Interrogation n°3 - Sujet A

Exercice 1. Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur D. Compléter les définitions suivantes :

1. On dit que f est croissante lorsque ...
2. On dit f est paire lorsque ...
3. On dit que f est périodique lorsque ...

Corrigé 1.

1. On dit que f est croissante lorsque pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leqslant y$, $f(x) \leqslant f(y)$.
2. On dit f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
3. On dit que f est périodique lorsqu'il existe $T \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Quelle assertion doit-on montrer que prouver que f n'est pas majorée ?

Corrigé 2.

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) > M.$$

Exercice 3. Résoudre l'inéquation $2x + 1 \leqslant \sqrt{12x + 13}$ d'inconnue réelle x.

Corrigé 3. Soit $x \in \left[-\frac{13}{12}\,;\,+\infty\right[$.

- Supposons $x \geqslant -\frac{1}{2}$, de sorte que $2x + 1 \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} 2x + 1 \leqslant \sqrt{12x + 13} &\iff (2x+1)^2 \leqslant 12x + 13 \quad \text{car } 2x + 1 \geqslant 0 \\ &\iff 4x^2 - 8x - 12 \leqslant 0 \\ &\iff 4(x^2 - 2x - 3) \leqslant 0 \\ &\iff 4(x+1)(x-3) \leqslant 0 \\ &\iff x \in [-1\,;\,3]. \end{aligned}$$

  Ainsi $2x + 1 \leqslant \sqrt{12x + 13}$ pour $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,3\right]$ et $2x + 1 \geqslant \sqrt{12x + 13}$ pour $x \geqslant 3$.
- Supposons $x < -\frac{1}{2}$, de sorte que $2x + 1 < 0$. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, l'inéquation $2x + 1 \leqslant \sqrt{12x + 13}$ est vérifiée. Ainsi, pour $x \in \left[-\frac{13}{12}\,;\,-\frac{1}{2}\right[$, on a $2x + 1 \leqslant \sqrt{12x + 13}$.
- Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{13}{12}\,;\,3\right]$.

Interrogation n°3 - Sujet B

Exercice 1. Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur D. Compléter les définitions suivantes :

1. On dit que f est décroissante lorsque ...
2. On dit f est impaire lorsque ...
3. On dit que f est périodique lorsque ...

Corrigé 1.
1. On dit que f est décroissante lorsque pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leqslant y$, $f(x) \geqslant f(y)$.
2. On dit f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
3. On dit que f est périodique lorsqu'il existe $T \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + T \in D$ et $f(x+T) = f(x)$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Quelle assertion doit-on montrer que prouver que f n'est pas minorée ?

Corrigé 2.

$$\forall m \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) < m.$$

Exercice 3. Résoudre l'inéquation $2x + 1 \leqslant \sqrt{8x+9}$ d'inconnue réelle x.

Corrigé 3. Soit $x \in \left[-\frac{9}{8}\,;+\infty\right[$.

- Supposons $x \geqslant -\frac{1}{2}$, de sorte que $2x + 1 \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} 2x+1 \leqslant \sqrt{8x+9} &\iff (2x+1)^2 \leqslant 8x+9 \qquad \text{car } 2x+1 \geqslant 0 \\ &\iff 4x^2 - 4x - 8 \leqslant 0 \\ &\iff 4(x^2 - x - 4) \leqslant 0 \\ &\iff 4(x+1)(x-2) \leqslant 0 \\ &\iff x \in [-1\,;2]\,. \end{aligned}$$

  Ainsi $2x + 1 \leqslant \sqrt{8x+9}$ pour $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;2\right]$ et $2x+1 \geqslant \sqrt{8x+9}$ pour $x \geqslant 2$.
- Supposons $x < -\frac{1}{2}$, de sorte que $2x + 1 < 0$. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, l'inéquation $2x + 1 \leqslant \sqrt{8x+9}$ est vérifiée. Ainsi, pour $x \in \left[-\frac{9}{8}\,;-\frac{1}{2}\right[$, on a $2x + 1 \leqslant \sqrt{8x+9}$.
- Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{9}{8}\,;2\right]$.