Interrogation n°8 - Sujet A

Exercice 1.

1. Enoncer le théorème d'intégration par parties.
2. Enoncer le théorème de changement de variable.

Corrigé 1.

1. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, f et g deux fonctions définies sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :
$$\int_a^b f'(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Soit I un intervalle. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in \mathcal{F}(\varphi(I),\mathbf{K})$ une fonction continue. Alors :
$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 2.

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos(2x)$ sur $\mathbf{R}$.
2. Donner une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$ sur $\left]-\frac{2}{3}\,;\,0\right[$.

Corrigé 2.

1. Un primitive est $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$.
2. Une primitive est $x \longmapsto \frac{1}{3}\operatorname{Arcsin}(3x+1)$.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

Corrigé 3. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Interrogation n°8 - Sujet B

Exercice 1.
1. Enoncer le théorème d'intégration par parties.
2. Enoncer le théorème de changement de variable.

Corrigé 1.
1. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, f et g deux fonctions définies sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :
$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Soit I un intervalle. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in \mathcal{F}(\varphi(I), \mathbf{K})$ une fonction continue. Alors :
$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad \int_a^b f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 2.
1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \sin(3x)$ sur $\mathbf{R}$.
2. Donner une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - (2x+1)^2}}$ sur $]-1\,;\,0[$.

Corrigé 2.
1. Un primitive est $x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos(3x)$.
2. Une primitive est $x \longmapsto \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x+1)$.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 4}$.

Corrigé 3. On a
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).\end{aligned}$$