Suites réelles et complexes

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

3. Suites classiques

3.1. Suites arithmétiques et géométriques

Définition 1.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. La suite u est dite

1. **arithmétique** si, et seulement si, il existe $r \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.
2. **géométrique** si, et seulement si, il existe $q \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Remarque 2. La raison d'une suite arithmétique est définie de manière unique. La raison d'une suite géométrique u est définie de manière unique, sauf si $u_0 = 0$.

Proposition 3 - Variations.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. Supposons que u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.
   - Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
   - Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
   - Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.
2. Supposons que u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$.
   - Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite est nulle à partir du rang 1.
   - Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = u_0$.
   - Si $q < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est donc pas monotone.
   - Si $q > 0$, la suite est monotone et de signe constant. Plus précisément :
     - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement croissante.
     - Si $u_0 > 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement décroissante.
     - Si $u_0 < 0$ et $q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négative et strictement croissante.

Démonstration. 1. Immédiat en remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.

2. Si $q > 0$, on peut s'intéresser à $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Les autres cas sont simples. □

⚠ **Attention** ⚠**.** Ici il faut bien considérer des suites réelles ! Nous y reviendrons plus loin, mais puisque la notion de croissance est liée à la relation d'ordre $\leqslant$, la notion de suite complexe croissante n'a pas de sens.

Proposition 4 - Terme général.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

1. Si u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbf{K}$, alors pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $u_n = u_p + (n-p) \times r$.
2. Si u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{K}$, alors pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration.
Ces résultats s'obtiennent facilement par récurrence, par exemple. □

Proposition 5 - Limites.

Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. Supposons que u est arithmétique de raison $r \in \mathbf{R}$.
   - Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.
   - Si $r > 0$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   - Si $r < 0$, alors la suite (u_n) tend vers $-\infty$.
2. Supposons que u est géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$.
   - Si $u_0 = 0$, alors la suite est nulle et tend vers 0.
   - On suppose maintenant que $u_0 \neq 0$.
     - Si $|q| < 1$, alors la suite (u_n) tend vers 0.
     - Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante, égale à u_0 et converge vers u_0.
     - Si q et u_0 sont réels et si $q > 1$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si $u_0 > 0$ et vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
     - Dans tous les autres cas la suite (u_n) n'a pas de limite.

   On retiendra qu'une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q converge si, et seulement si, $q = 1$ ou $|q| < 1$.

Démonstration.
Il faut utiliser le terme général de la suite dans chaque cas. □

⚠ **Attention ⚠.** Encore une fois la notion de limite est liée à $\leqslant$. Dire qu'une suite de complexe diverge vers $+\infty$ par exemple n'a donc pas de sens (ou pourra tout de même définir la notion de suite complexe convergente).

Proposition 6 - Somme des termes.

Soit $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :
$$\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$
2. La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 est donnée par
$$(\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$
   Si la raison vaut 1, cette somme vaut plutôt n.

Démonstration.

On peut le démontrer par récurrence, ou par changement d'indice avec les sommes de référence $\sum_{k=0}^{n-1} k$ et $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$. □

3.2. Suites arithmético-géométriques

Définition 7.

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple 8. Les suites arithmétiques de raison p sont des suites arithmético-géométriques particulières (pour $a = 1$ et $b = p$). Les suites géométriques de raison q sont des suites arithmético-géométriques (pour $a = q$ et $b = 0$).

Lemme 9.

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. Soit u et v deux suites vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ et $v_{n+1} = av_n + b$. Alors $u - v$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = a(u_n - v_n)$. □

Voici la méthode permettant de déterminer l'expression du terme général u_n lorsque (u_n) est arithmético-géométrique avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Remarque technique 10. On commence par chercher une suite constante $r = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r_{n+1} = ar_n + b$, *i.e.* $r = ar + b$. La suite constante égale à $r = \frac{b}{1-a}$ convient. Dans ce cas, le lemme assure que $(u_n - r)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison a, et a donc pour terme général $u_n - r = (u_0 - r)a^n$, puis, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = r + (u_0 - r)a^n$.

