y$). La relation binaire ainsi construite sur E vérifie les points (2) et (3) de la définition. On l'appelle **relation d'ordre strict** associée à l'ordre $\leqslant$ (qui est parfois dite « large »). Il faut prendre garde au fait que ce n'est pas une relation d'ordre ; elle ne vérifie pas le premier point de la définition.

Définition D.2.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On appelle **majorant** (resp. **minorant**) de A tout élément M de E tel que, pour tout $x \in A$, on ait $x \leqslant M$ (resp. $x \geqslant M$). Une partie de E admettant un majorant (resp. minorant) est dite **majorée** (resp. **minorée**). Une partie de E est dite **bornée** si et seulement si elle est majorée et minorée.

Définition D.3.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On appelle **plus grand élément** (resp. **plus petit élément**) de E tout élément a de E tel que, pour tout $x \in E$, $x \leqslant a$ (resp. $a \leqslant x$).

Autrement dit, a est le plus grand (resp. petit) élément de E si et seulement si a est un majorant (resp. minorant) de E et un élément de E.

Proposition D.4.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Si E admet un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est unique ; on le note alors $\max(E)$ (resp. $\min(E)$).

Démonstration.
Montrons le résultat pour le plus grand élément (l'autre résultat se montre de manière analogue). Soient a et b deux plus grands éléments de E. Comme a est le plus grand élément de E, $b \leqslant a$. Comme b est le plus grand élément de E, $a \leqslant b$. La relation d'ordre étant antisymétrique, on en déduire que $a = b$. □

Index

algorithme
    d'Euclide, 158
    de Gauss-Jordan, 239
    de Hörner, 346
    du pivot de Gauss, 238
Allais, Alphonse, 263
anagramme, 173
antisymétrie, 26
antécédent, 140
application, 140
    antisymétrique, 536
    bilinéaire, 549
    définie positive, 549
    linéaire canoniquement associée à une matrice, 527
    linéaire par rapport aux colonnes, 535
    symétrique, 549
application composée, 147
application linéaire, 460
approximation décimale par défaut, 192
arbre de probabilité, 326
argument, 86
argument diagonal de Cantor, 182
argument principal, 89
arrangement, 171
assertion, 1
asymptote, 435
automorphisme, 462

base, 490
    canonique, 490
base adaptée, 493
base orthonormale, 559
Bessel (inégalité de), 566
bijectivité, 145
borne
    inférieure, 185
    supérieure, 185
borne inférieure, 185
borne supérieure, 185
bornée (partie), 29

cardinal, 164, 499
Cauchy, Augustin Louis, 193
centre de gravité, 96
Chasles, Michel, 14
Chasles, relation de, 14
classe d'équivalence, 150
coefficient, 233, 245, 337
coefficient binomial, 20
coefficient d'un polynôme, 337
coefficient dominant, 342
colinéarité, 447, 485
combinaison, 172
combinaison linéaire, 441
commutativité de matrices, 256
complémentaire, 134
condition
    de compatibilité, 240
condition de Cauchy, 120
condition nécessaire, 5
condition suffisante, 5
conjonction, 2
conjugué, 82
connecteur logique, 2
constante d'Euler, 582
continuité, 284
    en un point, 279
    à droite, 280
    à gauche, 280
contraposée, 5
convexe, 188
coordonnées, 491
coplanarité, 485
corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, 286
cosinus, 62, 587
couple, 138
couple de variables aléatoires, 385
courbe intégrale, 115, 122
courbe représentative, 32
Cramer
    Gabriel, 240
    système de, 240
crible d'Ératosthène, 161

degré, 341
dense, 192
diagramme de Venn, 132
diagramme sagittal, 140
dichotomie, 285
dimension finie, 496
dimension infinie, 496

discontinuité en un point, 279
discriminant, 94
disjonction, 2
distance, 29, 567
distributivité, 81
divergence grossière, 572
diviseur, 154, 349
division euclidienne, 156, 350
droite numérique achevée, 188
droite vectorielle, 447
définition d'une suite
    explicite, 194
    implicite, 194
    par récurrence, 194
dérivabilité, 293, 313
    à droite, 297
    à gauche, 297
dérivée seconde, 302
déterminant
    d'une famille de vecteur, 545
    d'une matrice, 537
développement décimal propre, 584
développement limité, 415

