
Plan d'étude d'une fonction

1. Si l'ensemble de départ de f n'est pas précisé dans l'énoncé, on détermine le domaine de définition de f . Pour cela, on détermine l'ensemble E des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
2. Détecter une éventuelle parité/imparité/périodicité et réduire en conséquence le domaine d'étude.
3. Calcul des limites aux bords de E . On rappelle que ces calculs peuvent nous indiquer l'existence d'asymptotes :
 - si, pour $a \in \mathbf{R}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors la courbe représentative de f présente en a une asymptote verticale d'équation $x = a$.
 - si, pour $b \in \mathbf{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, alors la courbe représentative de f a une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
4. Pour l'étude de variations, on vérifie que les variations ne sont pas évidentes (cas d'une somme de fonctions croissantes, d'une composée de fonctions croissantes, etc.). Dans le cas contraire, on utilise la dérivée de la fonction :
 - (a) On justifie sur que la fonction est dérivable, en écrivant explicitement l'ensemble sur lequel on travaille.
 - (b) On calcule la dérivée, qu'on cherche à factoriser le plus possible (en vue d'une étude de signe).
 - (c) On étudie le signe de la dérivée. La plupart du temps, il suffit de résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$, d'inconnue réelle $x \in E$ (éventuelle $f'(x) = 0$ si on précise les points d'annulation de la dérivée dans le tableau de signe).
 - (d) On conclut ; soit avec une phrase, soit avec un tableau de signes pour la dérivée et de variations pour la fonction (il faut alors justifier chaque élément apparaissant dans les tableaux).

Il faut vérifier avant de terminer que tous les résultats obtenus sont cohérents.
5. Esquisser un graphe résumant l'étude en faisant apparaître les asymptotes horizontales ou verticales détectées. On peut y souligner des valeurs ou des tangentes notables.

Exercice d'application 1. Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$x \longmapsto \frac{2x-1}{x+1}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.
2. Étudier la fonction f .

↪

1. Puisque le domaine de définition de f est $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, le centre de symétrie ne peut avoir que -1 comme abscisse. Pour $x \in \mathbf{R}^*$,

$$b = \frac{f(-1+x) + f(-1-x)}{2} = 2,$$

donc $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie de coordonnées $(-1, 2)$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude de la fonction à $] -1, +\infty[$.

2. On a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 2x - 1 = -3.$$

Comme $x \mapsto x + 1$ est positive sur $] -1, +\infty[$, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty.$$

Ainsi $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2,$$

donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions affines et, pour tout $x \in] -1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.

En utilisant la propriété de symétrie de $\mathcal{C}$, on obtient :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	2 	$+\infty$	$-\infty$ 