On peut en déduire que l'ensemble des suites u vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{b}{1-a} + \lambda \cdot a^n \right)_{n\in\mathbf{N}} \, : \, \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice d'application 11. Déterminer le terme général de la suite u telle que $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3 - 2u_n$.

$\hookrightarrow$ Soit $r \in \mathbf{R}$. On a $r = 3 - 2r$ si et seulement si $r = 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$u_{n+1} - 1 = -2(u_n - 1),$$

donc

$$u_n - 1 = (u_0 - 1)(-2)^n \quad i.e. \quad u_n = 1 - (-2)^n.$$

3.3. Suites réelles récurrentes doubles

Définition 12.

On appelle **suite récurrente double** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe $(a,b)\in\mathbf{K}^2$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n. \tag{$\star$}$$

Une telle suite est entièrement déterminée par la relation $(\star)$ et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.

Proposition 13 - Expression dans le cas complexe.

Soit $(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^\star$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par $(\star)$ et la donnée de $(u_0,u_1)\in\mathbf{C}^2$.
Pour déterminer l'expression du terme général u_n d'une telle suite, on commence par considérer son **équation caractéristique**

$$z^2=bz+c \tag{E}$$

et le discriminant Δ de cette équation.

- Si $\Delta\neq 0$, alors (E) a deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=\alpha {z_1}^n+\beta {z_2}^n.$$
- Si $\Delta=0$, alors (E) admet une unique solution z_0 et il existe deux constantes α et β complexes telles que :
$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=(\alpha n+\beta){z_0}^n.$$

Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
- Supposons d'abord que l'équation (E) admette deux solutions z_1 et z_2 distinctes.
  - *Analyse.* Supposons qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&u_0\\ \alpha z_1+\beta z_2&=&u_1\end{array}\right.$. Ce système admet une unique solution $(\frac{u_1-z_2u_0}{z_1-z_2},\frac{u_1-z_1u_0}{z_2-z_1})$. Ainsi, (α,β) est déterminé de manière unique par u_0 et u_1.
  - *Synthèse.* Pour tout $n\in\mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$ », où (α,β) est déterminé dans la phase d'analyse. Par définition de (α,β), H_0 et H_1 sont vraies.
  Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n=\alpha z_1^n+\beta z_2^n$ et $u_{n+1}=\alpha z_1^{n+1}+\beta z_2^{n+2}$, donc
  $$\begin{array}{rcl}u_{n+2}&=&au_{n+1}+bu_n\\ &=&a(\alpha z_1^{n+1}+\beta z_2^{n+1})+b(\alpha z_1^n+\beta z_2^n)\\ &=&\alpha z_1^n(az_1+b)+\beta z_2^n(az_2+b)\\ &=&\alpha z_1^{n+2}+\beta z_2^{n+2}\end{array}$$
  car $z_1^2=az_1+b$ et $z_2^2=az_2+b$. Ainsi H_{n+2} est vraie.
  Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n\in\mathbf{N}$, H_n est vraie.
- Supposons que (E) admette une racine double z_0.
  - *Analyse.* Supposons qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\alpha z_0^n+\beta n z_0^n$. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&u_0\\ \alpha z_0+\beta z_0&=&u_1\end{array}\right.$. Ce système a une unique solution $(\alpha,\beta)=(u_0,\frac{u_1-z_0u_0}{z_0})$. Ainsi le couple (α,β) est unique (s'il existe !).
  - *Synthèse.* Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose H_n : « $u_n=\alpha z_0^n+\beta n z_0^n$ », où (α,β) est donné dans la phase d'analyse. On a H_0 et H_1 vraies par définition de (α,β).

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$ et $u_{n+1} = \alpha z_0^{n+1} + \beta(n+1) z_0^{n+1}$. Donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1} + b u_n \\ & = & a(\alpha z_0^{n+1} + \beta(n+1) z_0^{n+1}) + b(\alpha z_0^n + \beta n z_0^n) \\ & = & \alpha z_0^n (a z_0 + b) + \beta n z_0^n (a z_0 + b) + \beta z_0^{n+1} a \\ & = & \alpha z_0^{n+2} + \beta(n+2) z_0^{n+2} \end{array}$$

car $z_0^2 = a z_0 + \beta$ et $z_0 = \frac{a}{2}$. Ainsi H_{n+2} est vraie.
Finalement le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

□

Proposition 14 - Expression dans le cas réel.

