
Interrogation n°4 - Sujet A

Exercice 1. 1. Énoncer le théorème donnant la dérivée d'une composée.

2. Soit $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$. On admet que f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* . Donner l'expression de la dérivée de f .

Corrigé 1. 1. Soient E, F, G trois parties de \mathbf{R} , $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions dérivables. Alors $f \circ g$ est dérivable et

$$(f \circ g)' = g' \times f' \circ g.$$

2. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. Énoncer le théorème de la bijection dans le cas d'une fonction $f : [a; b[\rightarrow \mathbf{R}$ strictement croissante.

Corrigé 2. Si f est continue, strictement croissante, alors f établit une bijection de $[a; b[$ vers $\left[f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction bijective. Énoncer le théorème de dérivabilité de f^{-1} (autrement dit, donner une condition suffisante pour que f^{-1} soit dérivable et donner aussi l'expression de la dérivée de f^{-1}).

Corrigé 3. Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Interrogation n°4 - Sujet B

Exercice 1. 1. Énoncer le théorème donnant la dérivée d'une composée.

2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$. On admet que f est dérivable sur $]1; +\infty[$. Donner l'expression de la dérivée de f .

Corrigé 1. 1. Soient E, F, G trois parties de \mathbf{R} , $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions dérivables. Alors $f \circ g$ est dérivable et

$$(f \circ g)' = g' \times f' \circ g.$$

2. On a, pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. Énoncer le théorème de la bijection dans le cas d'une fonction $f :]a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ strictement croissante.

Corrigé 2. Si f est continue, strictement croissante, alors f établit une bijection de $]a; b]$ vers $\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b) \right]$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction bijective. Énoncer le théorème de dérivabilité de f^{-1} (autrement dit, donner une condition suffisante pour que f^{-1} soit dérivable et donner aussi l'expression de la dérivée de f^{-1}).

Corrigé 3. Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.