

Trigonométrie

1 Présentation

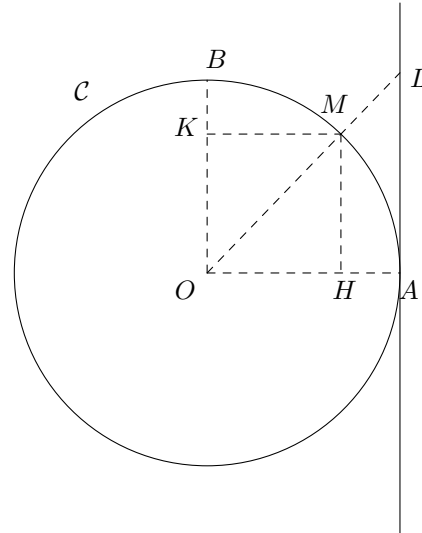
Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K , projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB) , et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A .

On oriente la droite (OA) (resp. (OB) , (OL)) par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OL}$).

Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, on sait que :

$$\cos \alpha = \overline{OH}, \quad \sin \alpha = \overline{OK}, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AL},$$

la tangente de α étant définie si et seulement si L existe, *i.e.* si le point M n'est pas sur la droite (OB) , *i.e.* si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.



2 Formulaire de trigonométrie

Proposition 1.

Pour tout α réel,

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Démonstration.

En reprenant les notations du paragraphe 1, on a $OM^2 = 1$, d'où le résultat. □

Proposition 2 - Angles remarquables.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

Proposition 3.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

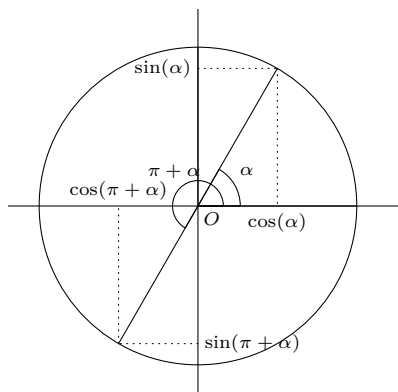
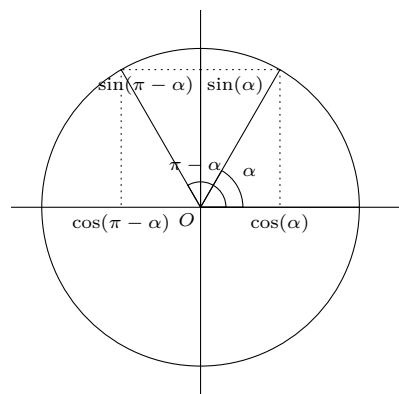
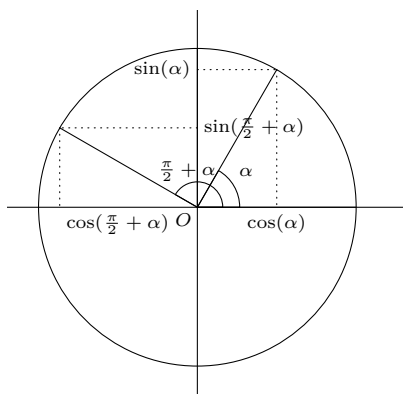
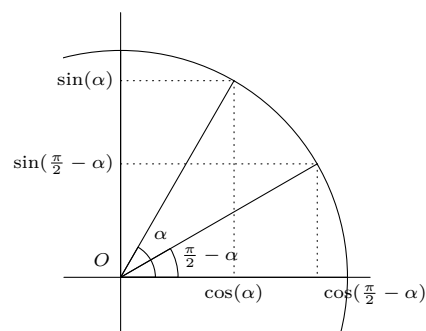
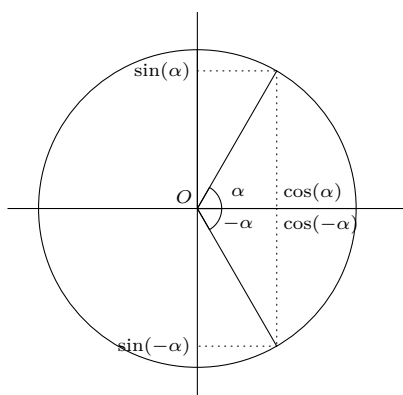
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

On peut rapidement retrouver ces égalités en dessinant un cercle trigonométrique :



Proposition 4 - Formules d'addition.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) & \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

Si de plus, x , y , $x+y$ et $x-y$ ne sont pas des éléments de $\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

Démonstration.

Ces formules sont immédiates en utilisant les nombres complexes. Par exemple,

$$\sin(x+y) = \Im(e^{i(x+y)}) = \Im(e^{ix}e^{iy}) = \Im(\cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)).$$

Cette proposition permet par ailleurs de démontrer facilement la Proposition 3. $\square$

En prenant en compte la ligne 1 de la Proposition 3, seule la première colonne de formules est à mémoriser, la seconde s'en déduisant immédiatement.

Les Propositions 1 et 4 fournissent par ailleurs les formules suivantes, qui sont très souvent utiles et donc à connaître par cœur :

Corollaire 5 - Formules de duplication.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\end{aligned}$$

Si de plus, x n'est pas un élément de $\{\pi/4 + k\pi/2, \pi/2 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, alors :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Exercice d'application 6. Déterminer la valeur du réel positif $\cos(\pi/8)$.

$\hookrightarrow$ On a $\cos(\pi/4) = \cos(2\pi/8) = 2\cos^2(\pi/8) - 1$, d'où $\cos^2(\pi/8) = (\sqrt{2} + 2)/4$. Puisque $\cos(\pi/8) \geq 0$, on obtient $\cos(\pi/8) = \sqrt{(\sqrt{2} + 2)}/2$.

Corollaire 7.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On suppose que x n'est pas un élément de $\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ et on pose $t = \tan(\frac{x}{2})$.

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Démonstration.

Les formules proviennent directement du Corollaire 5. $\square$

Proposition 8 - Somme et différence de deux cosinus, de deux sinus.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \cos(x) + \cos(y) &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos(x) - \cos(y) &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin(x) + \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin(x) - \sin(y) &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

Démonstration.

Ces formules se retrouvent rapidement avec l'astuce développée dans le chapitre sur les complexes, concernant la somme ou la différence de deux exponentielles complexes.

- $\cos(x) + \cos(y) = \Re(e^{ix} + e^{iy}) = \Re\left(2 \cos \frac{x-y}{2} e^{i \frac{x+y}{2}}\right)$
 $= \Re\left(2 \cos \frac{x-y}{2} \left(\cos \frac{x+y}{2} + i \sin \frac{x+y}{2}\right)\right) = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$
- $\sin(x) + \sin(y) = \Im(e^{ix} + e^{iy}) = 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$ en reprenant le calcul précédent.
- Les autres formules sont laissées en exercice. □

Corollaire 9 - Produit de sinus et de cosinus.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \cos(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \sin(y) &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \end{aligned}$$

Démonstration.

Ces formules se retrouvent rapidement par combinaison linéaire des formules de base ou en utilisant la formule d'Euler pour linéariser l'expression manipulée.

- $\cos(x) \cos(y) = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy})}{4} = \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{4}$
 $= \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$
- Les autres points se montrent de la même manière. □