
Rappels - exponentielle et logarithme

Ces fonctions seront étudiées dans le cadre du cours de PCSI2. Ce document contient uniquement des rappels des résultats qui peuvent vous être utiles en début d'année et qui apparaissent dans le programme de Terminale S.

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et premières propriétés

Théorème 1.

Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition 2.

La fonction évoquée dans le Théorème 1 s'appelle la **fonction exponentielle**. On la note

$$\begin{aligned} \exp : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) \end{aligned}$$

Exercice d'application 3. On considère une fonction g , dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 2$.

1. On pose, pour tout réel x , $f(x) = -\frac{1}{2}g(x)$. Montrer que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de la fonction g .

↪

1. On a, pour tout réel x ,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}g'(x) = -\frac{1}{2}g(x)$$

donc $f' = f$. De plus, $f(0) = -\frac{1}{2}g(0) = 1$, donc $f(0) = 1$.

2. D'après le Théorème 1, f est la fonction exponentielle. Il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = -2\exp(x)$.

Proposition 4.

Pour tout réel x , on a :

1. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
2. $\exp(x) > 0$.

Proposition 5.

Pour tous nombres réels x et y et tout entier relatif n , on a :

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
2. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
3. $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Exercice d'application 6. Exprimer en fonction de $\exp(2)$ les nombres donnés.

- $a = \exp(4)$;
- $b = \frac{1}{\exp(-2)}$;
- $c = \exp(16)$;
- $d = \exp(-10)$.

↪

- $a = \exp(4) = \exp(2 \times 2) = \exp(2)^2$;
- $b = \frac{1}{\exp(-2)} = \exp(2)$;
- $c = \exp(16) = \exp(2 \times 8) = \exp(2)^8$;
- $d = \exp(-10) = \frac{1}{\exp(10)} = \frac{1}{\exp(2 \times 5)} = \frac{1}{\exp(2)^5}$.

Notation : on note $\exp(1) = e$.

Pour tout entier naturel n , $\exp(n) = e^n$ (voir Proposition 5). Par analogie (on verra cela en détail cette année!), on note, pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.

1.2 Etude de la fonction exponentielle

Proposition 7.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. En particulier, pour tous réels x et y , on a :

$$e^x = e^y \iff x = y \quad \text{et} \quad e^x \leq e^y \iff x \leq y.$$

Exercice d'application 8. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $e^{2x+1} = 1$;
2. $e^{-x} = 1$;
3. $e^{-3x+2} = e^{2x}$;
4. $\frac{e^{x+1}}{e^{x+3}} = 2$.

↪

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{2x+1} = 1 \iff e^{2x+1} = e^0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2},$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-\frac{1}{2}\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{-x} = 1 \iff -x = 0 \iff x = 0,$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{0\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{-3x+2} = e^{2x} \iff -3x + 2 = 2x \iff x = \frac{2}{5},$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{\frac{2}{5}\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\frac{e^{x+1}}{e^{x+3}} = 2 \iff e^{x+1-x-3} = 2 \iff e^{-2} = 2.$$

Cette dernière assertion étant fausse, l'ensemble des solutions de l'équation est $\emptyset$.

Exercice d'application 9. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $e^{-3x+1} \leq 1$;
2. $e^{2x+1} > e^{4x-5}$.

↪

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{-3x+1} \leq 1 \iff e^{-3x+1} \leq e^0 \iff -3x + 1 \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $[\frac{1}{3}; +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{2x+1} > e^{4x-5} \iff 2x+1 > 4x-5 \iff x < 3.$$

Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty ; 3[$.

Proposition 10.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$;

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Exercice d'application 11. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^x + 2x - 1$; 2. g est définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

$\hookrightarrow$

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$, donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

En $+\infty$, on obtient une forme indéterminée en appliquant les règles d'opérations sur les limites. Il faut donc transformer l'expression $g(x)$, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, d'où par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, puis par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$. Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2.$$

Proposition 12.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$;

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

Exercice d'application 13.