endomorphisme, 462
ensemble, 131
    bien ordonné, 153
    d'arrivée, 31
    de définition, 31
    de départ, 31
    des entiers naturels, 183
    des entiers relatifs, 183
    des nombres décimaux, 183
    des nombres rationnels, 183
    dénombrable, 180
    en compréhension, 131
    en extension, 131
    fini, 164
    image, 144
    indénombrable, 180
    vide, 132
ensemble de départ, 140
ensembles disjoints, 137
entiers premiers entre eux, 159
espace
    euclidien, 550
    probabilisable fini, 318
    probabilisé fini, 318
    préhilbertien réel, 550
espace vectoriel, 438
espaces vectoriels isomorphes, 511
espérance, 376
exponentielle complexe, 101
expérience aléatoire, 315
extremum, 39
    local, 264
extrémité, 263

factorielle, 20
famille
    d'éléments, 141
    de polynômes échelonnés en degré, 488
    génératrice, 481
    libre, 486
    liée, 486
    orthogonale, 557
    orthonormale, 557
Fibonacci
    Leornardo, 193
    suite de, 193
fonction, 31
    bornée, 38, 292
    composée, 32
    cosinus, 66
    croissante, 37
    de classe $\mathscr{C}^1$, 111
    dominée par une autre fonction, 275
    décroissante, 37
    dérivable, 41
    dérivée, 41, 296, 313
    en escalier, 397
    exponentielle complexe, 102
    identité, 141
    impaire, 34
    indicatrice, 141
    lipschitzienne, 309
    majorée, 38
    minorée, 38
    monotone, 37
    négligeable devant une autre fonction, 275
    paire, 34
    partie imaginaire, 99
    partie réelle, 99
    polynomiale, 345
    polynomiale associée, 345
    périodique, 36
    sinus, 66
    strictement croissante, 37
    strictement décroissante, 37
    strictement monotone, 37
    tangente, 66
    équivalente à une autre fonction, 275
format, 245
forme linéaire, 460
forme normalisée, 418
formule
    d'atomisation, 377
    d'intégration par parties, 407
    de Bayes, 330
    de changement de variables, 407
    de filtration, 328
    de Grassmann, 507
    de Kœnig - Huygens, 380
    de Leibniz, 303, 348
    de Moivre, 90
    de Pascal, 21, 177
    de Poincaré, 321

de Taylor, 348
de Taylor avec reste intégral, 407, 413
de Taylor-Young, 410, 420
de transfert, 378
des probabilités composées, 327
des probabilités totales, 328
du binôme de Newton, 22, 176
du binôme de Newton pour les matrices, 256
du capitaine, 21, 176
formules
d'addition, 64, 589
d'Euler, 90
de Cardan, 359
de duplication, 65, 589
de Ferrari, 360
de Morgan, 2
fraction irréductible, 159

Gauss
algorithme du pivot de, 238
Carl Friedrich, 233
Gauss-Jordan
algorithme, 239
théorème, 239
Gram-Schmidt (procédé d'orthonormalisation), 560
graphe, 31, 141
groupe, 81
commutatif, 437
groupe commutatif, 81
groupe linéaire, 260, 462

Hadamard, Jacques, 79
Hardy, Godfrey Harold, 153
Hermite, Charles, 293
Hilbert, David, 437
homothétie, 97, 461
hypothèse du continu, 182

identité
de polarisation, 554
identités remarquables, 554
image, 31, 140, 467, 527
directe, 142
réciproque, 142
imaginaires purs, 80
implication, 2, 316
inclusion, 132
inconnue, 233, 234
principale, 240
secondaire, 240
indépendance, 330, 390
conditionnelle, 332
mutuelle, 332
indépendance mutuelle, 392
indéterminée, 340
inférieur à, 25
injectivité, 145
intersection, 134, 189, 316
intervalle, 26
intégrale, 398, 399, 411
intégrale de Riemann, 104
inverse, 81, 260
inégalité
de Bessel, 566
de Bienaymé - Tchebychev, 384
de Cauchy-Schwarz, 552
de Markov, 383
de Taylor-Lagrange, 408
des accroissements finis, 309, 310
triangulaire, 28, 85, 104, 553
triangulaire (seconde), 28, 85
triangulaire généralisée, 86
triangulaire pour les séries, 581
isomorphisme, 462
issue, 315