Soit $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\star$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par $(\star)$ et la donnée de $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$. Notons Δ le discriminant de l'équation polynomiale (E).

- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions x_1 et x_2 et il existe deux constantes α et β réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution x_0 et il existe deux constantes α et β réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\alpha n + \beta) {x_0}^n.$$

- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, et il existe deux constantes α et β réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Dans chacun des cas, les valeurs de α et β sont entièrement déterminées par les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
La démonstration est très proche de celle qui a permis de passer des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants à valeurs complexes aux solutions à valeurs réelles lorsque les coefficients de l'équation sont réels.

- Si $\Delta > 0$, on sait d'après le cas complexe qu'il existe deux constantes α et β, *a priori* complexes, telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha {x_1}^n + \beta {x_2}^n.$$

  On a alors $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$. Donc $\alpha = \dfrac{u_1 - x_2 u_0}{x_1 - x_2}$ et $\beta = \dfrac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1}$ (les nombres x_1 et x_2 sont bien différents). Puisque u_0, u_1, x_1 et x_2 sont réels, les deux nombres α et β sont, eux aussi, réels.
- On procède de la même manière si $\Delta = 0$.
- Supposons que $\Delta < 0$. D'après le cas complexe, en notant $r = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ les deux solutions complexes conjuguées de (E), où $\rho \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on sait qu'il existe deux constantes complexes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = A r^n + B \overline{r}^n = A \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} + B \rho^n \mathrm{e}^{-in\theta}.$$

  On sait que $\left\{ \begin{array}{rcll} A + B & = & u_0 & (L_1) \\ Ar + B\overline{r} & = & u_1 & (L_2) \end{array} \right.$

  $(L_2) - \overline{r}(L_1)$ donne $A = \dfrac{u_1 - \overline{r} u_0}{r - \overline{r}}$ et $(L_2) - r(L_1)$ donne $B = \dfrac{u_1 - r u_0}{\overline{r} - r} = \overline{A}$ (on sait que $\overline{r} \neq r$ car $r \notin \mathbf{R}$).

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n (A e^{in\theta} + \overline{A} e^{-in\theta}) \\ &= \rho^n (A e^{in\theta} + \overline{A e^{in\theta}}) \\ &= \rho^n \ 2 \ \Re e(A e^{in\theta}) \\ &= \rho^n (2 \Re e(A) \cos(n\theta) - 2 \Im m(A) \sin(n\theta)) \\ &= \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = 2\Re e(A)$ et $\beta = -2\Im m(A)$. On remarque que α et β sont des réels.

□

Exercice d'application 15. On considère la **suite de Fibonacci** $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Déterminer le terme général de F.

$\hookrightarrow$ L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le **nombre d'or**). D'après la proposition précédente, on peut donc dire qu'il existe un unique couple de réels (α, β) tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à résoudre le système (S) : $\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta &=& 0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 &=& 1 \end{array} \right.$. Or

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& -\beta \\ \alpha(r_1 - r_2) &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta &=& -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right. .$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$.

Exercice d'application 16. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n$.

$\hookrightarrow$ On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1 - 3n)(-2)^{-n}$.

Exercice d'application 17. Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

$\hookrightarrow$ On trouve, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sqrt{2}^n (\cos(\frac{n\pi}{4}) - 2\sin(\frac{n\pi}{4}))$.

