Interrogation n°2- Sujet A

Exercice 1. 1. Enoncer la formule du binôme de Newton.

2. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Quel est le coefficient du terme x^3y^2 dans le développement de $(2x-y)^5$?

Corrigé 1. 1. Pour $(a,b,n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$, on a $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. Le terme cherché est $\binom{5}{2} \times 2^3 \times (-1)^2 = \dfrac{5!}{2! \times 3!} \times 8 = \dfrac{4 \times 5}{2} \times 8 = 80$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k+1} 2^{k+1}$.

Corrigé 2. Avec un changement d'indice puis en appliquant la formule du binôme de Newton, on obtient directement

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k+1} 2^{k+1} = \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n}{k} 2^k \cdot 1^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 - \binom{n}{1} 2^1 + \binom{n}{n+1} 2^{n+1} + \binom{n}{n+2} 2^{n+2} = 3^n - 1 - 2n.$$

Exercice 3. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 9$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1+2n)3^n$.

Corrigé 3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n = (1+2n)3^n$ ».
On a $u_0 = 1$ et $(1+2\times 0) \times 3^0 = 1$, donc H_0 est vraie. De plus, $u_1 = 9$ et $(1+2\times 1)\times 3^1 = 3 \times 3 = 9$, donc H_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. On a :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

puis, avec H_n et H_{n+1},

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6(1+2(n+1))3^{n+1} - 9(1+2n)3^n \\ &= 2(2n+2)3^{n+2} - (1+2n)3^{n+2} \\ &= (2(2n+2) - (1+2n))3^{n+2} \\ &= (1+2(n+2))3^{n+2} \end{aligned}$$

donc H_{n+2} est vraie.
Le principe de récurrence double permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1+2n)3^n$

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Donner la définition de maximum de A.

Corrigé 4. On dit que $x \in \mathbf{R}$ est le maximum de A si x est un majorant de A et si $x \in A$.

Interrogation n°2- Sujet B

Exercice 1. 1. Enoncer la formule du binôme de Newton.

2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Quel est le coefficient du terme x^2y^3 dans le développement de $(x-2y)^5$?

Corrigé 1. 1. Pour $(a, b, n) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{N}$, on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. Le terme cherché est $\binom{5}{2} \times 1^2 \times (-2)^3 = \dfrac{5!}{2! \times 3!} \times (-8) = \dfrac{4 \times 5}{2} \times (-8) = -80$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k+1} 3^{k+1}$.

Corrigé 2. Avec un changement d'indice puis en appliquant la formule du binôme de Newton, on obtient directement

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k+1} 3^{k+1} = \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n}{k} 3^k \cdot 1^{n-k} = (1+3)^n - \binom{n}{0} 3^0 - \binom{n}{1} 3^1 + \binom{n}{n+1} 3^{n+1} + \binom{n}{n+2} 3^{n+2} 4^n - 1 - 3n.$$

Exercice 3. Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2-3n)2^n$.

Corrigé 3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « $u_n = (2-3n)2^n$ ».
On a $u_0 = 2$ et $(2 - 3 \times 0) \times 2^0 = 2$, donc H_0 est vraie. De plus, $u_2 = -2$ et $(2 - 3 \times 1) \times 2^1 = -2$, donc H_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. On a :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

puis, avec H_n et H_{n+1},

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 4(2-3(n+1))2^{n+1} - 4(2-3n)2^n \\ &= 2(-3n-1)2^{n+2} - (2-3n)2^{n+2} \\ &= (-6n-2-2+3n)2^{n+2} \\ &= (2-3(n+2))2^{n+2} \end{aligned}$$

donc H_{n+2} est vraie.
Le principe de récurrence double permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (2-3n)2^n$

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Donner la définition de minimum de A.

Corrigé 4. On dit que $x \in \mathbf{R}$ est le minimum de A si x est un minorant de A et si $x \in A$.