1. Calculer la limite de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ en 0.
2. Calculer la limite de $g : x \mapsto e^x - x + 1$ en $+\infty$.
3. Calculer la limite de $h : x \mapsto (2x + 1)e^x$ en $-\infty$.

$\hookrightarrow$ On remarque que l'on a une forme indéterminée pour chaque question.

1. Soit $x \in]0 ; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{e^x - 1}{x} \times \sqrt{x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$g(x) = e^x - x + 1 = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1$, d'où, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$; par produit, on obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$h(x) = 2xe^x + e^x.$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Par somme, on conclut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.

Proposition 14.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I , avec $(e^u)' = u' \times e^u$.

Exercice d'application 15. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. Démontrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donner l'expression de f' .

$\hookrightarrow$ La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, donc f l'est également d'après la proposition précédente. De plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.

2 La fonction logarithme népérien

2.1 Définition et premières propriétés

On justifiera proprement cette année que, pour tout $a > 0$, l'équation $e^x = a$ d'inconnue x réelle, admet une unique solution. Cette solution se note $\ln(a)$ et s'appelle le **logarithme népérien** de a .

Définition 16.

La fonction qui, à tout réel $a > 0$, associe le réel $\ln(a)$ s'appelle la **fonction logarithme népérien**. Elle est notée

$$\begin{aligned} \ln :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbf{R} \\ a &\longmapsto \ln(a) \end{aligned}$$

Proposition 17.

- $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall a \in \mathbf{R}, e^a = x \iff a = \ln(x)$;
- $\forall a \in \mathbf{R}_+^*, e^{\ln(a)} = a$;
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$;
- $\forall a \in \mathbf{R}, \ln(e^a) = a$.

Exercice d'application 18. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $e^{-x} = 7$;
2. $e^{3x-2} = 2$;
3. $\ln(x) = -2$;
4. $\ln(-2x+1) = 4$.

$\hookrightarrow$

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{-x} = 7 \iff -x = \ln(7) \iff x = -\ln(7),$$

donc l'ensemble des solutions est $\{-\ln(7)\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{3x-2} = 2 \iff 3x - 2 = \ln(2) \iff x = \frac{2 + \ln(2)}{3},$$

donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{2 + \ln(2)}{3} \right\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ (on rappelle que $\ln$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$).

$$\ln(x) = -2 \iff x = e^{-2},$$

donc l'ensemble des solutions est $\{e^{-2}\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$. $-2x + 1 > 0 \iff x < \frac{1}{2}$, donc l'ensemble de définition de l'équation est $] -\infty; \frac{1}{2}[$. Soit $x \in] -\infty; \frac{1}{2}[$.

$$\ln(-2x + 1) = 4 \iff -2x + 1 = e^4 \iff x = \frac{1}{2} - \frac{e^4}{2}.$$

Le nombre $\frac{1}{2} - \frac{e^4}{2}$ est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ car $\frac{e^4}{2} > 0$, donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{1}{2} - \frac{e^4}{2} \right\}$.

Proposition 19.

Pour tous réels strictement positifs x et y , et pour tout entier relatif n , on a :

- | | |
|--|---|
| 1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$; | 3. $\ln(x^n) = n \ln(x)$; |
| 2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; | 4. $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$. |

Exercice d'application 20. Simplifier les nombres suivants :

- $A = \ln(27) - 2 \ln(3)$;
- $B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$;
- $C = \ln(3 + \sqrt{5}) + \ln(3 - \sqrt{5})$.

$\hookrightarrow$

- $A = \ln(3^3) - 2 \ln(3) = 3 \ln(3) - 2 \ln(3) = \ln(3)$.
- $B = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ en simplifiant le produit des fractions, d'où $B = -\ln(4) = -2 \ln(2)$.
- $C = \ln((3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})) = \ln(3^2 - \sqrt{5}^2) = \ln(9 - 5) = \ln(4) = 2 \ln(2)$.

2.2 Etude de la fonction logarithme népérien

Proposition 21.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Proposition 22.