4. Théorèmes d'existence d'une limite

4.1. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration

Théorème 18 - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que

$$\exists N \in \mathbf{N}, \ \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $(N_1, N_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que

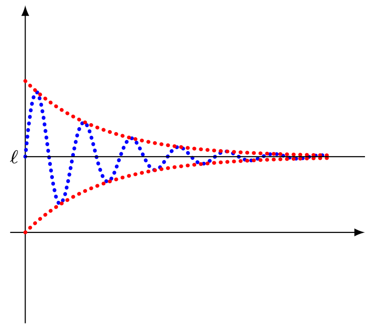
$$\begin{array}{ll} \forall n \geqslant N_1, & |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon, \\ \forall n \geqslant N_2, & |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \end{array}$$

Soit $n \geqslant \max(N_1, N_2, N)$. On a

$$-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \varepsilon,$$

donc $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et l'on vient de démontrer que v converge vers ℓ. □

Illustration du théorème d'encadrement. Une suite est ici encadrée par deux suites qui convergent vers ℓ.



Exercice d'application 19. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ (pour le voir, on factorise les dénominateurs des expressions par n et n^2 respectivement). Le théorème d'encadrement assure alors que u converge vers 1.

Exercice d'application 20. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, posons $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Déterminer, si elle existe, la limite de u.

↪ On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $x \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < x + \frac{1}{n}$. Or la suite constante égale à x et la suite $\left(x + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers x, donc le théorème d'encadrement permet de conclure que u converge vers x.

Exercice d'application 21. Démontrer que le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 converge vers 0.

↪ Soit u une suite bornée et v une suite convergente. Il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $|u| \leqslant M$, donc, $|uv| \leqslant M|v|$. Or $M|v|$ converge vers 0. Le corollaire précédent permet de conclure $u \cdot v$ converge vers 0.

Théorème 22 - Théorèmes de minoration et de majoration.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend aussi vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbf{R}$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $N_A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_A$, $u_n \geqslant A$. On a alors pour tout $n \geqslant N_A$, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

2. Même méthode. □

Exercice d'application 23. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Puisque, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La somme de droite étant égale à $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème de minoration assure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice d'application 24. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$. Étudier la limite de $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et de $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$.

$\hookrightarrow$ On a pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

d'où, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$. Donc le théorème de minoration fournit $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et, avec le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$.

4.2. Convergence des suites monotones bornées

Théorème 25 - Théorème de la limite monotone.

Soit u une suite réelle.

1. Supposons u croissante.
   (a) Si u est majorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
   $$\ell = \sup\{u_n \;:\; n \in \mathbf{N}\}.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
   (b) Si u n'est pas majorée, alors u diverge vers $+\infty$.
2. Supposons u décroissante.
   (a) Si u est minorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
   $$\ell = \inf\{u_n \;:\; n \in \mathbf{N}\}.$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant \ell$.
   (b) Si u n'est pas minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration.
On ne traite que le cas où u est croissante.

(a) Supposons u majorée. Notons $A = \{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$. A est non vide car il contient u_0, et majorée (car u est majorée). Ainsi A admet une borne supérieure, notée ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $\ell - \varepsilon < x$. Comme $x \in A$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x = u_N$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geqslant N$, $\ell - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell$ (car ℓ majore A). Ainsi $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et on a montré que u converge vers ℓ.

(b) Supposons u non majorée. Ainsi,

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N}, \quad u_n > M.$$

Soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N > A$. Puisque la suite u est croissante, on en déduit que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$ et on a montré que u tend vers $+\infty$.

□

Corollaire 26.

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Notons que le théorème de la limite monotone permet de démontrer qu'une suite admet une limite, mais il ne permet pas de calculer celle-ci !

Exercice d'application 27. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Étudier la convergence de la suite u.

$\hookrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, donc u est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

Donc la suite u est majorée par 1. Le théorème de la limite monotone assure alors que u converge.