Jordan, Camille, 239

Laplace, Pierre-Simon de, 45
limite, 198
finie, 264
infinie, 266
à droite, 269
à gauche, 269
liste, 170
loi
associative, 81
binomiale, 375
conditionnelle, 389
conjointe, 386
de Bernoulli, 374
de Morgan, 135
de probabilité d'une variable aléatoire, 371
image, 372
induite, 443
interne, 81
marginale, 386
uniforme, 373

majorant, 29
majorée (partie), 29
matrice, 245
antisymétrique, 254
associée à un système linéaire, 234
augmentée, 234
carrée, 245
colonne, 245
d'une application linéaire, 516
de dilatation, 258
de passage, 522
de transposition, 258
de transvection, 258
diagonale, 253
identité, 254
inversible, 260
ligne, 245
nulle, 246
réduite de Gauss, 239

scalaire, 253
symétrique, 254
transposée, 252
triangulaire inférieure, 253
triangulaire supérieure, 253
échelonnée par lignes, 237
échelonnée réduite par lignes, 238
matrice de passage, 522
matrices équivalentes, 235
maximum, 30, 39
local, 264, 305
mineur, 543
minimum, 30, 39
local, 264, 305
minorant, 29
minorée (partie), 29
module, 84
modus ponens, 4
monôme, 340
morphisme d'espaces vectoriels, 460
multiple, 154, 349
multiplicité, 353
méthode
de variation de la constante, 118

Newton
formule du binôme pour les matrices, 256
Newton, formule du binôme de, 22
Newton, Isaac, 22
nombre d'or, 214
nombre dérivé, 40, 293, 313
nombre premier, 161
nombres complexes, 79
norme euclidienne, 551
noyau, 467, 527
négation, 2

opposé, 81
opération élémentaire, 235, 494
orthogonal, 555
orthonormalisée, 560

paramètre, 240
partie, 131
principale d'un DL, 415
régulière d'un DL, 415
partie entière, 190
partie imaginaire, 80
partie réelle, 80
partition, 138
Pascal, Blaise, 21
Pascal, formule de, 21
permutation, 179
pivot, 237
plan
complexe, 82
de Cauchy, 82
vectoriel, 447
plus grand commun diviseur, 157
plus petit commun multiple, 159
Poincaré
formule de, 321
Poincaré, Henri, 25
point fixe, 230
polynôme, 337
composé, 341
conjugué, 361
constant, 340
de Taylor, 420
dérivé, 346
inversible, 343
irréductible, 358
pair, 341
scindé, 357
unitaire, 342
unité, 339
polynômes associés, 350
primitive, 103
principe
du berger, 166
multiplicatif, 166
principe de superposition des solutions, 119, 129
principe des tiroirs, 165
probabilité, 318
conditionnelle, 324
de transition, 326
uniforme, 318
problème de Cauchy, 120, 129
procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, 560
produit
matriciel, 250
produit cartésien, 138
produit de Cauchy, 338
produit scalaire, 549
produit scalaire canonique, 550
projecteur, 471
projection, 471
projeté orthogonal, 564
prolongement, 142
prolongement par continuité, 281
propriété de la borne supérieure, 185
prédicat, 3
Pythagore
théorème de, 558

quadruplet, 138
quotient, 156, 350

racine, 94, 353
n-ième, 91
n-ième de l'unité, 92
double, 354
multiple, 354
simple, 354
triple, 354
raison, 208
raisonnement

par analyse-synthèse, 8
par contraposition, 5
par double implication, 6
par implications, 4
par l'absurde, 6
par récurrence, 9
par récurrence double, 10
par récurrence forte, 11
rang, 240, 502, 510, 528
relation binaire, 150
relation d'ordre total, 26
relation d'équivalence, 150
relation de Chasles, 14, 104, 402
relations
coefficients-racines, 366
de Viète, 366
représentant, 150
représentation cartésienne, 134
représentation paramétrique, 134
reste, 156, 350
reste d'une série, 571
restriction, 142
rotation, 97
Russell, Bertrand, 1, 415
règle de D'Alembert, 580
réflexivité, 26

