Fonction arcsinus

La fonction sin est continue, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Le théorème de la bijection assure alors que sin établit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\sin(-\frac{\pi}{2})\,;\,\sin(\frac{\pi}{2})\right] = [-1\,;\,1]$.

Définition 1.

On appelle **arcsinus**, et on note Arcsin, la fonction réciproque de :

$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

On a donc $\operatorname{Arcsin} : [-1\,;\,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 2.

Soit $x \in [-1\,;\,1]$.

1. $\sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x$.
2. $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin}(x)$.

Démonstration. 1. Découle de la définition.

2. $\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x))+\sin^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1 \iff x^2+\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1$. Or $\operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) \in [0\,;\,1]$, d'où $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

3. $\left\{\begin{array}{lcl} \sin(\operatorname{Arcsin}(-x)) & = & -x \\ \sin(-\operatorname{Arcsin}(x)) & = & -\sin(\operatorname{Arcsin}(x)) \end{array}\right.$, donc $\sin(\operatorname{Arcsin}(-x)) = \sin(-\operatorname{Arcsin}(x))$.

Or $\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{Arcsin}(-x) & \in & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \\ -\operatorname{Arcsin}(x) & \in & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$, donc $\operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin}(x)$. □

Remarque technique 3. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ est l'unique solution de l'équation $\sin(y) = \sin(x)$ d'inconnue $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire l'unique élément y appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x-y$ ou $x+y-\pi$ soit un multiple de 2π. En particulier, on retrouve que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

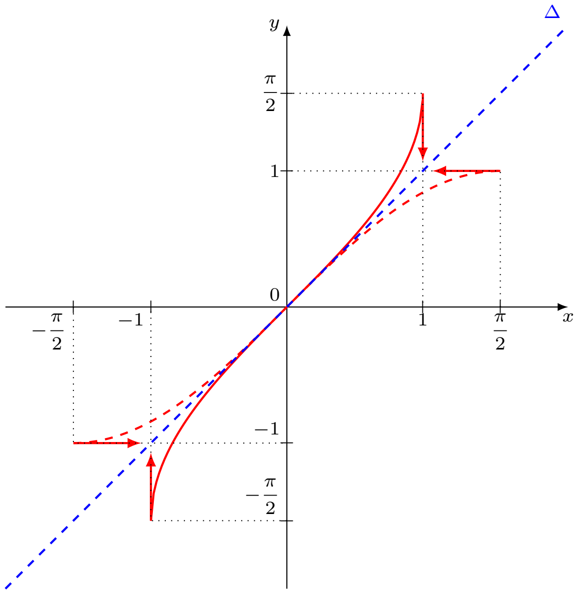
Il faut donc faire très attention. Si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$.

Exercice d'application 4. Calculer $\operatorname{Arcsin}(\sin(\frac{16\pi}{3}))$.

↪ On cherche l'unique réel $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(y) = \sin(\frac{16\pi}{3})$. On remarque que l'on a $\frac{16\pi}{3} - 6\pi < -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{16\pi}{3} - 4\pi > \pi/2$ donc on ne peut pas trouver de réel y qui diffère de $\frac{16\pi}{3}$ d'un multiple entier de 2π. Cette étape est inutile du point de vue de la logique puisque l'étape suivante permet de déterminer y et que l'on a unicité de la solution au problème posé ; mais, en pratique, il faut bien commencer par tester une des deux formes de y !
Comme $-\frac{16\pi}{3} + 5\pi = -\frac{\pi}{3}$ et comme $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, la simple définition de la fonction Arcsin assure que

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Sur le schéma ci-contre, on a tracé le graphe de la fonction sinus (en pointillés) et celui de la fonction arcsinus (en trait plein), qui est évidemment le symétrique du premier par rapport à la droite Δ, première bissectrice du repère de travail. La fonction sinus est continue, c'est-à-dire que son graphe peut être tracé « sans lever le crayon ». Cette simple considération géométrique assure qu'il en est de même de la fonction arcsinus. Dans le même ordre d'idée, le graphe de la fonction arcsinus admet une tangente en tout point m, qui est l'image par la symétrie axiale orthogonale s d'axe Δ de la tangente au graphe de cosinus au point $s(m)$. Il s'ensuit que la fonction arcsinus est dérivable en tout point de $]-1, 1[$ et n'est pas dérivable en -1 ni en 1.



Proposition 5.

La fonction Arcsin est continue.

Démonstration.
Ce résultat provient de la continuité de sin, et du théorème qui assure que la réciproque d'une fonction continue est continue. □

Proposition 6.

La fonction Arcsin est dérivable seulement sur $]-1\,;1[$ et, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration.
La fonction sin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) > 0$. Le théorème de dérivation d'une fonction réciproque assure alors que $\sin : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow]-1\,;1[$ admet une réciproque dérivable, avec, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'après la Proposition 2. □