Remarque : On peut calculer (mais c'est plus difficile) la limite de cette suite. Elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

4.3. Suites adjacentes

Définition 28.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont **adjacentes** si, et seulement si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (ou l'inverse).
2. La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Lemme 29.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $w_n = v_n - u_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}),$$

et, comme v est décroissante et u est croissante, $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ (somme de deux nombres négatifs). Ainsi w est décroissante.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque w est décroissante, on a pour tout $k \geqslant n$, $w_k \leqslant w_n$ puis, en faisant tendre k vers $+\infty$, $w_n \geqslant 0$. □

Théorème 30 - Convergence des suites adjacentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles avec u croissante et v décroissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes alors :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent ;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (on note ℓ cette limite commune) ;
3. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration. 1. Avec le lemme et les variations de u et v, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0. \qquad (\star)$$

Ainsi u est croissante et majorée donc, d'après la théorème de la limite monotone, elle converge vers ℓ_1. De même, v est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ_2.

2. Par opération, $u - v$ converge vers $\ell_1 - \ell_2$. Or, $u - v$ converge vers 0 par hypothèse. Par unicité de la limite, on conclut que $\ell_1 - \ell_2 = 0$, *i.e.* $\ell_1 = \ell_2$.
3. Le théorème de la limite monotone assure par ailleurs que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. □

Exemple 31. Pour $x \in \mathbf{R}$, les suites des valeurs approchées par défaut et par excès de x, définies par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n},$$

forment deux suites adjacentes convergeant vers x.

Exercice d'application 32. Justifier que les suites u et v définies pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

convergent vers une même limite.

↪ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ &\quad - \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc u est croissante. De plus,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leqslant 0,$$

donc v est décroissante. Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $u - v$ converge vers 0. Ainsi u et v sont adjacentes. On en déduit que u et v convergent vers la même limite.

5. Suites de nombres complexes

Définition 33.

Une **suite de nombres complexes** est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$. On la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbf{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, adjacentes... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes, de même que les théorème de la limite monotone et d'encadrement !). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 34.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **bornée** si, et seulement si, la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Proposition 35.

Si une suite complexe converge, alors sa limite est unique.

Démonstration.
On utilise la même démonstration que pour les suites réelles, en remplaçant valeur absolue par module. □

Définition 36.

On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0,$$

(c'est la limite d'un module, donc d'une suite réelle). Autrement dit, z converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque 37. Dire qu'une suite complexe tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a pas de sens.

Proposition 38.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbf{C}$.
La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(\ell)$.

Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $b = \mathfrak{Im}(\ell)$.

- Supposons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell = a+ib$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$|\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| = |\,\mathfrak{Re}(z_n - \ell)| \leqslant |z_n - \ell|$$
et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| = 0$ c'est-à-dire que la suite $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a. On montrerait de même que $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers b.
- Supposons que les suites de nombres réels $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire
$$|z_n - (a+ib)| = |(\mathfrak{Re}(z_n) - a) + i(\mathfrak{Im}(z_n) - b)| \leqslant |\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| + |\,\mathfrak{Im}(z_n) - b|.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathfrak{Re}(z_n) - a| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathfrak{Im}(z_n) - b| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - (a+ib)| = 0$ donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell = a+ib$. □

Remarque 39. Les résultats obtenus sur les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbf{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes. Par exemple, les opérations sur les limites restent valables : on le démontre de la même manière que pour les suites réelles, en remplaçant les valeurs absolues par des modules.

Proposition 40.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ un nombre complexe.
1. La suite $(\,\overline{z_n}\,)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.
2. La suite $(|z_n|^2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $|\ell|^2$.
3. La suite u est bornée.

Démonstration.
Notons $a = \mathfrak{Re}(\ell)$ et $b = \mathfrak{Im}(\ell)$.
1. Les suites $(\mathfrak{Re}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathfrak{Re}(\overline{z_n}) = \mathfrak{Re}(z_n)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z_n}) = -\,\mathfrak{Im}(z_n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{Re}(\overline{z_n}) = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{Im}(\overline{z_n}) = -b$. D'après la proposition précédente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{z_n} = a - ib = \overline{\ell}$.
2. La suite $(z_n\overline{z_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell\overline{\ell}$ par produit et en utilisant 1.
3. On utilise la même démonstration que pour les suites réelles, en remplaçant valeur absolue par module. □

6. Relations de comparaison pour les suites

6.1. Domination et négligeabilité

Définition 41.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes. On dit que :
1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **dominée** par la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée et un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n b_n$.
On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et on lit «u_n est un grand O de v_n».
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varepsilon_n$.
On note alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et on lit «u_n est un petit o de v_n».

