
Conseils de rédaction

1 Utilisation des symboles logiques

Lors d'un raisonnement, il faut absolument éviter le mélange des genres : on écrit en français ou en mathématique, mais pas les deux à la fois !

Exemple 1. Il ne faut pas écrire

$$\forall(m, n) \in \mathbf{Z}^2, \text{ la somme de } m \text{ et } n \text{ est un entier}$$

mais au choix :

1. $\forall(m, n) \in \mathbf{Z}^2, m + n \in \mathbf{Z}$.
2. La somme de deux entiers est un entier.

Les seuls mélanges couramment autorisés concernent les symboles $\in, =, \leq$, etc., comme dans « soit $x \in E$ » (qu'on devrait en toute rigueur écrire « soit x un élément de E »).

Quand on rédige un raisonnement, il est important de distinguer clairement les hypothèses, les conclusions et les rapports d'implication entre les différentes propositions (par exemple avec « donc », « alors », « ainsi », etc.)

Exemple 2. S'il faut démontrer : $\forall x \in [0, 1], \sqrt{1 - x^2} \in [0, 1]$, on n'écrira certainement pas :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x^2 \leq 1 \quad (t \mapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbf{R}^+) \\ 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \quad (t \mapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbf{R}^+) \end{aligned}$$

mais plutôt : soit $x \in [0, 1]$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}^+$, $0 \leq x^2 \leq 1$, on encore $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$. Mais la fonction racine carrée est aussi croissante, donc $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$. Comme voulu, $\sqrt{1 - x^2} \in [0, 1]$.

Remarque 3. Il faut faire très attention dans l'exemple précédent, la rédaction :

$$0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 1 \implies 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \implies 0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1,$$

ne répond pas du tout à la question. En effet, on rappelle que $\implies$ ne signifie pas « donc » : si P et Q sont deux assertions, dire que $P \implies Q$ est vraie n'entraîne certainement pas que Q est vraie. Pour pouvoir conclure, il faut aussi s'assurer que P est vraie (et l'écrire explicitement).

2 Introduction des variables

Lorsqu'on souhaite désigner un objet mathématique (nombres, fonctions...) par une lettre, cette correspondance doit être **explicitement déclarée**. Notons E l'ensemble des élèves de la classe. Si on veut travailler avec un élève, on peut le désigner par x . On écrira :

« Soit x un élève » ou « Soit $x \in E$ »

Exemple 4. Dérivation de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.

Soit x un réel. On a $f'(x) = (1 + x)e^x$.

Remarque technique 5. Introduire ses notations avec soin permet souvent de bien commencer un raisonnement. Pour toute question de la forme : « montrer que pour tout $x \in E$, ... », la réponse devra commencer par « soit $x \in E$ ».

Exercice d'application 6. Montrer que toute fonction réelle croissante définie sur $\mathbf{R}$ possède une limite en $+\infty$.

↔ On peut commencer par traduire l'énoncé au moyen de quantificateurs : « pour toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, si f est croissante, alors $\lim_{+\infty} f$ existe ». La réponse devra donc commencer par : « Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est croissante. Montrons que $\lim_{+\infty} f$ existe. [...] »

Remarque technique 7. Pour répondre à une question de la forme « montrer qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que... », il suffit de déterminer une valeur $x \in \mathbf{R}$ convenable. La réponse pourra commencer par : « on pose $x = \dots$ ».

Exercice d'application 8. Montrer que l'assertion suivante est vraie :

$$\exists (x, y) \in \mathbf{R}^2, x + y \in \mathbf{Z} \wedge x \notin \mathbf{Z} \wedge y \notin \mathbf{Z}$$

↔ On pose $x = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. On a $x + y \in \mathbf{Z}$, $x \notin \mathbf{Z}$ et $y \notin \mathbf{Z}$.

Parfois, lorsqu'une même expression lourde apparaît souvent, il peut être utile d'introduire une variable. Par exemple, si dans un calcul on utilise souvent $\frac{\sqrt{n_0} + 1}{\ln(n_0 + 7)}$ (où n_0 a déjà été défini), on peut introduire une variable : « on pose $K = \frac{\sqrt{n_0} + 1}{\ln(n_0 + 7)}$ » ou « on note K le réel $\frac{\sqrt{n_0} + 1}{\ln(n_0 + 7)}$ ». Il faut toutefois faire attention à ne pas introduire trop de variables inutiles, qui peuvent alourdir inutilement la rédaction.

Exemple 9. On veut résoudre l'équation $x^2 + 3x - 2$ d'inconnue réelle x .

- La rédaction suivante n'est pas acceptable :

$$\text{« } \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17, \text{ donc } x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}. \text{ »}$$

En effet, a , b , c et Δ n'ont pas été introduites, et il n'est pas écrit à quoi correspondent x_1 et x_2 .

- La rédaction suivante est correcte, mais très maladroite :

« L'équation $x^2 + 3x - 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ peut s'écrire $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = -2$. Son discriminant Δ vaut alors : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17$.

Posons $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$. L'équation étudiée possède deux racines distinctes x_1 et x_2 . »

- La rédaction suivante est la meilleure :

« L'équation $x^2 + 3x - 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ a pour discriminant $3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17$.

Ainsi l'équation étudiée possède deux racines distinctes $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ et $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$. »