S, 546
Saint-Exupéry, Antoine, 103
scalaire, 438
second membre, 233
singleton, 131
sinus, 62, 587
soit, 168
solution, 115, 122
somme d'une série, 570
somme de sous-espaces vectoriels, 453
somme directe, 455
somme partielle, 569
sommes de Riemann, 403
sous-ensemble, 131
sous-espace vectoriel, 442
sous-espace vectoriel engendré, 447
sous-espace vectoriel trivial, 443
sous-suite, 206
stabilité, 228
subdivision, 397
suite
arithmético-géométrique, 211
arithmétique, 208
bornée, 197
complexe, 219
complexe bornée, 219
constante, 196
convergente, 198, 220
croissante, 196
de Fibonacci, 214
divergente, 200, 220
divergente vers l'infini, 203
dominée par une autre suite, 221
décroissante, 196
extraite, 206
géométrique, 208
linéaire récurrente double, 212
majorée, 197
minorée, 197
monotone, 196
négligeable devant une autre suite, 221
presque nulle, 337
réelle, 194
stationnaire, 197
strictement croissante, 196
strictement décroissante, 196
équivalente à une autre suite, 223
suites adjacentes, 218
supplémentaire, 457
supplémentaire orthogonal, 565
surjectivité, 145
symétrie, 475
synonymes (assertions), 2
système
compatible, 240
complet d'événements, 317
de Cramer, 240
homogène, 234
incompatible, 240
linéaire, 234
systèmes équivalents, 235
série, 569
absolument convergente, 581
convergente, 570
de Riemann, 579
divergente, 570
géométrique, 574
harmonique, 571
harmonique alternée, 582
semi-convergente, 582
télescopique, 574

tangente, 62, 295, 587
taux d'accroissement, 293, 313
terme général, 194
Thom, René, 183
théorème
d'encadrement, 214, 272
d'intégration par parties, 111
de Cantor, 182
de Cantor-Bernstein, 180
de D'Alembert-Gauss, 359
de décomposition en éléments simples, 109
de Gauss-Jordan, 239
de la base extraite, 498
de la base incomplète, 496
de la bijection, 288
de la limite de la dérivée, 312
de la limite monotone, 217, 273
de majoration, 215, 273
de minoration, 215, 273

de Pythagore, 558
de Rolle, 307
des accroissement finis, 308
des gendarmes, 214, 272
des valeurs intermédiaires, 284
du changement de variable, 113
du rang, 513, 530
fondamental de l'algèbre, 359
fondamental de l'analyse, 104, 405
fondamental de l'arithmétique, 162
fondamental de la trigonométrie, 62
Titchmarsh, Edward Charles, 183
transitivité, 26
transvection, 494
triplet, 138
troncature, 417

union, 134, 189, 316
univers, 315
univers image, 370

valeur absolue, 27
valeur efficace, 553
valeur moyenne, 402, 553
variable aléatoire, 369
centrée, 376
réduite, 381
vecteur, 438
unitaire, 552
vecteur directeur, 447
vecteur nul, 438
vecteurs linéairement indépendants, 486
voisinage, 263

écart-type, 380
écriture trigonométrique, 86
élément, 131
élément neutre, 81, 136
équation
caractéristique, 122, 212
différentielle homogène, 115, 122
différentielle linéaire d'ordre 1, 115
différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, 122
équation linéaire, 233, 470
équiprobabilité, 318
équivalence, 2
événement, 315
certain, 316
contraire, 316
impossible, 316
réalisé, 315
élémentaire, 316
événements incompatibles, 316