Pour tous réels strictement positifs a et x , on a :

- | | | |
|--|-----------------------------------|---|
| 1. $\ln(a) \leq 0 \iff a \in]0; 1]$; | 2. $\ln(a) = \ln(x) \iff a = x$; | 3. $\ln(a) \leq \ln(x) \iff a \leq x$. |
|--|-----------------------------------|---|

Exercice d'application 23. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

- | | | |
|-------------------|------------------------|---------------------------|
| 1. $\ln(x) = 3$; | 2. $\ln(2x + 1) = 1$; | 3. $\ln(-x + 3) \leq 0$. |
|-------------------|------------------------|---------------------------|

$\hookrightarrow$

- 1. Soit $x \in]0; +\infty[$. $\ln(x) = 3 \iff x = e^3$, donc l'ensemble des solutions est $\{e^3\}$.
- 2. Soit $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

$$\ln(2x + 1) = 1 \iff \ln(2x + 1) = \ln(e) \iff 2x + 1 = e \iff x = \frac{e - 1}{2},$$

donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{e - 1}{2} \right\}$.

3. Soit $x \in]-\infty; 3[$.

$$\ln(-x+3) \leq 0 \iff \ln(-x+3) \leq \ln(1) \iff -x+3 \leq 1 \iff x \geq 2,$$

donc l'ensemble des solutions est $[2; +\infty[\cap]-\infty; 3[= [2; 3[$.

Exercice d'application 24. Etudier les variations de la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + 1$$
.

$\hookrightarrow$ La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 1$ est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbf{R}$. De plus, $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc, par somme, g est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. On a :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x},$$

donc $g'(x)$ est du signe de $(1-x)(1+x)$ (car $x > 0$), qui est un polynôme du second degré qui s'annule en -1 et 1 , et dont le coefficient dominant est négatif. Il s'ensuit que $g'(x) \geq 0$ sur $]0; 1]$ et $g'(x) \leq 0$ sur $[1; +\infty[$. Ainsi g est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

Proposition 25.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Exercice d'application 26.

- Calculer la limite de $f : x \mapsto -2\ln(x) + x + 1$ en 0 .
- Calculer la limite de $g : x \mapsto -x\ln(x) - x - 1$ en $+\infty$.

$\hookrightarrow$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc, par produit avec -2 , $\lim_{x \rightarrow 0} -2\ln(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x\ln(x)) = -\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x-1) = -\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Proposition 27.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x\ln(x)) = 0$.

Exercice d'application 28.

- Calculer la limite de $f : x \mapsto -2\ln(x) + x + 2$ en $+\infty$.
- Calculer la limite de $g : x \mapsto x^2\ln(x) - x + 3$ en 0 .
- Calculer la limite de $h : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0 .

$\hookrightarrow$ On remarque que l'on a une forme indéterminée pour chaque question.

- Soit $x > 0$.

$$f(x) = x \left(-\frac{2\ln(x)}{x} + 1 + \frac{2}{x} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\ln(x)}{x} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1$. Par somme, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2\ln(x)}{x} + 1 + \frac{2}{x} \right) = 1. \text{ Finalement, par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Soit $x > 0$. On a $x^2\ln(x) = x(x\ln(x))$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} x\ln(x) = 0$, d'où, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2\ln(x) = 0$. Finalement, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} (-x+3) = 3$, on conclut en ajoutant ces deux dernières limites : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$.

3. Soit $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$. On a : $h(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$. Par produit,
- $$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty.$$
- De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc, par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} h(x) = -\infty$.

Proposition 29.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$.
La fonction $\ln(u) : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Exercice d'application 30. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + x - 2)$ est dérivable sur son intervalle de définition, et donner l'expression de f' .

$\hookrightarrow$ La fonction $x \mapsto x^2 + x - 2$ est une fonction polynomiale du second degré, qui s'annule en -2 et 1 , et dont le coefficient dominant est positif. Il s'ensuit que cette fonction est strictement positive sur $D =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$. Ainsi f est définie sur D .

Puisque $x \mapsto x^2 + x - 2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, donc en particulier sur D , f est aussi dérivable sur D d'après la proposition précédente. On a en outre, pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}.$$

Graphes des fonctions exponentielle et logarithme népérien

