
Suites réelles et complexes

1. Généralités sur les suites réelles

1.1. Suites réelles : définition et notations

Définition 1.

Une **suite réelle** est une famille de nombres réels indexée par $\mathbf{N}$, c'est-à-dire une application

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé **terme général** (ou n -ième terme de la suite, ou terme d'indice n , ou terme de rang n) de la suite.

La suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

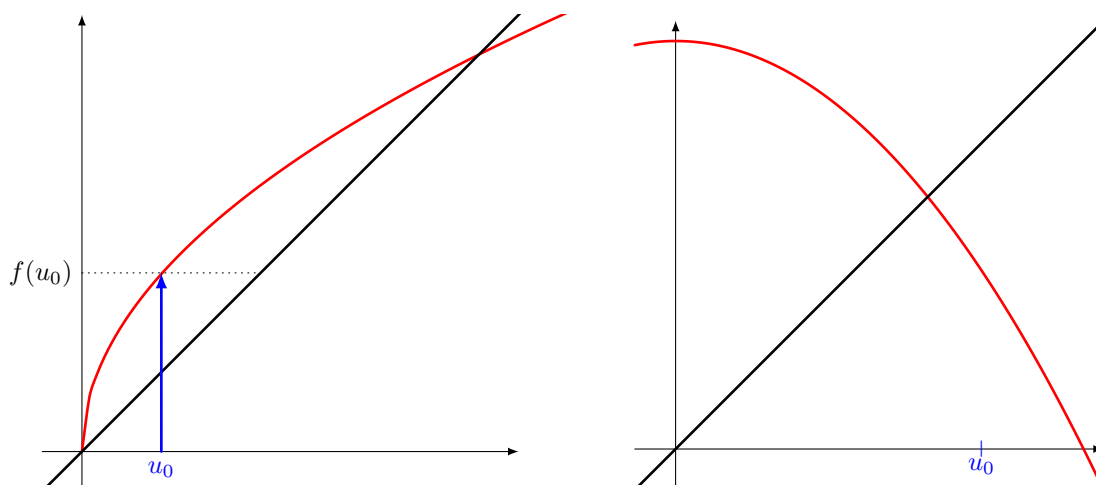
On note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbf{N}$.

Remarque 2. Une suite réelle de terme général u_n peut aussi être indexée par les nombres entiers naturels supérieurs à un entier n_0 . Une telle suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$. L'étude d'une telle suite est identique à celle d'une suite indexée par $\mathbf{N}$.

On peut définir une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de plusieurs manières différentes :

- **de manière explicite** : chacun des termes de la suite est donné en fonction de n .
- **de manière implicite** : tous les termes de la suite sont correctement définis comme vérifiant une certaine propriété, mais on ne dispose pas de la valeur explicite de chacun de ses termes (souvent le terme général est défini comme l'unique solution d'une équation donnée).
- **par une relation de récurrence** : on définit explicitement le (ou les) premier(s) terme(s) de la suite puis chaque terme de la suite est défini à l'aide du (ou des) précédent(s).

Représentation d'une suite définie par récurrence



Exemple 3. 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \exp(-n + 1)$$

est définie de manière explicite.

Avec cette définition, on connaît directement la valeur de chaque terme de la suite. Dans notre exemple, $u_{20} = \exp(-19)$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ réalise une bijection de $\mathbf{R}^+$ dans
- $$x \longmapsto x^5 + nx - 1$$

$[-1; +\infty[$ donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique nombre $u_n \in \mathbf{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et, *a priori*, il n'est pas possible d'obtenir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression directe de u_n en fonction de n .