On peut, de manière immédiate, réécrire ces définitions comme dans la proposition suivante (ces nouvelles caractérisations sont à connaître car elles sont très utiles en pratique) :

Proposition 42 - Caractérisation de o et O.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.

1. (a) u est dominée par v si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M|v_n|$.
   (b) Si de plus v ne s'annule pas au delà d'un certain rang n_1, alors u est dominée par v si et seulement si pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$.
2. Si v ne s'annule pas au delà d'un certain rang n_1, alors u es négligeable devant v si et seulement si $\dfrac{u}{v}$ converge vers 0.

Remarque 43.
- $u_n = \mathrm{O}(1)$ signifie que (u_n) est bornée.
- $u_n = \mathrm{O}(0)$ signifie que u est une suite nulle à partir d'un certain rang.
- $u_n = \mathrm{o}(1)$ signifie que u converge vers 0.
- $u_n = \mathrm{o}(0)$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang.

Exemple 44.
- $n = \mathrm{o}\big(n^2\big)$ et $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Plus généralement, si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ avec $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = \mathrm{o}\big(n^\beta\big)$.
- On a $n^{3/2}\cos(1/n) = \mathrm{O}\big(n^{3/2}\big)$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^{3/2}}\right| = |\cos(1/n)| \leqslant 1$.
- On a $n^{3/2}\cos(1/n) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n^{3/2}\cos(1/n)}{n^2} = \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} = 0$ puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

6.2. Propriétés des o et O

La relation O :

- est réflexive (pour tout $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 \times v_n$ et $(1)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc $u_n = \mathrm{O}(u_n)$) ;
- n'est pas symétrique ($n = \mathrm{O}\big(n^2\big)$ mais $n^2 \neq \mathrm{O}(n)$) ;
- n'est pas antisymétrique ($\frac{n}{2} = \mathrm{O}\big(\frac{2n}{3}\big)$ et $\frac{2n}{3} = \mathrm{O}\big(\frac{n}{2}\big)$, mais $\frac{n}{2} \neq \frac{2n}{3}$ pour $n \in \mathbf{N}$) ;
- est transitive (si $u, v, w \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ avec $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors il existe (α_n) et (β_n) bornées telles que, pour n assez grand, $u_n = \alpha_n \times v_n$ et $v_n = \beta_n \times w_n$, donc $u_n = (\alpha_n\beta_n) \times w_n$, donc $(\alpha_n\beta_n)$ est bornée, puis $u_n = \mathrm{O}(w_n)$).

La relation o :

- n'est pas réflexive ($1 \neq \mathrm{o}(1)$ car $\frac{1}{1}$ ne tend pas vers 0) ;
- n'est pas symétrique ;
- n'est pas antisymétrique ;
- est transitive.

Proposition 45.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Démonstration.
Laissé en exercice. □

Proposition 46.

Soient $u, v, w, t \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

1. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{O}(w_n)$.
   Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{o}(w_n)$.
2. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{O}(w_n t_n)$.
   Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n t_n)$.

Exercice d'application 47. Montrer que $n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(n) = \mathrm{O}(n)$.

$\hookrightarrow$ On a $\ln(n) = \mathrm{o}(n)$ donc $\ln(n) = \mathrm{O}(n)$. Comme $n\sin(\frac{1}{n}) = \mathrm{O}(n)$, on peut écrire $n\sin(\frac{1}{n}) + \ln(n) = \mathrm{O}(n)$.

Exercice d'application 48. Montrer que $n\ln(n)\sin(\frac{1}{n}) = \mathrm{o}(n^2)$.

$\hookrightarrow$ $n\sin(1/n) = \mathrm{O}(n)$ et $\ln(n)\mathrm{o}(n)$ donc $n\ln(n)\sin(1/n) = \mathrm{o}(n^2)$.

Proposition 49 - Croissances comparées.

