
Equations différentielles linéaires de degré 2 à coefficients constants

1 Présentation

Définition 1.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (normalisée)** sur I toute équation du type :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t), \quad (\text{E})$$

où a et b sont deux éléments (« constantes ») de $\mathbf{K}$, c est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, et y est une fonction **inconnue** définie et deux fois dérivable sur I , à valeurs dans $\mathbf{K}$.

On appelle **solution** de (E) sur I toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ deux fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t).$$

La courbe représentative d'une solution est appelée **courbe intégrale** de (E).

L'équation différentielle (E) est dite **homogène** si c est la fonction nulle.

On appelle **équation homogène associée** à (E) (ou équation sans second membre) l'équation homogène définie par :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad (\text{H})$$

Dans la pratique, on écrit (E) sous la forme :

$$y'' + ay' + by = c(t), \quad (\text{E})$$

en n'écrivant pas la variable de l'inconnue y .

Pour toute la suite, on se fixe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, $c \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ (on ne travaillera qu'avec des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ entier) une fonction continue.

2 Ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Définition 2.

L'**équation caractéristique** de (H) est l'équation d'inconnue $r \in \mathbf{K}$,

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Proposition 3 - Solutions de l'équation homogène - cas complexe.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H).

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 . L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{C} \\ t & \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution complexe r_0 . L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{C} \\ t & \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

Démonstration.

Exercice d'application 4. Déterminer les solutions à valeurs complexes de

$$y'' + (1 + 2i)y' + (i - 1)y = 0.$$

↪

Proposition 5 - Solutions de l'équation homogène - cas réel.

On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H).

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 réelles. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution réelle r_0 . L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t} \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions, qui sont des nombres complexes conjugués de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble des solutions de (H) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \end{array} : (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Démonstration.

Exercice d'application 6. Déterminer les solutions à valeurs réelles de

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

↪

Remarque 7. Toute expression de la forme $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ peut s'écrire sous la forme $R \cos(x + \varphi)$ ou $R \sin(x + \psi)$. Par conséquent, lorsque $\Delta < 0$, on peut aussi affirmer que l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle homogène (H) est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto Re^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \end{array} : (R, \varphi) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \right\}.$$

C'est cette forme qui est couramment utilisée en physique.

Proposition 8 - Solutions de l'équation générale.

Notons S_H l'ensemble des solutions homogènes. Si f_p est une solution de (E) (on parle parfois de **solution particulière**), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{h + f_p : h \in S_H\}.$$

Ainsi, si un connaît une solution particulière de (E), on peut obtenir toutes les solutions de (E) en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (H).

Démonstration.

La démonstration est similaire à celle pour les équations différentielles du premier ordre. □

3 Recherche de solutions dans quelques cas particuliers

Comme pour les équations d'ordre 1, on commence par chercher des solutions évidentes. Sinon, on se trouvera dans l'un des deux cas suivants.

Remarque technique 9. Si c est une fonction polynomiale de degré d , on recherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \mapsto R(t)$, où R est une fonction polynomiale de degré :

$$\begin{cases} d & \text{si } b \neq 0 \\ d+1 & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ d+2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Exercice d'application 10. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = 2t^2$.

↪

Remarque technique 11. Soit $(B, k) \in \mathbf{K}^2$. On suppose ici que $c : t \mapsto Be^{kt}$. On cherche alors une solution particulière f_p sous la forme

- $f_p : t \mapsto \alpha e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $f_p : t \mapsto \alpha t e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'une des deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (on dit que k est une racine simple de l'équation).
- $f_p : t \mapsto \alpha t^2 e^{kt}$, où $\alpha \in \mathbf{K}$, si k est l'unique racine (double) de l'équation caractéristique.

Exercice d'application 12. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10e^{3t}$.

↪

Proposition 13.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ une fonction deux fois dérivable qui vérifie (E). Alors :

$$\begin{cases} (\Re(f))'' + a \cdot (\Re(f))' + b \cdot (\Re(f)) &= \Re(c(t)) \\ (\Im(f))'' + a \cdot (\Im(f))' + b \cdot (\Im(f)) &= \Im(c(t)) \end{cases}$$

Démonstration.

On compose par $\Re$ (resp. $\Im$), et on utilise que $\Re(f^{(i)}) = \Re(f)^{(i)}$ (resp. $\Im(f^{(i)}) = \Im(f)^{(i)}$) pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. $\square$

Remarque technique 14. On suppose que $c : t \mapsto B \cos(\omega t)$ (resp. $c : t \mapsto B \sin(\omega t)$), où $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$, et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

On commence par chercher une solution particulière g_p de l'équation différentielle sur $\mathbf{C}$:

$$z'' + az' + bz = Be^{i\omega t}.$$

en utilisant la remarque technique précédente. La fonction $\Re(g_p)$ (resp. $\Im(g_p)$) est alors solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = B \cos(\omega t)$ (resp. $y'' + ay' + by = B \sin(\omega t)$).

Exercice d'application 15. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 10 \cos(2t)$.

$\hookrightarrow$

Remarque 16. La même astuce peut servir pour d'autres types de second membre. Si $c : t \mapsto Be^{kt} \cos(\omega t + \varphi)$ (resp. $c : t \mapsto Be^{kt} \sin(\omega t + \varphi)$), où $(B, k, \omega, \varphi) \in \mathbf{R}^4$, on utilise la même astuce qui est de « passer aux complexes » et on commence par trouver une solution particulière g_p de l'équation

$$z'' + az' + bz = Be^{k+i(\omega t+\varphi)}.$$

4 Principe de superposition des solutions

Proposition 17 - Principe de superposition des solutions.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et c_1, c_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues. On pose $(E_1) : y'' + ay' + by = c_1$.

$$(E_2) : y'' + ay' + by = c_2$$

Si φ_1 est une solution de (E_1) et φ_2 est une solution de (E_2) , alors $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ est solution de :

$$y'' + ay' + by = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2.$$

Démonstration.

Similaire à celle de la Proposition 17. □

Exercice d'application 18. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2t^2 + 10e^{3t} + 10 \cos(2t)$.

↪

5 Problème de Cauchy

Théorème 19 - Problème de Cauchy.

Soit $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbf{K}$. Il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y_1$.

Démonstration.

Admis. □