3. Par exemple, on peut définir par récurrence deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & \text{et} & & \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} &= 2u_n + u_n^2, \\ v_0 &= 0, \quad v_1 &= 1 & \text{et} & & \forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+2} = \exp(v_{n+1} - v_n). \end{aligned}$$

Là encore, on ne peut pas, *a priori*, déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$ une expression directe de u_n et v_n en fonction de n . On peut par contre calculer les termes de ces suites de proche en proche. Ainsi,

$$u_1 = 3 \quad u_2 = 15 \quad u_3 = 255 \dots \quad v_2 = e \quad v_3 = e^{e-1} \dots$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite récurrente d'ordre 2.

⚠ Attention ⚠. Pour définir une suite par une relation de récurrence, il y a tout de même des précautions à prendre : il se peut que la donnée d'un premier terme et d'une relation de récurrence ne définissent pas correctement une suite.

Par exemple, en posant $u_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}$, on ne définit pas correctement la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$: on aurait $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 1$ et u_4 n'est pas défini !

1.2. Opérations sur les suites

On peut définir sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ trois opérations :

Définition 4.

Soit u, v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- La **somme** de u et v est la suite notée $(u + v)$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (u + v)_n = u_n + v_n.$$

- La **multiplication interne** de u et v est la suite notée $(u \times v)$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

- La **multiplication externe** de u par λ est la suite notée $\lambda \cdot u$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (\lambda \cdot u)_n = \lambda \cdot u_n.$$

1.3. Suites réelles et relation d'ordre

Définition 5.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- **croissante** (resp. **décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$) ;
- **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) ;
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement croissante ou (strictement) décroissante) ;
- **constante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ (ce qui équivaut à $u_n = u_0$).

Remarque technique 6.

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la principale méthode consiste à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n > 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors u est constante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n < 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Notons tout de même que lorsque le terme général u_n s'écrit sous forme d'un produit ou d'un quotient de **termes strictement positifs**, on peut, au lieu d'étudier le signe de différence, étudier la position du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 :

- si $u_{n+1}/u_n \geq 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n > 1$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante) ;
- si $u_{n+1}/u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite u est constante ;
- si $u_{n+1}/u_n \leq 1$ (respectivement $u_{n+1}/u_n < 1$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Exercice d'application 7. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

↪

Exercice d'application 8. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(n+3)!}{2^n}.$$

↪

Définition 9.

On dit qu'une suite u satisfait la propriété $\mathcal{P}(n)$ **à partir d'un certain rang** s'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que,

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 10. La suite u définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (n - 2)^2$ est croissante à partir du rang 2.

Définition 11.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Exercice d'application 12. Démontrer que $(\lfloor \frac{1}{n} \rfloor)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite stationnaire

↪

Définition 13.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est :

- **majorée** si elle vérifie

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq M ;$$

- **minorée** si elle vérifie

$$\exists m \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq m ;$$

- **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 14. Une suite positive est une suite minorée par 0. Elle est également minorée par n'importe quel nombre négatif non nul.

Exercice d'application 15. Démontrer qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

↪

Remarque 16. On a aussi montré qu'une suite majorée (resp. minorée) à partir d'un certain rang est majorée (resp. minorée).

Remarque 17. Une suite majorée peut très bien n'être majorée par aucun de ces termes.

Par exemple la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ est majorée par 1 mais n'est majorée par aucun de ses termes puisque l'ensemble de ses termes $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$ n'admet pas de plus grand élément.

Proposition 18.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée, *i.e.*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Le cas échéant, on dit que u est bornée par M .

Démonstration.

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée. Alors il existe des réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m \leq u_n \leq M$. Posons $K = \max(|m|, |M|)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$-K \leq -|m| \leq m \leq u_n \leq M \leq |M| \leq K$$

donc $|u_n| \leq K$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leq M$. Alors u est minorée par $-M$ et majorée par M . $\square$

Exercice d'application 19. Démontrer que l'ensemble des suites bornées est stable par somme, produit (ce qui signifie que la somme, resp. le produit, de deux suites bornées est borné) et produit par un réel (ce qui signifie le produit par un réel d'une suite bornée est borné).

$\hookrightarrow$