Interrogation n°11 - Sujet A

Exercice 1. Soit E et F deux ensembles non vides, non réduits un point. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Compléter l'assertion suivante : « f est injective si et seulement si ... »
2. Soit A une partie de E. Définir l'image directe de A par f.

Corrigé 1.
1. f est injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
2. $f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$.

Exercice 2. Montrer, par double inclusion, l'égalité d'ensembles

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1 \right\} = \{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\}.$$

Corrigé 2. Soit $(x, y) \in \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1 \right\}$. Alors $4x - y = 1$. Posons $x = t+1$. On a $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t+3$. Donc $x \in \{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$. On vient de montrer que $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1 \right\} \subset \{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$.

Soit $(x, y) \in \{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$. Il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = t+1$ et $y = 4t+3$. On a $4x - y = 4(t+1) - (4t+3) = 1$, donc $(x, y) \in \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1 \right\}$. On vient de montrer que $\{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\} \subset \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1 \right\}$.

Finalement, par double inclusion, $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4x - y = 1 \right\} = \{(t+1, 4t+3) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 3. Combien existe-t-il d'anagrammes des mots suivants :

1. MATHS
2. MOTO
3. DODO

Corrigé 3.
1. Il y a 5 façons de positionner M, puis 4 façons de positionner A, puis 3 façons de positionner T, puis deux façons de placer H et il reste une place pour S : en tout, il y a 5! anagrammes de MATHS.
2. Il y a 4 façons de placer M, puis 3 façons de placer T et enfin il ne reste qu'une façon de placer les O : en tout, il y a $4 \times 3 \times 1$ anagrammes de MOTO.
3. Il y a $\binom{4}{2}$ positions possibles pour D et les O occupent les places restantes, d'où $\binom{4}{2}$ anagrammes de DODO.

Interrogation n°11 - Sujet B

Exercice 1. Soit E et F deux ensembles non vides, non réduits un point. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Compléter l'assertion suivante : « f est surjective si et seulement si ... »
2. Soit B une partie de F. Définir l'image réciproque de B par f.

Corrigé 1.

1. f est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.
2. $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Exercice 2. Montrer, par double inclusion, l'égalité d'ensembles

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + 4y = 6 \right\} = \{(4t + 2, -t + 1) \,:\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Corrigé 2. Soit $(x, y) \in \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + 4y = 6 \right\}$. Alors $x + 4y = 6$. Posons $y = -t + 1$. On a $x = 6 - 4y = 6 - 4(-t + 1) = 4t + 2$. Donc $x \in \{(4t + 2, -t + 1) \,:\, t \in \mathbf{R}\}$. On vient de montrer que $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + 4y = 6 \right\} \subset \{(4t + 2, -t + 1) \,:\, t \in \mathbf{R}\}$.

Soit $(x, y) \in \{(4t + 2, -t + 1) \,:\, t \in \mathbf{R}\}$. Il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = 4t + 2$ et $y = -t + 1$. On a $x + 4y = 4t + 2 + 4(-t + 1) = 6$, donc $(x, y) \in \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + 4y = 6 \right\}$. On vient de montrer que $\{(4t + 2, -t + 1) \,:\, t \in \mathbf{R}\} \subset \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + 4y = 6 \right\}$.

Finalement, par double inclusion, $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x + 4y = 6 \right\} = \{(4t + 2, -t + 1) \,:\, t \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 3. Combien existe-t-il d'anagrammes des mots suivants :

1. MOYEN
2. ALEA
3. BOBO

Corrigé 3.

1. Il y a 5 façons de positionner M, puis 4 façons de positionner O, puis 3 façons de positionner Y, puis deux façons de placer E et il reste une place pour N : en tout, il y a 5! anagrammes de MOYEN.
2. Il y a 4 façons de placer L, puis 3 façons de placer E et enfin il ne reste qu'une façon de placer les A : en tout, il y a $4 \times 3 \times 1$ anagrammes de ALEA.
3. Il y a $\binom{4}{2}$ positions possibles pour B et les O occupent les places restantes, d'où $\binom{4}{2}$ anagrammes de BOBO.