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$, soit $q \in]1\,;+\infty[$. Alors

$$q^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\ln^\beta n\right), \quad \ln^\beta n = \mathrm{o}(n^\alpha), \quad n^\alpha = \mathrm{o}(q^n), \quad q^n = \mathrm{o}(n!), \quad n! = \mathrm{o}(n^n).$$

Remarque 50. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ (notation privilégiée dans d'autres sciences), on a donc

$$\frac{1}{n!} \ll q^{-n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Démonstration.
Toutes ces relations sont des réécritures du théorème de croissance comparée (en notant que $q = \mathrm{e}^{\ln(q)}$), sauf $q^n = \mathrm{o}(n!)$, avec $q > 1$ et $n! = \mathrm{o}(n^n)$.

- Posons $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Une récurrence aisée permet alors de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u_N}{2^{n-N}}$. Puisque $\dfrac{u_N}{2^{n-N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient par encadrement que u converge vers 0.

- De même, posons $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < \frac{1}{2}.$$

  Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On conclut alors comme précédemment. $\square$

Exemple 51.

- $(-1)^n = \mathrm{o}(n)$.
- $n^2 = \mathrm{o}(n^4)$
- $\dfrac{1}{n^3} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- $(\ln(n))^3 = \mathrm{o}(n)$
- $n^3 = \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$.

Corollaire 52.

Pour tout $\gamma > 0$, et tout $\beta > 0$, $n^\beta = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\gamma n})$ et $\mathrm{e}^{-\gamma n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

6.3. Suites équivalentes

Définition 53.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et un rang n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n a_n$.
On note alors $u_n \sim v_n$, on lit «u_n est équivalente à v_n».

On obtient immédiatement la caractérisation suivante, très utile en pratique :

Proposition 54 - Caractérisation de $\sim$.

Soit $u, v \in \mathbf{K}^N$ telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1.$$

⚠ **Attention** ⚠. Écrire $u_n \sim 0$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang !! Donc si vous trouvez qu'une suite est équivalente à 0, **il y a de très (TRÈS) fortes chances qu'il y ait une erreur**.

Exemple 55.

On a $n + \ln(n) \sim n$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+\ln(n)}{n} = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice d'application 56. Montrer que $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$.

$\hookrightarrow$ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ puis $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$.

Proposition 57 - Lien avec o et O.

Soit $u, v \in \mathbf{K}^\mathbf{N}$ avec v qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1. $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$.

Démonstration.
Notons n_0 le rang à partir duquel v ne s'annule pas.

$$\begin{aligned}
1.\quad u_n \sim v_n &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\\
&\iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0\\
&\iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0\\
&\iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)\,.
\end{aligned}$$

2. Si $u_n \sim v_n$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 1, alors $\frac{u}{v}$, donc u, est non nulle à partir d'un certain rang n_1 et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_1}$ converge vers 1, donc $\frac{u}{v}$ est bornée. □

Remarque 58. On peut aussi démontrer la proposition précédente sans supposer que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang (mais c'est un peu plus pénible à écrire). Par exemple, pour le point numéro 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
u_n \sim v_n &\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 1, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = v_n a_n\\
&\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 1, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = (1-a_n)v_n\\
&\iff \exists (\epsilon)_{n\in\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} = 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = \epsilon_n v_n\\
&\iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)
\end{aligned}$$

Pour toute la suite, on suppose que les suites manipulées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Notation 59. Si le terme général d'une suite (u_n) s'écrit $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n = \mathrm{o}(v_n)$, on peut écrire $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ (et on a alors $u_n \sim v_n$).

Exemple 60. $\ln(n) = \mathrm{o}(n)$ donc $n + \ln(n) \sim n$.

Proposition 61.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. Soient $u, v, w \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

- Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\frac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et, par opération sur les limites, $\frac{v_n}{w_n} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim w_n$. □

Proposition 62 - Opérations avec $\sim$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}, (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ quatre suites réelles.

1. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$.
2. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{x_n}$.
3. Si (u_n) et (v_n) sont strictement positives au delà d'un certain rang, et si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration. 1. On a $\frac{u_n \cdot v_n}{w_n \cdot x_n} = \frac{u_n}{w_n} \cdot \frac{v_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2. On a $\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{x_n}} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{x_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. On a $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, d'où le résultat. □

Exercice d'application 63. Montrer que $\dbinom{n}{6} \sim \dfrac{n^6}{720}$.

↪ Soit $j \in \mathbf{N}$. On a $n - j \sim n$, donc

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!}\prod_{j=0}^{5}(n-j) \sim \frac{1}{6!}\prod_{j=0}^{5} n = \frac{n^6}{720}.$$

Remarque : En DS il faudrait rédiger mieux que cela ☺.

⚠ **Attention ⚠.** Les remarques suivantes sont extrêmement importantes. Les maîtriser vous évitera bien des erreurs !

1. **On ne peut ni ajouter, ni soustraire, les équivalents.**
   Par exemple, $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$, et pourtant 1 n'est pas équivalent à 2.
2. **On ne compose pas les équivalents.**
   Si f est une fonction (même continue sur $\mathbf{R}$) et si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$.
   Posons par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$ et $f = \exp$. On a $u_n \sim v_n$, mais
   $$\frac{f(u_n)}{f(v_n)} = \mathrm{e}^{n^2+n-n^2} = \mathrm{e}^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
   donc $f(u_n) \not\sim f(v_n)$.
3. **Lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant.**
   Par exemple, $1+\dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ n'est pas équivalent 1 (en effet, grâce à la limite classique $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ e, on a donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$).

Proposition 64.

Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites équivalentes.

1. Si la suite (v_n) est strictement positive (respectivement négative) au delà d'un certain rang, alors (u_n) est strictement positive (resp. négative) au delà d'un certain rang.
2. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite et
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. 1. Comme u et v sont équivalentes, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$, et u et v ont même signe strict.

2. Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On a $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par opérations sur les limites. □

6.4. Équivalents classiques

Proposition 65.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ non nulle, alors $u_n \sim \ell$.

Proposition 66.

Si $P : x \longmapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est une fonction polynomiale dont le coefficient a_p est non nul, alors $P(n) = a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 \sim a_p n^p$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0 = \mathrm{o}(a_p n^p)$. □

Les équivalents donnés dans la proposition suivante sont à connaître **par cœur !**

Proposition 67 - Équivalents classiques.

Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas au delà d'un certain rang. Alors chacune des suites suivantes est bien définie au delà d'un certain rang, et

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
- $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$.
- $1 - \mathrm{ch}(u_n) \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

Démonstration.
On utilise le fait que si pour une fonction f, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 1$. □

Exercice d'application 68. Déterminer la limite de $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbf{N}}$.

$\hookrightarrow$ On a $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}$ et $-\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{1}{n}$, donc $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sim -1$, puis $n \ln\left(n - \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1$. Or $\lim\limits_{x \to -1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1}$.

Donc, par composition des limites, $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Remarque 69. Attention, dans l'exercice précédent il peut être tentant de composer des équivalents (ce qui est interdit !!!). Vous remarquerez que nous ne l'avons pas fait : nous avons composé des limites, ce qui est licite.

Exercice d'application 70. Déterminer un équivalent simple de $(\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})))_{n \in \mathbf{N}}$.

$\hookrightarrow$ On a :

$$\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) = \ln\left(\mathrm{e}^{-n}\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-n}) + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = -n + \ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right).$$

Or $\mathrm{e}^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(\mathrm{e}^{-n}) \sim \mathrm{e}^{-n}$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}} = 1$, et ensuite $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$.

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right)}{-n} = 0$, d'où $\ln\left(\dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^{-n}}\right) = \mathrm{o}(-n)$, et enfin $\ln(\sin(\mathrm{e}^{-n})) \sim -n$.

Remarque 71. Dans l'exercice précédent, il peut être tentant d'ajouter des équivalents (ce qui est interdit !!!). Vous remarquerez que nous ne l'avons pas fait : nous avons utilisé un petit o (une méthode alternative aurait été de factoriser l'expression).